

УДК 511.94; 29.03.77; 29.05; 49.03.05; 28.51.20

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-730-739

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ПРОБЛЕМЫ ТОМСОНА ДЛЯ УПАКОВКИ ВЕКТОРОВ НА ГИПЕРСФЕРЕ В ЗАДАЧАХ ШИРОКОПОЛОСНОЙ РАДИОСВЯЗИ

А.Ю. Гришенцев

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация  
Адрес для переписки: AGrishentsev@yandex.ru

### Информация о статье

Поступила в редакцию 12.12.18, принята к печати 26.03.19  
Язык статьи — русский

**Ссылка для цитирования:** Гришенцев А.Ю. Численное решение многомерной Проблемы Томсона для упаковки векторов на гиперсфере в задачах широкополосной радиосвязи // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 4. С. 730–739. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-730-739

### Аннотация

**Предмет исследования.** Разработан метод численного решения многомерной Проблемы Томсона для упаковки на гиперсфере сигналов, интерпретируемых как векторы, в задачах широкополосной радиосвязи. **Метод.** Выполнена реализация численного решения многомерной Проблемы Томсона для упаковки векторов на гиперсфере в задачах радиосвязи. Разработанный метод упаковки широкополосных радиосигналов заключается в следующем: сначала производится упаковка векторов на гиперсфере в соответствии с постановкой Проблемы Томсона, затем полученные векторы трансформируются в спектр, на основе которого с помощью обратного преобразования Фурье получают результирующие сигналы. **Основные результаты.** В статье приведен математический аппарат разработанного метода упаковки векторов на гиперсфере, а также некоторые результаты его исследования на сходимость и устойчивость. В статье изложен принцип реализации разработанного метода синтеза широкополосных сигналов на основе множества векторов, упакованных на гиперсфере, приведены некоторые результаты исследований метода синтеза сферически упакованных широкополосных радиосигналов. **Практическая значимость.** Исследования показывают, что практическая значимость разработанного метода для сферической упаковки сигналов заключается в возможности повышения скорости передачи информационных сообщений и повышении эффективности использования ресурса частота–время, например, по сравнению с ортогональным кодированием. Разработанный метод упаковки широкополосных радиосигналов на гиперсфере позволяет удовлетворить требования различных потребителей, отдающих предпочтение скорости перед помехоустойчивостью или помехоустойчивости перед скоростью передачи информационных сообщений. Разработанный метод предоставляет дополнительные возможности проектирования защищенных каналов связи за счет увеличения мощности ансамблей широкополосных сигналов, имеющих шумоподобный характер.

### Ключевые слова

Проблема Томсона, гиперсфера, широкополосная радиосвязь, сигналы, векторы, сферическая упаковка, численное решение

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-730-739

## NUMERICAL SOLUTION OF MULTIDIMENSIONAL THOMSON PROBLEM FOR VECTORS PACKAGING ON HYPERSPHERE IN BROADBAND RADIOCOMMUNICATION PROBLEMS

A.Yu. Grishentsev

ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation  
Corresponding author: AGrishentsev@yandex.ru

### Article info

Received 12.12.18, accepted 26.03.19  
Article in Russian

**For citation:** Grishentsev A.Yu. Numerical solution of multidimensional Thomson Problem for vectors packaging on hypersphere in broadband radiocommunication problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 4, pp. 730–739 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-730-739

### Abstract

**Subject of Research.** The paper presents a method for numerical solution of the multidimensional Thomson Problem for packing signals interpreted as vectors on the hypersphere in broadband radio communication problems. **Method.** The

implementation of the numerical solution of the multidimensional Thomson Problem for the packing of hypersphere vectors in radio communication problems is carried out. The developed method of packing wideband radio signals is as follows: first, the vectors are packed on the hypersphere in accordance with the formulation of the Thomson Problem, then the resulting vectors are transformed into a spectrum and on its basis the resulting signals are obtained using the inverse Fourier transform. **Main Results.** The paper considers the mathematical apparatus of the developed method of packing vectors on the hypersphere, as well as some results of its research for convergence and stability. The paper describes the principle of the developed method implementation based on a set of vectors packed on the hypersphere and presents some research results of synthesis method for spherical packed broadband radio signals. **Practical Relevance.** Studies show that the practical significance of the developed method for spherical signal packaging lies in the possibility of increasing the transmission speed of information messages and improving the efficiency of frequency-time resource usage, for example, compared with orthogonal coding. The method for packaging wideband communication signals to hypersphere meets the demands of different consumers deciding between speed and the noise stability. The developed method provides additional design possibilities for protected communication channels by increasing the power of broadband signal ensembles with noise-like character.

#### Keywords

Thomson Problem, hypersphere, broadband radio communication, signals, vectors, spherical packing, numerical solution

## Введение

Проблема Томсона [1] заключается в определении такой конфигурации расположения  $K$  электронов на поверхности сферы единичного радиуса, чтобы потенциальная энергия системы была минимальна. Потенциальная энергия [2] системы  $K = |Q|$  зарядов  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_K\}$  определяется, как:  $W_Q = \beta \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{s=k+1}^K \frac{q_k q_s}{|\mathbf{r}_{k,s}|}$ , где  $|\mathbf{r}_{k,s}|$  — расстояние между зарядами  $q_k$  и  $q_s$ , т. е.  $\mathbf{r}_{k,s} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_s$  при  $q_k, q_s \in Q$ , в данном случае  $q_k = q_s = e$ , где  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды. Следует отметить, что для оценки энергии системы зарядов в рамках Проблемы Томсона коэффициент  $\beta = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$

обычно не используют, т. е. считают как в системе единиц измерения СГСЭ [3]. В общем виде Проблема Томсона под номером семь входит в известный список, предложенный Стивом Смейлом, не решенных математических проблем [4]. Известны частные решения Проблемы Томсона для  $|Q| \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$  [5–7]. Известно численное решение Проблемы Томсона вплоть до  $K = 470$  [8, 9]. Интересно, что к Проблеме Томсона сводятся многие практические задачи физики, химии, биологии и других областей знаний, например: формирование особых электронных структур в квадрупольных ионных ловушках (ловушках Пауля В.); расположение коллоидных включений в сферических везикулах липосом; распределение пор на пыльце и спорах; модели атомов, в частности модели фуллерена и др.

Интересным фактом является то, что в различной литературе наименование проблемы упаковки на сфере ассоциируют с различными исследователями [10]. Так, в [11] проблема упаковки на сфере (англ. *Tammes problem*) связывается с именем голландского ботаника Таммса, который в 1930 г. изучая распределение пор на цветочной пыльце, пришел к постановке этой задачи в геометрической интерпретации: максимизации минимального углового расстояния между точками, расположенными на сфере [12]. В другой литературе, например [8, 13], проблема упаковки на сфере (англ. *Thomson problem*) связывается с именем физика Джозефа Джона Томсона, который в 1904 г. предложил атомную модель, также получившую название «сливовый пудинг», и поставил задачу об определении такой конфигурации расположения электронов на поверхности единичной сферы, при которой энергия электростатического потенциала минимальна [1], т. е. рассматривал физическую сущность проблемы упаковки на сфере.

Следует отметить, что в некоторых случаях Проблема Томсона имеет несколько решений, т. е. может быть несколько устойчивых конфигураций расположения электронов на сферической поверхности, при этом значения энергии системы электронов в таких различных состояниях будут близкие, но не равные [9].

Проблема Томсона относится к большому классу задач об оптимальной упаковке. В Проблеме Томсона положение каждого электрона  $q_s \in Q$  характеризуется трехмерным радиус вектором  $\mathbf{r}_s$ , поэтому задачу об оптимальном расположении зарядов на сфере возможно интерпретировать, как задачу об упаковке нормированных трехмерных векторов нормальных к сфере единичного радиуса. При переходе от трехмерного пространства к пространствам больших мерностей Проблема Томсона трансформируется в более общую: *проблему упаковки на гипертсфере* и приобретает еще большую значимость, так как именно к частным и общим решениям такой проблемы сводятся многие теоретические и практические задачи. Значительные исследования проблемы упаковки на гипертсфере (*поверхностно-сферической упаковке*) и смежной с ней проблемы сферической упаковки (*объемно-сферической упаковке или упаковке шаров*) в приложении к задачам радиосвязи и помехоустойчивого кодирования произведены в России [14, 15] и за рубежом [11, 16, 17].

В цифровой обработке сигналов, радиотехнике и ряде других областей дискретный сигнал  $x[n]$ , образованный  $N$  отсчетами, принято интерпретировать, как вектор  $\mathbf{x}[n]$  в  $N$ -мерном евклидовом пространстве, поэтому объекты  $x[n]$  и  $\mathbf{x}[n]$  эквивалентны по своей сути. Непрерывный сигнал  $x[t]$  можно интерпретировать, как вектор  $\mathbf{x}[t]$  в гильбертовом пространстве, допускающем бесконечную размерность. При использовании  $K$  сигналов из общего алфавита (ансамбля)  $\mathbf{A} = \{x_1[n], x_2[n], \dots, x_K[n]\}$  одной из возможных и, по оценкам

признанных специалистов [18], наиболее важной постановкой задачи синтеза ансамбля сигналов является постановка, требующая *максимизации минимума расстояния в множестве A сигналов*. В геометрической интерпретации подобная постановка эквивалентна упаковке векторов таким образом, чтобы ближайшая пара векторов находилась на максимальном расстоянии. Отметим, что для вычисления расстояния между сигналами  $x_k[n], x_s[n] \in A$  используется евклидова метрика [19] пространства  $L^2$ :  $r_{k,s} = \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_k[n] - x_s[n])^2}$ . При условии, что все сигналы из алфавита **A** имеют равные энергии, т. е.  $\forall (E_k, E_s \in A) E_k = E_s$ , где  $E_k = \sum_{n=1}^N (x_k[n])^2$  и  $E_s = \sum_{n=1}^N (x_s[n])^2$ , задача об оптимальном синтезе радиосигналов сводится к проблеме упаковки векторов на гиперсфере, так называемая *поверхностно-сферическая упаковка* [11, 14], или Проблеме Томсона [1, 4]. При этом обычно полагают, что сигналы нормированы, т. е.  $\forall (E_k, E_s \in A) E_k = E_s = 1$ .

Формализовать задачу упаковки на гиперсфере нормированных  $N$ -мерных векторов (сигналов)  $\mathbf{A} = \{x_1[n], x_2[n], \dots, x_K[n]\}$  из алфавита **A** мощностью  $|\mathbf{A}| = K$  возможно следующим образом<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} x_k[n], x_s[n] \in A \\ |x_k[n]| = |x_s[n]| = 1 \\ r_{k,s} = \sqrt{\sum_{n=1}^N |x_k[n] - x_s[n]|^2} \\ \min(r_{k,s}) \rightarrow \max \end{cases}$$

С другой стороны, ту же задачу возможно формализовать через минимизацию полной потенциальной энергии системы. Определим потенциальную энергию системы сигналов, образованной всеми элементами множества  $\mathbf{A} = \{x_1[n], x_2[n], \dots, x_K[n]\}$ , как:

$$W = W\{A\} = \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{s=k+1}^K \frac{1}{r_{k,s}}, \tag{1}$$

тогда возможно записать:  $\begin{cases} \forall (x_k[n] \in A) |x_k[n]| = 1 \\ W(A) \rightarrow \min \end{cases}$ .

Далее будем помнить, что сигналы эквивалентны векторам.

Обзор литературы [11, 14–17] показывает, что имеется значительное число методов, имеющих те или иные ограничения, но позволяющих решать частные случаи задачи упаковки сфер и упаковок на сфере в  $N$ -мерном пространстве. В фундаментальной работе [11] собраны и систематизированы известные методы упаковки сфер и упаковок на сфере в  $N$ -мерном пространстве. Так, например, из [11] известен метод построения упаковки точек на сфере на основе двоичных кодов (возможно, кодов с исправлением ошибок), образованных из множества  $E_2 = \{0,1\}$ , с помощью замены 0 на  $-1$  и последующим делением на  $\sqrt{N}$ . В результате получается код с минимальным углом между точками на сфере:  $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{2d}{N}\right)$ , где  $d$  — минимальное расстояние между точками. При таком подходе максимальное число точек в  $N$ -мерном пространстве ограничено величиной  $2^N$ . Кроме того, получаемые коды не всегда являются оптимальными, так, например, для  $N = 3$  и при числе точек 8 получим упаковку в конфигурации с точками в вершинах трехмерного куба, при этом оптимальной упаковкой является расположение точек в вершинах квадратной антипризмы. Другим известным методом [11] упаковки на сфере является метод, использующий готовую упаковку шаров, из которой берется одна *оболочка* вокруг некоторой заранее определенной точки. Данный метод имеет известные ограничения, присущие упаковке шаров — не решенной в общем виде проблеме.

Поверхность гиперсферы в  $N$ -мерном пространстве имеет мерность  $N - 1$ , поэтому упаковку на гиперсфере в  $N$ -мерном пространстве возможно интерпретировать, как упаковку гиперсфер в определенной части  $(N - 1)$ -мерного пространства. В работе [11] приводится способствующий пониманию пример с (*гипер*) *сферическими шапочками* с центрами в точках расположенными на гиперсфере, и соответствующих коду, упакованному на гиперсфере.

Отсутствие обобщенного численного решения задачи поверхностной упаковки на гиперсфере в пространстве произвольной мерности  $N$  и для произвольного числа сигналов  $K$  определяет актуальность исследований, публикуемых в данной работе.

**Цель:** разработка численного метода оптимальной поверхностной упаковки произвольного числа комплекснозначных сигналов  $K$  на гиперсфере в пространстве произвольной мерности  $N$ .

<sup>1</sup> Необходимо учитывать, что для некоторых значений  $K$  — числа векторов и  $N$  — мерности пространства будет несколько устойчивых конфигураций, т. е. несколько различных конфигураций, которые являются решением задачи об упаковке с близкими, но отличающимися величинами энергиями системы векторов.

Достижение цели сопряжено с решением следующих **задач**:

- разработка стратегии синтеза и уплотнения сигналов;
- разработка и анализ численного решения многомерной Проблемы Томсона оптимальной упаковки векторов на гиперсфере единичного радиуса;
- разработка и исследование метода синтеза сигналов на базе оптимально упакованных векторов на гиперсфере единичного радиуса;
- комплексный анализ результатов исследования.

**Практический результат:** повышение скорости обмена радиосообщениями за счет оптимальной упаковки и уплотнения радиосигналов на гиперсфере единичного радиуса; при оптимальной упаковке и возможности выбора мощности сигнального алфавита удовлетворение требований к синтезируемым сигналам различных потребителей, отдающих предпочтение скорости перед помехоустойчивостью или помехоустойчивости перед скоростью передачи информационных сообщений.

### Метод численного решения задачи упаковки векторов на гиперсфере

Предлагается численное итерационное решение упаковки нормированных сигналов (радиус векторов)  $\{x_1[n], x_2[n], \dots, x_K[n]\}$  из множества **A** на гиперсфере в  $N$ -мерном пространстве.

Пусть имеется множество нормированных сигналов  $\{x_1^u[n], x_2^u[n], \dots, x_K^u[n]\}$  в  $N$ -мерном пространстве [20], здесь  $u$  — номер итерации в численном решении задачи упаковки векторов. По порядку, начиная с номера 1 до  $K$ , будем корректировать положение каждого вектора  $x_k^u[n] \in \mathbf{A}$  в пространстве в соответствии с выражением:

$$\begin{cases} y_k^{u+1}[n] = x_k^u[n] + \mu F_k^u[n] \\ x_k^{u+1}[n] = \frac{y_k^{u+1}[n]}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (y_k^{u+1}[n])^2}} \end{cases}, \quad (2)$$

где  $\mu F_k^u[n]$  — сигнал смещения, который также можно назвать вектор смещения  $x_k^u[n]$  на  $u + 1$  шаге итерации;  $\mu$  — коэффициент пропорциональности сигнала (вектора) силы отталкивания  $F_k^u[n]$  и сигнала (вектора) смещения; здесь и далее положим, что  $\mu = 1$ , коэффициент  $\mu$  необходим для физической связности изложения и выражения вектора смещения через силу. После каждого смещения сигнала  $x_k^u[n]$  образуется смещенный сигнал  $y_k^{u+1}[n]$ , который может утрачивать качество нормировки  $|x_k^u[n]| = 1$ , поэтому необходимо повторно производить нормировку  $x_k^{u+1}[n] = \frac{y_k^{u+1}[n]}{|y_k^{u+1}[n]|}$ , что и записано в выражении (2).

Вычисление  $F_k^u[n]$  предлагается производить на основе выражения для эквивалентного кулоновского взаимодействия:

$$F_k^u[n] = \sum_{s=1, s \neq k}^K g \frac{r_{k,s}^u[n]}{|r_{k,s}^u[n]| \left( |r_{k,s}^u[n]| \right)^2}. \quad (3)$$

В выражении (3)

$$\begin{cases} r_{k,s}^u[n] = x_k^u[n] - x_s^u[n], s \neq k, s = 1 \dots K \\ |r_{k,s}^u[n]| = \sqrt{\sum_{n=1}^N (r_{k,s}^u[n])^2} \end{cases},$$

где  $r_{k,s}^u[n]$  — разностный сигнал (вектор),  $|r_{k,s}^u[n]|$  — скаляр, эквивалент длины вектора  $r_{k,s}^u[n]$ ;  $g$  — коэффициент пропорциональности, определяет сходимость и скорость сходимости итерационного процесса (2). Практические исследования показали возможность вычисления сигнала (силы) отталкивания  $F_k^u[n]$  с помощью других, альтернативных, выражений, например:

$$F_k^u[n] = \sum_{s=1, s \neq k}^K a \frac{r_{k,s}^u[n]}{|r_{k,s}^u[n]|} \frac{\exp\left(-\left(|r_{k,s}^u[n]|\right)^2\right)}{|r_{k,s}^u[n]|}, \quad (4)$$

где  $a$  — коэффициент пропорциональности, также как и  $g$  в (3), определяющей сходимость и скорость сходимости итерационного процесса. Возможны и другие способы вычисления сигнала отталкивания  $F_k^u[n]$ . Исследования показали, что относительно хорошие результаты сходимости позволяют получить применение выражения (3), по форме эквивалентное закону Кулона, для расчета сил взаимного отталкивания конечных точек векторов, расположенных на поверхности гиперсферы в  $N$ -мерном пространстве. Применение выражения (3) для решения задачи поверхностно-сферической упаковки позволит обоснованно связывать предлагаемый метод с Проблемой Томсона  $N$ -мерном пространстве.

Физическая сущность предлагаемого метода упаковки сигналов (векторов) заключается в следующем. Последовательно для каждого сигнала  $x_k^u[n]$  из исходного множества  $A^u = \{x_1^u[n], x_2^u[n], \dots, x_K^u[n]\}$ , вычисляется сигнал (сила) отталкивания  $F_k^u$ , пропорциональная сигналу смещения  $\mu F_k^u$ , действующая на выбранный вектор  $x_k^u[n]$  со стороны всех прочих векторов  $x_s^u[n], s \neq k, s = 1 \dots K$ . Далее производится смещение вектора  $x_k^u[n]$  на величину  $\mu F_k^u$  и нормирование полученного вектора  $y_k^{u+1}[n]$ , в результате образуется вектор  $x_k^{u+1}[n]$ , который замещает в множестве  $A$  вектор  $x_k^u[n]$ , таким образом перебираются все векторы из множества  $A$ , в результате чего образуется итерационная последовательность множеств  $A^{u+1} = M\{A^u\}$ , где  $M$  — цикл итерационных преобразований всех элементов множества  $A^u$ . В ходе итерационного процесса каждый вектор постепенно смещается, образуя такую совокупную конфигурацию, что потенциальная энергия всей системы (1) стремится к минимуму.

### Сходимость и устойчивость итерационного процесса

Наличие конфигураций расположения векторов  $A$ , для которых значение потенциальной энергии  $W\{A\}$  минимально, является известным и доказанным фактом [1, 8]. Приведем не строгое доказательство того, что предлагаемый метод сходится к этим конфигурационным решениям, а также исследуем некоторые особенности сходимости.

На изображении (рис. 1) приведен пример: в зависимости от значений коэффициента  $g$  (3) итерационный процесс (2) может сходиться или расходиться, также сходимость зависит от  $a$  при использовании (4) для вычисления  $F_k^u[n]$ .

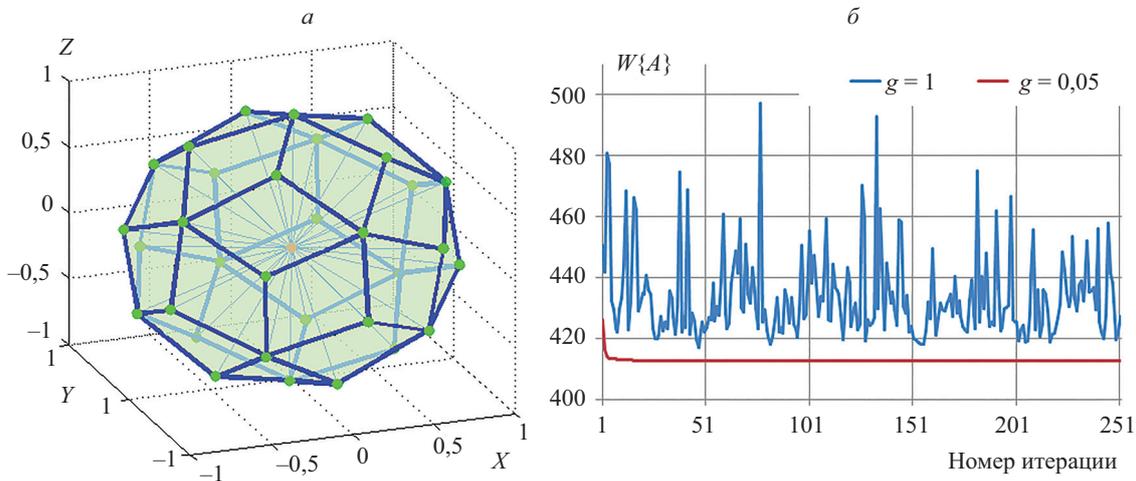


Рис. 1. Конфигурация 32 векторов множества  $A$  в трехмерном пространстве (а), для различных величин коэффициента  $g$  наблюдается  $g = 0,05$  — сходимость и  $g = 1$  — расходимость (б)

Исследуем смещение при многократном итерировании одного-единственного вектора  $x_k^u[n]$  и стационарном состоянии всех остальных  $x_s^u[n], s \neq k, s = 1 \dots K$ . Частный случай для  $K = 4$  в трехмерном пространстве приведен на изображении (рис. 2).

Сложение векторов сил, выполняемое в соответствии с выражением (3), порождает такой суммарный вектор смещения  $\mu F_k^u$ , который определяет направление движения итерированного вектора  $x_k^u[n]$  в сторону, соответствующую действию суммарной силы  $F_k^u[n]$  на  $x_k^u[n]$  со стороны  $x_s^u[n], s \neq k, s = 1 \dots K$ . В связи с тем, что сила  $F_k^u[n]$  имеет нелинейную зависимость от расстояния между векторами, суммарный вектор смещения  $\mu F_k^u$  будет изменять свое направление в зависимости от изменения положения вектора  $x_k^u[n]$  при итерировании.

В результате итерирования отдельного вектора  $x_k^u[n]$  его положение сходится к некоторой точке  $\lim_{v \rightarrow \infty} x_k^{u+v}[n] = \theta$ , в которой действие всех сил отталкивания уравновешенно друг другом. Назовем такую точку потенциальной ямой. Причем в результате замкнутости сферы (гиперсферы) такая точка  $\theta$  обязательно найдется, точка  $\theta$  может быть не единственной, если таких точек несколько, то между ними существует потенциальный барьер. В результате выполнения итерационного процесса  $A^{u+1} = M\{A^u\}$  каждый вектор  $x_s^u[n]$  стремится занять свою потенциальную яму  $\theta_k$ . Чем ближе отдельно взятый вектор  $x_s^u[n]$  к потенциальной яме  $\theta_k$ , тем более действие сил отталкивания от других векторов компенсируется друг другом, что означает  $\lim_{v \rightarrow \infty} x_k^{u+v}[n] = \theta_k \leftrightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} F_k^{u+v} = 0$ . Таким образом, выполняется условие  $|\mu F_k^{u+1}| < |\mu F_k^u|$  для всех  $u$  больших некоторой величины, следовательно, возможно записать  $\lim_{u \rightarrow \infty} \left| \frac{F_k^{u+1}}{F_k^u} \right| < 1$ , а значит, последовательность  $F_k^u[n]$

является абсолютно сходящейся по признаку Даламбера [21], из чего, учитывая доказанность факта наличия конфигураций расположения векторов  $\mathbf{A}$ , для которых значение потенциальной энергии  $W\{\mathbf{A}\}$  минимально, возможно сделать вывод о сходимости исследуемого итерационного процесса (2).

Следует отметить, что добавление в общий родительский итеративный процесс  $\mathbf{A}^{u+1} = M\{\mathbf{A}^u\}$  многократного итерирования каждого отдельного вектора позволяет существенно повысить скорость сходимости родительского итерационного процесса. Практические исследования показывают, что итерирование отдельных векторов достаточно производить 3–5 раз.

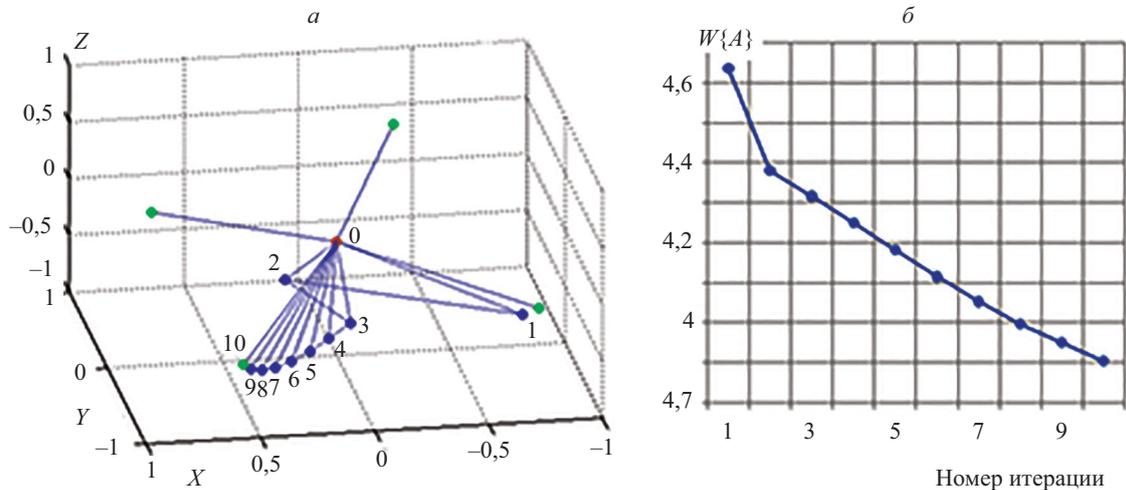


Рис. 2. Движение итерируемого сигнала (вектора)  $x_k^u[n]$  для точек итерации  $x_k^{u+1}[n], \dots, x_k^{u+10}[n]$ , заметно, что движение происходит не в одной плоскости, цифрами от 1 до 10 обозначены точки положения итерируемого вектора, 0 — центр системы координат (а); изменение энергии  $W\{\mathbf{A}\}$  в зависимости от итерации (б)

Коэффициент  $g$  масштабирует значение силы  $F_k^u[n]$  и вектора смещения  $\mu F_k^u[n]$  при малых значениях  $g$ , смещения вектора  $x_k^u[n]$  относительно небольшие, с повышением величины  $g$ , смещения увеличиваются, возникает вероятность удаления от точки равновесия  $\theta_k$  в потенциальной яме  $\Theta_k$ , и даже перехода (перепрыгивания) в область другой потенциальной ямы  $\Theta_p, p \neq k$  вместо приближения к точке равновесия  $\theta_k$ , и вместе с тем повышается вероятность потери устойчивости итерационного процесса. Сказанное относится и к коэффициенту  $a$  из (4). На изображении (рис. 1, б) дан пример потери устойчивости при  $g = 1$  и устойчивость при  $g = 0,05$ .

Строгое определение значений коэффициентов  $g$  и  $a$ , обеспечивающих устойчивость и сходимость итерационного процесса, связано с решением Проблемы Томсона в  $N$ -мерном пространстве в общем виде, поэтому в настоящее время могут быть выработаны лишь некоторые эмпирические оценки  $g$  и  $a$  рекомендательного характера. Пусть в  $N$ -мерном пространстве задана гиперсфера единичного радиуса, произведем разделение гиперсферы на  $K$  областей  $\Theta_k, k = 1 \dots K$ , причем в центре каждой области  $\Theta_k$  расположена потенциальная яма  $\theta_k$ . Тогда оценка диаметра упаковки  $d$  области  $\Theta_k, k = 1 \dots K$  может способствовать ограничению вектора смещения  $\mu F_k^u[n]$  и определению значений коэффициентов  $g$  и  $a$ , обеспечивающих устойчивость и сходимость итерационного процесса. Диаметр упаковки  $d$  — есть минимальная дистанция между различными ближайшими векторами.

### Синтез широкополосных сигналов

Все ортонормированные векторы равноудалены, и евклидово расстояние между ними  $r_{k,s}^{ort} = \sqrt{2}, k \neq s; k, s = 1 \dots K$ . Евклидово расстояние  $r_{k,s}^{ort} = \sqrt{2}$  возможно оценить, как значительное, такое расстояние обеспечивает достаточно высокую помехоустойчивость при ортогональном кодировании. Цена, которую приходится платить при использовании алфавитов на базе ортогональных символов: относительно невысокая скорость передачи сообщений. В соответствии с теоремой Котельникова–Шенона [22] возможно записать выражение для оценки максимальной пропускной способности канала связи при использовании квадратурного разделения:  $I = 2FT \log(SNR + 1)$ , где  $F$  и  $T$  — занимаемая полоса частот и время для передачи информационного сообщения  $I$ ,  $SNR$  — отношение мощности сигнала к мощности шума. Произведение  $2FT$  определяет частотно-временной ресурс, занимаемый информационным сообщением, и число ортогональных сигналов, которые возможно разместить в этом ресурсе, т. е. в ресурсе  $2FT$  возможно разместить  $2FT$  ортогональных сигналов. Рассмотрим случай использования множества ортогональных сигнальных символов  $S = \{s_1[m], s_2[m], \dots, s_K[m]\}$ , где  $m = 1 \dots M$  — номер отсчета в ограниченном ресурсе частота–время  $FT$  для передачи информационного сообщения за время  $T$ . Мощность алфавита  $S$  будет  $|S| = 2FT = K$ , предельная скорость передачи

информации при помощи алфавита  $S$  будет:  $\frac{\log|S|}{T} = \frac{\log|2FT|}{T}$ , при этом предельная скорость в соответствии с теоремой Котельникова–Шенона:  $2F\log(SNR + 1)$ . Положим, что  $SNR = 1$  тогда  $\log(SNR + 1) = 1$ , тогда для достижения предельной скорости в соответствии с теоремой Котельникова–Шенона необходимо иметь алфавит мощностью  $K = 2^{2FT}$ . Отношение скорости при ортогональном кодировании к предельной скорости в соответствии с теоремой Котельникова–Шенона имеет величину  $\frac{\log|2FT|}{2FT}$ .

Таким образом, возникает задача более эффективного использования ресурса частота–время. Возникает необходимость разработки методов синтеза алфавитов сигнальных сообщений с различными минимальными межсимвольными расстояниями, способными удовлетворить требования различных потребителей при оптимальной упаковке, отдающих предпочтение скорости перед помехоустойчивостью или помехоустойчивости перед скоростью передачи информационных сообщений.

В работах [23, 24] предложен и исследован метод синтеза отдельных сигнальных широкополосных символов (СШС) и алфавитов ортогональных СШС.

Метод синтеза алфавитов ортогональных СШС основан на генерации псевдослучайных  $N$ -мерных векторов их ортогонализации методом Грама–Шмидта. Последующей трансформацией полученных ортонормированных векторов, по заранее определенным правилам, в соответствующие частотные спектры, которые являются образами искомым ортонормированных широкополосных сигналов в частотном пространстве. Результат окончательного синтеза получается в ходе обратного преобразования Фурье и нормирования отдельных сигналов.

Предлагается использовать разработанный численный метод оптимальной упаковки нормированных векторов на гиперсфере в  $N$ -мерном пространстве для синтеза алфавитов сигнальных широкополосных символов в частотном пространстве. Преобразование Фурье является линейным унитарным преобразованием, поэтому межсимвольная дистанция в частотном пространстве будет эквивалентна межсимвольной дистанции во временном пространстве.

Отдельной задачей является синтез комплекснозначных СШС и алфавитов на их основе. В связи с тем что при мощности алфавита  $|A| = K$  большей, чем мерность пространства  $N$ , т. е.  $K > N$ , множество векторов  $\mathbf{A}$  при оптимальной упаковке не образуют эквидистантное множество, возникает разнообразие возможных вариантов комбинаций вещественной и мнимой частей при синтезе алфавитов и СШС в смысле вариативности межсимвольной дистанции.

Исследования, произведенные автором, показали, что хороший результат упаковки комплексных сигналов на гиперсфере возможно получить, используя следующий алгоритм. Сначала определяется мерность пространства  $N$ , исходя из заданного двухстороннего частотного диапазона  $F[n] \in F = \{-1Fu; -Fu\} \cup [Fu; Fu]$ ,  $n = 1 \dots N$ , в частном случае спектр может быть односторонним, а также состоящим только из синфазных или только квадратурных компонент. Далее в  $N$ -мерном пространстве итеративно производится сферическая упаковка  $K$  векторов  $\mathbf{A} = \{x_1[n], x_2[n], \dots, x_K[n]\}$ , ограничение итерационного процесса производится по заданному числу итераций или невязке. Далее полученные упакованные векторы используются для синтеза спектра  $K$  сигналов. В случае только вещественного (или только мнимого) спектра достаточно произвести подстановку соответствующих  $n$ -ых отсчетов  $k$ -ых векторов в  $n$ -ые отсчеты спектра  $k$ -ых сигналов  $F_k[n] = x_k[n]$ , возможно использовать другое правило  $l = h(n)$ ,  $l = 1 \dots N$ , взаимно-однозначно связывающее  $n$ -ые отсчеты  $k$ -ых векторов  $x_k[n]$  с  $n$ -ыми отсчетами спектра  $k$ -ых сигналов  $F_k[n]$ , т. е.  $F_k[h(n)] = x_k[n]$ , что не меняет сути вопроса, но позволяет производить синтез различных сигналов, упакованных на сфере на базе одного комплекта упакованных векторов  $\mathbf{A}$ , что может быть полезно в задачах проектирования защищенных каналов связи [25]. В случае, если спектр  $F$  является комплексным [26], то предлагается использовать следующий принцип трансформации элементов множества  $\mathbf{A}$  в спектры  $F_k$ . Сначала необходимо вычислить все возможные квадраты евклидовой дистанции  $r_{k,s}^2 = \sum_{n=1}^N |x_k[n] - x_s[n]|^2$  между всеми векторами множества  $\mathbf{A}$ , причем в силу наличия противоположных символов при условии, что  $r_{k,s}^2 > 2$ , принимаем, что  $r_{k,s}^2 = 4 - r_{k,s}^2$ . В общем виде запишем:

$$\begin{cases} r_{k,s}^2 = \sum_{n=1}^N |x_k[n] - x_s[n]|^2, & k, s = 1 \dots K, k \neq s \\ \forall (r_{k,s}^2 > 2) r_{k,s}^2 = 4 - r_{k,s}^2 \end{cases} \quad (5)$$

Далее для каждого значения  $k$  выбираем минимальное значение дистанции  $d_k = \min(r_{k,s}^2)$ . Полученный вектор  $d_k$  сортируем по порядку возрастания значений и получаем вектор  $\alpha_k$  и по порядку убывания и получаем вектор  $\beta_k$ . Далее формируем спектры  $k$ -ых сигналов  $F_k[n]$ , так что:

$$F_k[n] = x_{k(\alpha_k)}[n] + x_{k(\beta_k)}[N - n + 1] \quad (6)$$

Таким образом, учитывая что  $r_{k,s}^2 = \sum_{n=1}^N |F_k[n] - F_s[n]|^2 = \text{Re}^2(z_{k,s}) + \text{Im}^2(z_{k,s})$ , где  $z_{k,s} = F_k[n] - F_s[n]$ , получим спектры  $F_k[n]$ , причем убывание минимального расстояния по вещественной составляющей  $\text{Re}^2(z_{k,s})$  означает

возрастание минимального расстояния по мнимой  $\text{Im}^2(z_{k,s})$  составляющей. Дополнительной операцией, как показали эксперименты, способствующей выравниванию дистанций и максимизации минимальной дистанции, является разворот (обратный порядок) отсчетов мнимой части (6), что записано, как  $x_{k(\beta_k)}[N - n + 1]$ .

Следует отметить, что автором были произведены исследования непосредственной упаковки комплексных векторов на гиперсфере по методу (2). Но результаты синтеза оказались хуже, чем при синтезе спектра сигналов по методу (6).

В случае, если необходимо использовать только не противоположные СШС, достаточно после упаковки (2) из всех возможных пар  $x_k[n]$  и  $x_s[n]$  для  $x_k[n], x_s[n] \in A$ , дистанции между которыми  $r_{k,s}^2 < d^2$  по (5), где  $d$  — диаметр упаковки, удалить один из векторов:  $x_k[n]$  и  $x_s[n]$ . Оставшиеся векторы образуют не противоположное множество.

Программную реализацию MATLAB изложенного метода упаковки сигналов (векторов) на гиперсфере и синтеза сигналов на базе упакованных векторов, можно найти по ссылке: <https://yadi.sk/d/tlp5LEyFMnoAeg>.

### Оценка минимальной межсимвольной дистанции при максимальной информационной плотности алфавита сообщений

Отдельной задачей, решение которой возможно на основании предложенных методов, является определение минимальной межсимвольной дистанции при сферической упаковке СШС и числе символов  $K = 2^{2FT}$ , обеспечивающих максимальную скорость передачи сообщений при условии, что  $\log(\text{SNR} + 1) = 1$ . В таблице содержатся некоторые характеристики сферической упаковки СШС; применены следующие обозначения:  $N = 2FT$  — мерность пространства;  $F$  — ширина одностороннего спектра СШС;  $T$  — период СШС;  $K$  — мощность алфавита СШС;  $d$  — диаметр упаковки;  $d'$  — альтернативный диаметр упаковки (если вычислен);  $W$  — потенциальная энергия упаковки;  $\xi$  — диаметр упаковки получен в результате моделирования, как расстояние между ближайшими символами.

Таблица. Некоторые характеристики сферической упаковки СШС

$N$	$F$	$T$	$K$	$d$	$d'$	$W$	$\xi(N)$
1	0,5	1	2	2,0000	—	0,5	1,93
2	1,0	1	4	1,4142	—	3,83	1,4510
3	1,5	1	8	1,1712	—	19,67	1,2288
4	2,0	1	16	1,0608	—	87,78	1,0921
5	2,5	1	32	1,0514	—	368,79	0,9966
6	3,0	1	64	0,9086	0,8970	1507,70	0,9248
7	3,5	1	128	0,8564	0,8618	6075,58	0,8682
8	4,0	1	256	0,8158	—	24321,59	0,8219
9	4,5	1	512	0,7889	—	97079,92	0,7831
10	5,0	1	1024	0,7505	—	387071,59	0,7500

На основании рассчитанных характеристик была построена аппроксимационная модель зависимости диаметра упаковки от мерности пространства:  $\xi(N) = 1,982N^{-0,41}$ , величина достоверности аппроксимации  $\Delta^2 = 0,989$  (рис. 3).

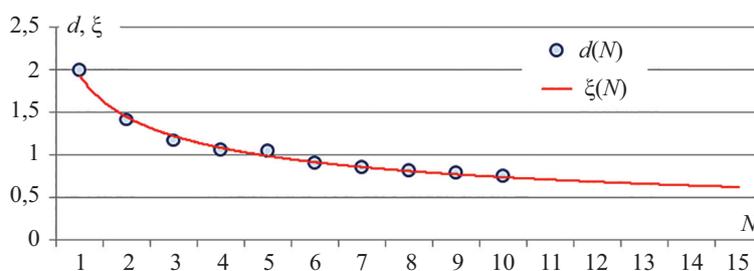


Рис. 3. Численный расчет и аппроксимация диаметра упаковки от мерности пространства

## Заключение

Произведена разработка:

- численного решения Проблемы Томсона в  $N$ -мерном пространстве;
- метода сферической упаковки комплекснозначных сигналов в задачах радиосвязи на основе численного решения Проблемы Томсона в  $N$ -мерном пространстве.

Выполнен расчет оценки минимальной межсимвольной дистанции при максимальной информационной плотности алфавита сообщений.

Исследования показывают, что практическая значимость разработанного метода для сферической упаковки сигналов заключается в возможности существенного повышения скорости передачи информационных сообщений и помехоустойчивости при одновременном повышении эффективности использования ресурса частота–время, например, по сравнению с ортогональным кодированием. Разработанный метод предоставляет дополнительные возможности проектирования защищенных каналов связи за счет увеличения мощности ансамблей широкополосных сигналов имеющих шумоподобный характер.

Разработанный метод численного решения Проблемы Томсона в  $N$ -мерном пространстве представлен в открытом доступе в виде отдельной функции MATLAB и может быть использован в различных приложениях, требующих решения задачи поверхностно-сферической упаковки.

## Литература

1. Thomson J.J. On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; With application of the results to the theory of atomic structure // *Philosophical Magazine. Series 6*. 1904. V. 7. N 39. P. 237–265. doi: 10.1080/14786440409463107
2. Фаддеев М.А., Чупрунов Е.В. Лекции по атомной физике. М.: Издательство физико-математической литературы, 2008. 612 с.
3. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1964. 848 с.
4. Smale S. Mathematical problems for the next century // *Mathematical Intelligencer*. 1998. V. 20. N 2. P. 7–15. doi: 10.1007/BF03025291
5. Andreev N.N. An extremal property of the icosahedrons // *East J. Approximation*. 1996. V. 2 (4). P. 459–462.
6. Föpl L. Stabile anordnungen von elektronen im atom // *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*. 1912. V. 141. P. 251–301. doi: 10.1515/crll.1912.141.251
7. Schwartz R.E. The five-electron case of Thomson's problem // *Experimental Mathematics*. 2013. V. 22. N 2. P. 157–186.
8. LaFave J.T. Correspondences between the classical electrostatic thomson problem and atomic electronic structure // *Journal of Electrostatics*. 2013. V. 71. N 6. P. 1029–1035. doi: 10.1016/J.ELSTAT.2013.10.001
9. Brown K. Min-energy configurations of electrons on a sphere [Электронный ресурс]. URL: <https://www.mathpages.com/home/kmath005/kmath005.htm> (дата обращения: 19.04.2019).
10. Batagelj V., Plestenjak B. Optimal arrangements of  $n$  points on a sphere and in a circle // *Proc. 6<sup>th</sup> Int. Symposium on Operational Research. Slovenia*. 2001. 38 p.
11. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. В 2-х томах. Т. 1. М.: Мир, 1990. 415 с.
12. Tammes P.M.L. On the origin of number and arrangement of the places of exit on pollen grains // *Recueil des travaux botaniques neerlandais*. 1930. V. 27. P. 1–84.
13. Altschuler E.L., Williams T.J., Ratner E.R., Tipton R., Stong R., Dowla F., Wooten F. Possible global minimum lattice configurations for thomson's problem of charges on a sphere // *Physical Review Letters*. 1997. V. 78. N 14. P. 2681–2685. doi: 10.1103/PHYSREVLETT.78.2681
14. Зюко А.Г., Фалько А.И., Панфилов И.П., Банкет В.Л., Ивашенко П.В. Помехоустойчивость систем передачи информации. М.: Радио и связь, 1985. 272 с.
15. Ветчинкин Н.М. Упаковка равных и мерных шаров, построенные по кодам, исправляющим ошибки // *Ученые записки Ивановского гос. университета*, 1974. № 89. С. 87–91.
16. Cooper J.R., Nettleton R.W. A spread-spectrum technique for high-capacity mobile communications // *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 1978. V. 27. N 4. P. 264–279. doi: 10.1109/t-vt.1978.23758

## References

1. Thomson J.J. On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; With application of the results to the theory of atomic structure // *Philosophical Magazine, Series 6*, 1904, vol. 7, no. 39, pp. 237–265. doi: 10.1080/14786440409463107
2. Faddeev M.A., Chuprunov E.V. *Lectures on Atomic Physics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 612 p. (in Russian)
3. Yavorskii B.M., Detlaf A.A. *Handbook of Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1964, 848 p. (in Russian)
4. Smale S. Mathematical problems for the next century. *Mathematical Intelligencer*, 1998, vol. 20, no. 2, pp. 7–15. doi: 10.1007/BF03025291
5. Andreev N.N. An extremal property of the icosahedrons. *East J. Approximation*, 1996, vol. 2, pp. 459–462.
6. Föpl L. Stabile anordnungen von elektronen im atom. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, 1912, vol. 141, pp. 251–301. doi: 10.1515/crll.1912.141.251
7. Schwartz R.E. The five-electron case of Thomson's problem. *Experimental Mathematics*, 2013, vol. 22, no. 2, pp. 157–186.
8. LaFave J.T. Correspondences between the classical electrostatic thomson problem and atomic electronic structure. *Journal of Electrostatics*, 2013, vol. 71, no. 6, pp. 1029–1035. doi: 10.1016/J.ELSTAT.2013.10.001
9. Brown K. Min-energy configurations of electrons on a sphere. Available at: <https://www.mathpages.com/home/kmath005/kmath005.htm> (accessed: 19.04.2019).
10. Batagelj V., Plestenjak B. Optimal arrangements of  $n$  points on a sphere and in a circle. *Proc. 6<sup>th</sup> Int. Symposium on Operational Research. Slovenia*, 2001, 38 p.
11. Conway J.H., Sloane N.J.A. *Sphere Packing, Lattices and Groups*. Springer, 1988.
12. Tammes P.M.L. On the origin of number and arrangement of the places of exit on pollen grains. *Recueil des travaux botaniques neerlandais*, 1930, vol. 27, pp. 1–84.
13. Altschuler E.L., Williams T.J., Ratner E.R., Tipton R., Stong R., Dowla F., Wooten F. Possible global minimum lattice configurations for thomson's problem of charges on a sphere. *Physical Review Letters*, 1997, vol. 78, no. 14, pp. 2681–2685. doi: 10.1103/PHYSREVLETT.78.2681
14. Zyuko A.G., Fal'ko A.I., Panfilov I.P., Banket V.L., Ivashchenko P.V. *Noise Resistance of Information Transmission Systems*. Moscow, Radio i Svyaz' Publ., 1985, 272 p. (in Russian)
15. Vetchinkin N.M. Packing equal and dimensional balls, built on error correction codes. *Uchenye Zapiski Ivanovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 1974, no. 89, pp. 87–91. (in Russian)
16. Cooper J.R., Nettleton R.W. A spread-spectrum technique for high-capacity mobile communications. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1978, vol. 27, no. 4, pp. 264–279. doi: 10.1109/t-vt.1978.23758

17. Mazo J.E. Some theoretical observations on spread-spectrum communications // *Bell System Technical Journal*. 1979. V. 58. N 9. P. 2013–2023. doi: 10.1002/j.1538-7305.1979.tb02984.x
18. Ипатов В.П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007. 487 с.
19. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 176 с.
20. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005. 584 с.
21. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 ч. Часть I. 5-е изд. М.: Наука, Физматлит, 1998. 616 с.
22. Клюев Н.И. Информационные основы передачи сообщений. М.: Советское радио, 1966. 360 с.
23. Гришенцев А.Ю. Способ синтеза и применение шумоподобных широкополосных сигналов в задачах организации защищенных каналов связи // *Радиотехника*. 2017. № 9. С. 91–101.
24. Гришенцев А.Ю. Метод синтеза алфавитов ортогональных сигнальных широкополосных сообщений // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2018. Т. 18. № 6. С. 1074–1083. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1074-1083
25. Гришенцев А. Ю., Арустамов С. А., Коробейников А. Г., Козин О. В. Защита канала широкополосной связи с применением ортогональных шумоподобных сигнальных символов // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2019. Т. 19. № 2. С. 280–291. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-280-291
26. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.
17. Mazo J.E. Some theoretical observations on spread-spectrum communications. *Bell System Technical Journal*, 1979, vol. 58, no. 9, pp. 2013–2023. doi: 10.1002/j.1538-7305.1979.tb02984.x
18. Ipatov V.P. *Broadband Systems and Code Division of Signals. Principles and Applications*. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2007, 487 p. (in Russian)
19. Taimanov I.A. *Lectures on Differential Geometry*. Izhevsk, Institute of Computer Researches, 2002, 176 p. (in Russian)
20. Novikov S.P., Taimanov I.A. *Modern Geometric Structures and Fields*. Moscow, MTsNMO Publ., 2005, 584 p. (in Russian)
21. Ilyin V.A., Poznyak E.G. *Basics of Mathematical Analysis*. Part 1. 5th ed. Moscow, Nauka Publ., Fizmatlit Publ., 1998, 616 p. (in Russian)
22. Klyuev N.I. *Informational Basics of Message Transferring*. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1966, 360 p. (in Russian)
23. Grishentsev A.Yu. On the method of synthesis and application of broadband noise-like signals in the task organization of protected communication channels. *Radioengineering*, 2017, no. 9, pp. 91–101. (in Russian)
24. Grishentsev A.Yu. Synthesis method for alphabets of orthogonal signaling broadband communications. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 6, pp. 1074–1083 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1074-1083
25. Grishentsev A.Yu., Arustamov S.A., Korobeynikov A.G., Kozin O.V. Orthogonal noise-like signal symbols for broadband channel protection. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 280–291 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-280-291
26. Privalov I.I. *Introduction to the Theory of a Complex Variable Functions*. Moscow, Nauka Publ., 1967, 444 p. (in Russian)

#### Автор

**Гришенцев Алексей Юрьевич** — доктор технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 56321138400, ORCID ID: 0000-0003-1373-0670, AGrishentsev@yandex.ru

#### Author

**Alexey Yu. Grishentsev** — D.Sc., Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 56321138400, ORCID ID: 0000-0003-1373-0670, AGrishentsev@yandex.ru