

УДК 681.51

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-6-1041-1048

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЕМ ШАРА НА ПОВОРОТНОЙ ПЛАТФОРМЕ

Д.Е. Коновалов, К.А. Зименко, А.А. Маргун, А.С. Кремлев, Д. Добриборщ

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: d.e.konvalov@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 28.08.19, принята к печати 30.09.19
Язык статьи — русский

Ссылка для цитирования: Коновалов Д.Е., Зименко К.А., Маргун А.А., Кремлев А.С., Добриборщ Д. Синтез робастного динамического регулятора для управления положением шара на поворотной платформе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 6. С. 1041–1048. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-6-1041-1048

Аннотация

Предмет исследования. Предложен метод синтеза динамического регулятора для робота с параллельной кинематической схемой на примере решения задачи стабилизации положения шара, расположенного на поворотной платформе с двумя степенями свободы. Предполагается, что углы поворота платформы ограничены некоторым диапазоном. **Метод.** Предложенный метод основан на приведении рассматриваемой нелинейной системы к виду однородного дифференциального включения. Так как исследуемый объект управления описывается непрерывной и неоднородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенный метод основан на использовании процедуры однородного расширения. Дифференциальное включение, полученное с помощью процедуры однородного расширения, является однородным с отрицательной степенью, что обеспечивает финитную устойчивость замкнутой системы. **Основные результаты.** Полученный динамический регулятор робастен и позволяет компенсировать нелинейные возмущения определенного класса. Проведенное компьютерное моделирование подтвердило эффективность предложенного подхода. Несмотря на нелинейность исследуемой системы и полученного закона управления, предложенный динамический регулятор прост в настройке, так как его параметры рассчитываются на основе решения линейных матричных неравенств. **Практическая значимость.** Предложенный в работе регулятор предназначен для роботов с параллельной кинематической схемой, которые широко используются, например, в станкостроении, авиасимуляторах. Разработанный регулятор обеспечивает робастные свойства необходимые на практике.

Ключевые слова

поворотная платформа, динамический регулятор, однородные системы, дифференциальные включения, робастность

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-19-01422) в Университете ИТМО.

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-6-1041-1048

ROBUST DYNAMICAL FEEDBACK DESIGN FOR BALL POSITION CONTROL ON ROTARY PLATFORM

D.E. Konvalov, K.A. Zimenko, A.A. Margun, A.S. Kremlev, D. Dobriborsci

ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: d.e.konvalov@mail.ru

Article info

Received 28.08.19, accepted 30.09.19
Article in Russian

For citation: Konvalov D.E., Zimenko K.A., Margun A.A., Kremlev A.S., Dobriborsci D. Robust dynamical feedback design for ball position control on rotary platform. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 6, pp. 1041–1048 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-6-1041-1048

Abstract

Subject of Research. The paper presents a method of dynamical control design for a robot with a parallel kinematic scheme. The stabilization problem of 2-Degree-of-Freedom Ball and Plate system is solved. It is assumed that the rotation angles of the platform are limited. **Method.** The proposed method is based on transforming the considered nonlinear system to the form of a homogeneous differential inclusion. Since the considered control object is described by a continuous and nonhomogeneous

system of ordinary differential equations, the proposed method is based on the use of a homogeneous extension. The differential inclusion obtained by the homogeneous extension method is homogeneous with a negative degree, that provides the finite-time stability of the closed-loop system. **Main Results.** The dynamical feedback is robust and allows compensating non-Lipschitz disturbances of a certain class. Simulation results demonstrate the efficiency of the proposed approach. Despite the fact that the considered system and the obtained control law are nonlinear, the proposed dynamical feedback has a simple tuning procedure based on the solution of linear matrix inequalities. **Practical Relevance.** The proposed method is designed for robots with parallel kinematic scheme widely used, for example, in machine tools, flight simulators. The developed algorithm provides robust properties that are necessary in practice.

Keywords

tiltable plate, dynamical feedback control, homogeneous systems, differential inclusions, robustness

Acknowledgements

This work is performed in ITMO University and supported by the Russian Science Foundation under grant No. 17-19-01422.

Введение

Роботы с параллельной кинематической схемой получили широкое распространение в технике и используются, например, в станкостроении, ортопедической хирургии, авиасимуляторах, в задачах быстрой сортировки на производстве, при позиционировании спутниковых антенн и т. д. Разработка алгоритмов управления для таких роботов является актуальной задачей при решении задач динамического манипулирования [1–5], где по сравнению с захватными устройствами возможно применение приемов толкания, кантования, качения и т. п.

В качестве стелла для апробации алгоритмов управления роботами с параллельной кинематической схемой зачастую используется поворотная платформа с расположенным на ней шаром, положением которого необходимо управлять (см., например, [1, 3, 6–8]). При синтезе алгоритмов управления для данного стелла необходимо учитывать, что в системе могут присутствовать фазовые ограничения (угол наклона платформы ограничен некоторым диапазоном) и возмущающие воздействия.

Данная статья посвящена разработке алгоритма робастной стабилизации шара на поворотной платформе в заданном положении. В отличие от подходов, где ввиду наличия ограничений на угол наклона платформы система линеаризуется в окрестности положения нуля ($\sin\theta \approx \theta$), предложенный метод основан на применении однородного расширения [9] (т. е. преобразовании непрерывной системы в виде однородного дифференциального включения) и использовании метода синтеза робастных динамических регуляторов [10]. Несмотря на то что данный подход не основан на применении линеаризации, предложенный регулятор прост в настройке: параметры регулятора рассчитываются на основе решения линейных матричных неравенств. Полученный алгоритм управления робастен и позволяет компенсировать нелипшицевые возмущения определенного класса, как, например, в [10]. Результаты компьютерного моделирования подтверждают эффективность предложенного метода.

Предварительные сведения

А. Обобщенная однородность дифференциальных включений

Однородность — это свойство, определяющее вид симметрии объекта относительно группы преобразований. Обобщенная однородность (**d**-однородность) — это тип однородности, который имеет дело с линейными преобразованиями.

Определение 1 [11], [12].

Матрица **d** называется матрицей расширения в пространстве \mathbb{R}^n ($\mathbf{d}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$), если оно удовлетворяет следующим свойствам:

— свойство группы: $\mathbf{d}(0) = \mathbf{I}_n$ и $\mathbf{d}(t + s) = \mathbf{d}(t)\mathbf{d}(s) = \mathbf{d}(s)\mathbf{d}(t)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$,

— свойство непрерывности: **d** является непрерывным отображением,

— свойство предела: $\lim_{s \rightarrow -\infty} \|\mathbf{d}(s)\mathbf{x}\| = 0$ и $\lim_{s \rightarrow +\infty} \|\mathbf{d}(s)\mathbf{x}\| = +\infty$ равномерно на единичной сфере $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$.

Матрица $\mathbf{G}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, определяемая как $\mathbf{G}_d = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{d}(s) - \mathbf{I}_n}{s}$, называется генератором группы (см., например, [13]), для которой выполняются следующие свойства:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{d}(s) = \mathbf{G}_d \mathbf{d}(s) = \mathbf{d}(s) \mathbf{G}_d,$$

$$\mathbf{d}(s) = e^{\mathbf{G}_d s} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{s^i \mathbf{G}_d^i}{i!},$$

где $s \in \mathbb{R}$, \mathbf{I}_n — единичная матрица размерностью n .

Определение 2 [14], [15].

Канонической однородной нормой называется непрерывная положительно определенная функция $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ вида $\|\mathbf{x}\|_d = e^{s_x}$, где $s_x \in \mathbb{R}$ такое, что $\|\mathbf{d}(-s_x)\mathbf{x}\| = 1$.

Определение 3 [11], [12].

Многозначное отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется \mathbf{d} — однородным степени $m \in \mathbb{R}$, если для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется алгебраическое свойство

$$F(\mathbf{d}(s)\mathbf{x}) = e^{ms}\mathbf{d}(s)F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Система

$$\dot{\mathbf{x}} \in F(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где многозначное отображение F удовлетворяет стандартным условиям, является \mathbf{d} — однородной степени m , если F однородно степени m .

Следующий результат связывает свойство однородности с финитной устойчивостью системы вида (1).

Утверждение 1 [16].

Пусть F будет \mathbf{d} — однородным многозначным отображением со степенью $m < 0$, удовлетворяющим стандартным условиям. Предположим также, что система (1) сильно глобально асимптотически устойчива (глобальная устойчивость всех решений дифференциального включения). Тогда система (1) финитно глобально устойчива, а функция времени установления непрерывна в нуле и локально ограничена.

Отметим, что дифференциальные включения могут быть использованы не только для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. В ряде случаев для анализа устойчивости и синтеза управления неоднородных непрерывных систем вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad f(0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где f — локально ограниченная функция, более эффективно представлять систему в виде (1) с однородным дифференциальным включением F , используя однородное расширение (см., например, [9]) в виде:

$$F(\mathbf{x}) = \{e^{-vs}\mathbf{d}(-s)f(\mathbf{d}(s)\mathbf{x}), \forall s \in \mathbb{R}\}. \tag{2}$$

Б. Стабилизация с помощью динамического регулятора

Рассмотрим систему

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \in G(\boldsymbol{\sigma}, u) + \boldsymbol{\omega}(t, \boldsymbol{\sigma}, u), \tag{3}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — переменная времени, $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ — управляющий сигнал, $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор, описывающий возмущающие воздействия, $G: \mathbb{R}^{n+l} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — многозначное отображение.

Приведем результат работы [10], посвященный синтезу динамических регуляторов для однородных систем вида (3).

Теорема 1.

Пусть \mathbf{d}_x и \mathbf{d}_u будут расширениям и в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^l соответственно, $\mathbf{d} := \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x(s) & 0 \\ 0 & \mathbf{d}_u(s) \end{pmatrix}$, $\tilde{F} = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^{n+l} \rightrightarrows \mathbb{R}^{n+l} — \mathbf{d}$ — однородное многозначное отображение со степенью \tilde{m} . Система (3) глобально асимптотически стабилизируется в начале координат при $\boldsymbol{\omega} = 0$ с помощью однородной динамической обратной связи

$$u(t) = k(\boldsymbol{\sigma}(t), u(t)), \quad k \in C(\mathbb{R}^{n+l} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^l), \tag{4}$$

$$k(\boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{d}}^{\tilde{m}} \mathbf{d}_u(\ln\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{d}}) k_0(\mathbf{d}(-\ln\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{d}})\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ u \end{pmatrix},$$

где $k_0(\cdot) = \begin{cases} \frac{a(\cdot) + \sqrt{a^2(\cdot) + (\mathbf{b}^T(\cdot)\mathbf{b}(\cdot))^2}}{\mathbf{b}^T(\cdot)\mathbf{b}(\cdot)} \mathbf{b}(\cdot), & \text{если } \mathbf{b}(\cdot) \neq 0 \\ 0, & \text{если } \mathbf{b}(\cdot) = 0 \end{cases}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{d}}$ — каноническая однородная норма, индуци-

рованная нормой $\|\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}}$, $\mathbf{a}(\mathbf{z}) = \max_{v \in \tilde{F}(\mathbf{z})} \mathbf{z}^T \mathbf{P} v$, $\mathbf{b}^T(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_l \end{pmatrix}$, если существуют неотрицательная константа γ и симметричная матрица $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$, удовлетворяющие неравенствам:

$$\mathbf{P} \mathbf{G}_{\mathbf{d}} + \mathbf{G}_{\mathbf{d}}^T \mathbf{P} > 0, \quad \mathbf{P} > 0,$$

$$\max_{v \in \tilde{F}(\frac{\mathbf{z}}{\sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z}}})} \mathbf{z}^T \mathbf{P} v \leq \gamma \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_l \end{pmatrix} \mathbf{P} \mathbf{z}}, \tag{5}$$

для $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n+l})^T \in \mathbb{R}^{n+l} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, n+l$, где v — векторное поле из многозначного отображения.

В работе [10] приведен анализ устойчивости системы при наличии возмущающих воздействий $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, т. е. закон управления (4) робастный. Отметим, что замкнутая система соответствует \mathbf{d} — однородному

многозначному отображению $\begin{pmatrix} G \\ k \end{pmatrix}: \mathbb{R}^{n+l} \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$. Тогда согласно утверждению 1, если степень однородности отрицательна, то управление вида (4) стабилизирует систему (3) финитно.

Математическая модель

В рамках данной работы исследуется стенд в виде поворотной платформы с двумя степенями свободы, который реализует управление положением шара на платформе (рис. 1). Предполагается, что шар перемещается по платформе без подкакиваний и проскальзывания. Поскольку в представленной схеме используются два независимых сервопривода, а платформа симметрична, предполагается, что динамика по каждой оси одинакова. Таким образом, рассматриваемая система моделируется как две разведенные системы, где угол сервопривода α влияет на движение шара только в направлении y , изменяя наклон платформы на угол α . Аналогично для движения по другой оси.

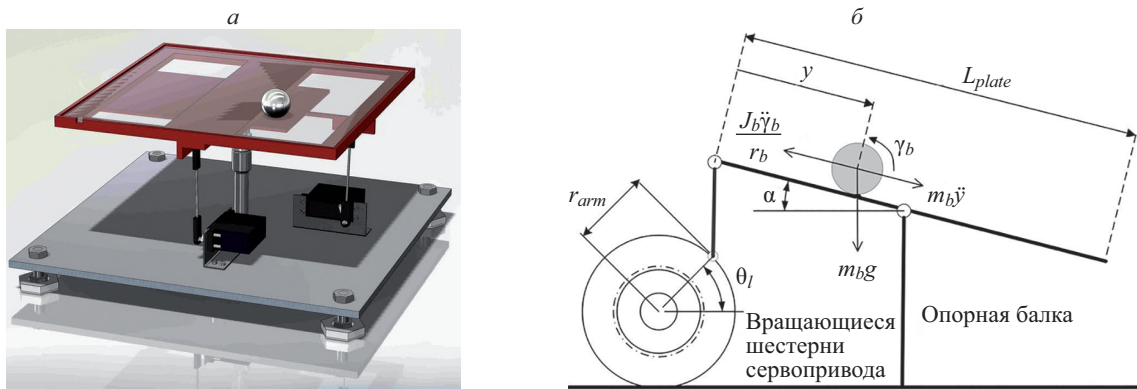


Рис. 1. a — поворотная платформа с двумя степенями свободы, б — структурная схема платформы

Согласно [6] математическая модель движения шара по оси y относительно положения сервопривода имеет вид:

$$\ddot{y}(t) = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)} \sin \theta_l(t), \quad (6)$$

где m_b — масса шара, g — ускорение свободного падения, r_{arm} — радиус шестерни сервопривода, r_b — радиус шара, L_{plate} — длина платформы, J_b — момент инерции шара, θ_l — угол поворота вала сервопривода. В рассматриваемой модели присутствуют фазовые ограничения на угол поворота вала сервопривода: $\theta_l \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$, $\bar{\theta} < \pi/2$. Модель движения шара по второй оси аналогична выражению (6), поэтому в дальнейшем решение задачи приводится только для стабилизации положения шара по оси y .

Передаточная функция сервопривода по отношению к входному напряжению имеет вид:

$$P_s(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)},$$

где K и τ — номинальные характеристики сервопривода.

Таким образом, исследуемую систему можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)} \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{K}{\tau} u - \frac{1}{\tau} x_4, \end{cases} \quad (7)$$

где $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [y, \dot{y}, \theta_l, \dot{\theta}_l]^T$ — вектор состояния, u — управляющий сигнал (напряжение, подаваемое на сервопривод).

Алгоритм управления

В данном разделе представим алгоритм синтеза динамического регулятора, обеспечивающего финитную устойчивость замкнутой системы (7) при наличии фазовых ограничений $\theta_l \in [-\bar{\theta}, \bar{\theta}]$, $\bar{\theta} < \pi/2$.

Выберем закон управления в виде $u = \mathbf{K}_0 \mathbf{x} + u_{nl}$, где $\mathbf{K}_0 = (0 \ 0 \ \frac{1}{K} \ 0)$. Тогда получим систему вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_l \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)} (\sin x_3 - x_3) \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} u_{nl} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\mathbf{A}_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку матрица \mathbf{A}_l нильпотентна (существует такое число ς , что

$\mathbf{A}_l^\varsigma = \mathbf{O}$, где \mathbf{O} — нулевая матрица), то $\mathbf{A}_l \mathbf{x}$ является \mathbf{d} -однородной с ненулевой степенью (см. работу [17] о \mathbf{d} -однородности линейных систем).

Применяя метод однородного расширения (2) с параметром $\nu = 0$ для системы вида (8), получим \mathbf{d} -однородную многозначную функцию $\tilde{F}: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ с ненулевой степенью однородности:

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)} \left[\frac{\sin \bar{\theta}}{\bar{\theta}}, 1 \right] \xi_3 \\ \xi_4 \\ \frac{K}{\tau} \xi_5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\xi = (\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \xi_4 \ \xi_5)^T = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_{nl})^T$, степень однородности $\tilde{m} = -1$ и генератор расширения имеет вид $\mathbf{G}_d = \text{diag}\{i\}_{i=1}^5$. Тогда достаточное условие стабилизируемости (5) можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{z} < \gamma \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z}} \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_5 \mathbf{e}_5^T \mathbf{P} \mathbf{z}},$$

$$\mathbf{P} > 0, \mathbf{P} \mathbf{G}_d + \mathbf{G}_d^T \mathbf{P} > 0,$$

где $\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5)^T \in \mathbb{R}^5$, $\mathbf{e}_5 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^5$ и

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)} \left[\frac{\sin \bar{\theta}}{\bar{\theta}}, 1 \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K}{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ и $\gamma > 0$ удовлетворяют линейным матричным неравенствам:

$$\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} - 2\gamma_0 \mathbf{e}_5^T \mathbf{e}_5 \mathbf{P} \mathbf{z} < 0 \quad i = 1, 2,$$

$$\mathbf{X} \mathbf{G}_d + \mathbf{G}_d^T \mathbf{X} > 0,$$

$$\mathbf{X} > 0,$$

где $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K}{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2 \sin \bar{\theta}}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b) \bar{\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K}{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Так как матрица \mathbf{A} может быть представлена в виде $\mathbf{A} = \beta \mathbf{A}_1 + (1 - \beta) \mathbf{A}_2$ для $\beta \in [0, 1]$, условие (5) выполняется при $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$.

Наконец, учитывая, что $\mathbf{d}_u = 1$ закон управления примет вид:

$$u_{nl} = k_0(\mathbf{z}),$$

где $\mathbf{z} = \mathbf{d}(-\ln\|\xi\|_{\mathbf{d}})\xi$, $\mathbf{a}(\mathbf{z}) = \max \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{z}$, $\mathbf{b}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_5$. На рис. 2–4 представлены результаты численного моделирования. Используемые значения параметров системы (таблица) соответствуют мехатронной установке «2 DOF Ball Balancer» из [6]. На рис. 2, 3 представлены переходные процессы для вектора состояния \mathbf{x} и управления u . Так как степень однородности замкнутой системы отрицательна, система финитно устойчива, что продемонстрировано на рис. 4.

Таблица. Численные значения параметров системы

Переменные	Значения	Единицы измерения
m_b	0,003	кг
g	9,81	м/с ²
r_{arm}	0,0254	м
r_b	0,0196	м
L_{plate}	0,275	м
J_b	$4,62 \cdot 10^{-7}$	кг·м ²
K	1,53	рад/(В·с)
τ	0,0248	с

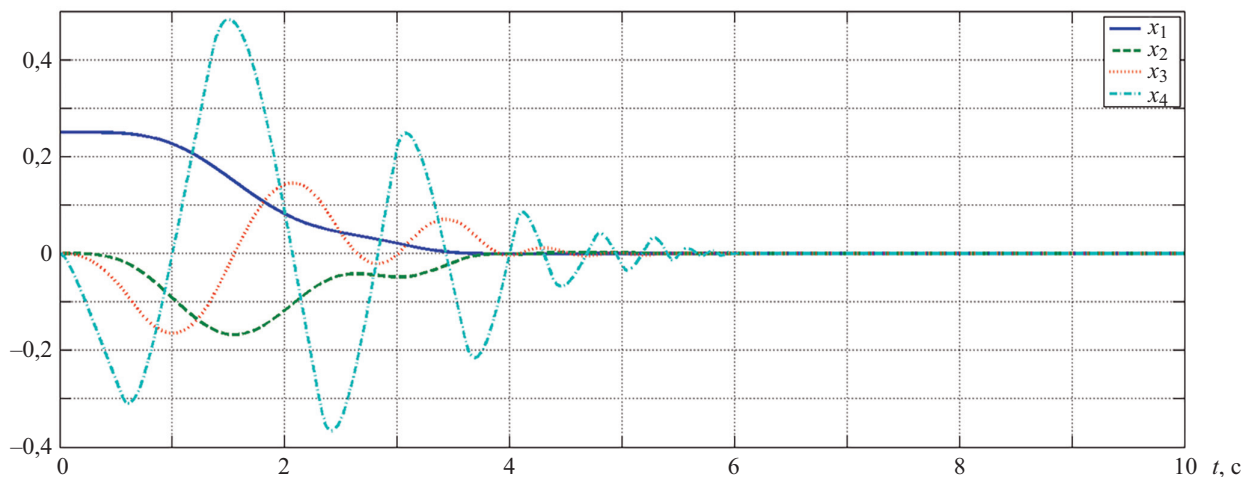


Рис. 2. Переходный процесс для вектора состояния \mathbf{x}

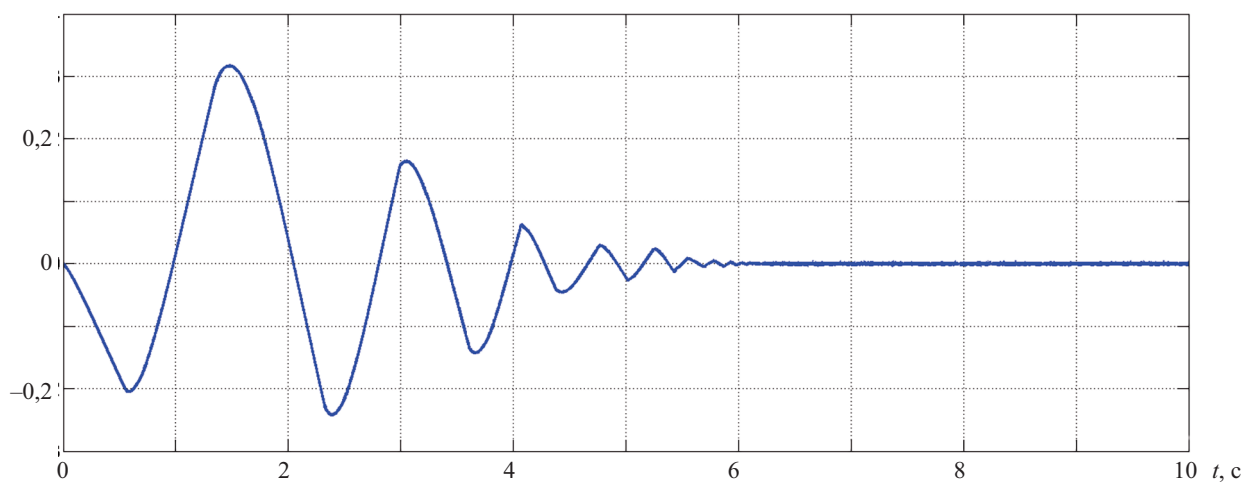
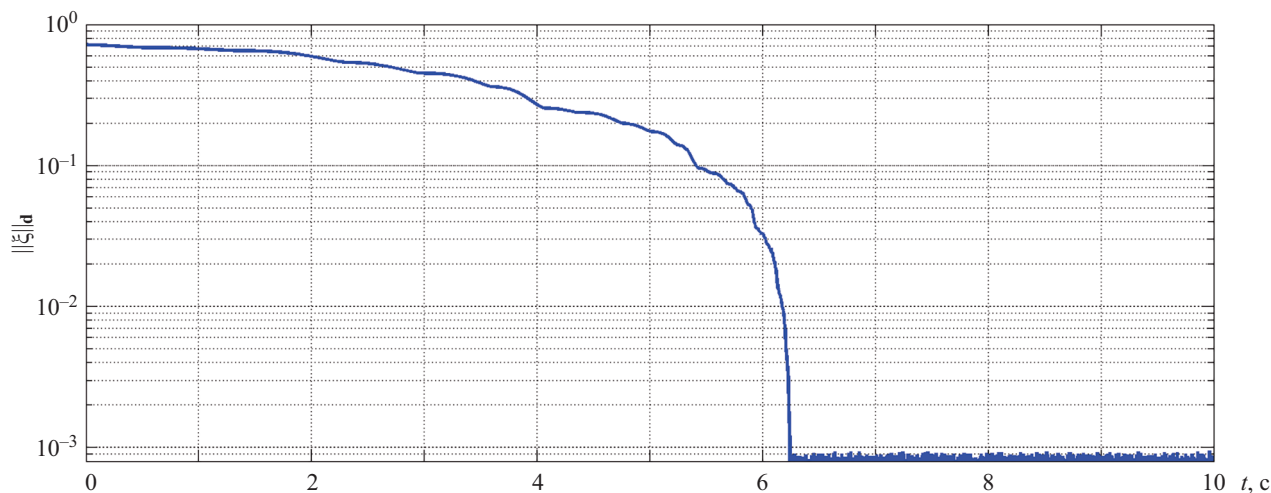


Рис. 3. Сигнал управления u

Рис. 4. Переходный процесс для $\|\xi\|_d$

Заключение

В данной работе представлен метод синтеза робастного динамического регулятора для стабилизации положения шара на поворотной платформе при наличии фазовых ограничений. В отличие от подходов, где используется линеаризация в окрестности положения нуля, предложенный метод основан на приведении системы к виду однородного дифференциального включения с использованием однородного расширения. Несмотря на нелинейность исследуемой системы и полученного закона управления, предложенный регулятор прост в настройке, так как его параметры рассчитываются на основе решения линейных матричных неравенств. Разработанный закон управления обеспечивает финитную устойчивость замкнутой системы.

Литература

1. Добриборщ Д., Колюбин С.А. Адаптивное управление роботом-манипулятором с параллельной кинематической схемой // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 9. С. 850–857. doi: 10.17586/0021-3454-2017-60-9-850-857
2. Андриевский Б.Р., Арсеньев Д.Г., Зегжда С.А., Казунин Д.В., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Товстик П.Е., Товстик Т.П., Юшков М.П. Динамика платформы Стюарта // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4. № 3. С. 489–506. doi: 10.21638/11701/spbu01.2017.311
3. Dobriborsci D., Kolyubin S., Margun A. Robust control system for parallel kinematics robotic manipulator // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. N 22. P. 62–66. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.519
4. Ghobakhloo A., Eghtesad M., Azadi M. Adaptive-robust control of the Stewart-Gough platform as a six DOF parallel robot // Proc. 2006 World Automation Congress, WAC'06. 2006. P. 4259906. doi: 10.1109/WAC.2006.375990
5. Xing J., Peng L., Lv B. Vibration reduction of 6-dof hydraulic parallel robot based on robust control // Proc. 2008 International Conference on Computer and Electrical Engineering (ICCEE 2008). 2008. P. 783–788. doi: 10.1109/ICCEE.2008.192
6. Quanser Inc. 2 DOF Ball Balancer Instructor Version. 2013.
7. Dobriborsci D., Margun A., Kolyubin S. Discrete Robust Controller for Ball and Plate System // Proc. 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018). 2018. P. 655–660. doi: 10.1109/MED.2018.8442461
8. Ho M.-T., Rizal Y., Chu L.-M. Visual servoing tracking control of a ball and plate system: design, implementation and experimental validation // International Journal of Advanced Robotic Systems. 2013. V. 10. N 7. P. 287. doi: 10.5772/56525
9. Polyakov A., Coron J.-M., Rosier L. On homogeneous finite-time control for linear evolution equation in hilbert space // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. V. 63. N 9. P. 3143–3150. doi: 10.1109/TAC.2018.2797838
10. Zimenko K., Polyakov A., Efimov D. On dynamical feedback control design for generalized homogeneous differ-

References

1. Dobriborsch D., Kolyubin S.A. Adaptive control of parallel kinematics robot manipulator. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, vol. 60, no. 9, pp. 850–857. (in Russian). doi: 10.17586/0021-3454-2017-60-9-850-857
2. Andrievskiy B.R., Arseniev D.G., Zegzhda S.A., Kazunin D.V., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Tovstik P.E., Tovstik T.P., Yushkov M.P. Dynamics of a Stewart platform. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, vol. 50, no. 3, pp. 298–309. doi: 10.3103/S1063454117030037
3. Dobriborsci D., Kolyubin S., Margun A. Robust control system for parallel kinematics robotic manipulator. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 22, pp. 62–66. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.519
4. Ghobakhloo A., Eghtesad M., Azadi M. Adaptive-robust control of the Stewart-Gough platform as a six DOF parallel robot. *Proc. 2006 World Automation Congress, WAC'06*, 2006, pp. 4259906. doi: 10.1109/WAC.2006.375990
5. Xing J., Peng L., Lv B. Vibration reduction of 6-dof hydraulic parallel robot based on robust control. *Proc. 2008 International Conference on Computer and Electrical Engineering (ICCEE 2008)*, 2008, pp. 783–788. doi: 10.1109/ICCEE.2008.192
6. Quanser Inc. 2 DOF Ball Balancer Instructor Version, 2013.
7. Dobriborsci D., Margun A., Kolyubin S. Discrete Robust Controller for Ball and Plate System. *Proc. 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018)*, 2018, pp. 655–660. doi: 10.1109/MED.2018.8442461
8. Ho M.-T., Rizal Y., Chu L.-M. Visual servoing tracking control of a ball and plate system: design, implementation and experimental validation. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2013, vol. 10, no. 7, pp. 287. doi: 10.5772/56525
9. Polyakov A., Coron J.-M., Rosier L. On homogeneous finite-time control for linear evolution equation in hilbert space. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, vol. 63, no. 9, pp. 3143–3150. doi: 10.1109/TAC.2018.2797838
10. Zimenko K., Polyakov A., Efimov D. On dynamical feedback control design for generalized homogeneous differential inclusions. *Proc. 57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2018)*, 2018, pp. 4785–4790. doi: 10.1109/CDC.2018.8619305

- ential inclusions // Proc. 57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2018). 2018. P. 4785–4790. doi: 10.1109/CDC.2018.8619305
11. Polyakov A., Efimov D., Fridman E., Perruquetti W. On homogeneous distributed parameter systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. V. 61. N 11. P. 3657–3662. doi: 10.1109/TAC.2016.2525925
 12. Polyakov A., Coron J.-M., Rosier L. On finite-time stabilization of evolution equations: A homogeneous approach // Proc. 55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2016). 2016. P. 3143–3148. doi: 10.1109/CDC.2016.7798740
 13. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, 1983. 282 p.
 14. Kawski M. Geometric Homogeneity and Stabilization // IFAC Proceedings Volumes, 1995. V. 28. N 14. P. 147–152. doi: 10.1016/s1474-6670(17)46822-4
 15. Polyakov A. Sliding mode control design using canonical homogeneous norm // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2019. V. 29. N 3. P. 682–701. doi: 10.1002/rnc.4058
 16. Bernuau E., Efimov D., Perruquetti W., Polyakov A. On an extension of homogeneity notion for differential inclusions // Proc. 12th European Control Conference (ECC 2013). 2013. P. 2204–2209. doi: 10.23919/ECC.2013.6669525
 17. Zimenko K., Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Generalized Feedback Homogenization and Stabilization of Linear MIMO Systems // Proc. 16th European Control Conference (ECC 2018). 2018. P. 1987–1991. doi: 10.23919/ECC.2018.8550195
 11. Polyakov A., Efimov D., Fridman E., Perruquetti W. On homogeneous distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, vol. 61, no. 11, pp. 3657–3662. doi: 10.1109/TAC.2016.2525925
 12. Polyakov A., Coron J.-M., Rosier L. On finite-time stabilization of evolution equations: A homogeneous approach. *Proc. 55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2016)*, 2016, pp. 3143–3148. doi: 10.1109/CDC.2016.7798740
 13. Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983, 282 p.
 14. Kawski M. Geometric Homogeneity and Stabilization. *IFAC Proceedings Volumes*, 1995, vol. 28, no. 14, pp. 147–152. doi: 10.1016/s1474-6670(17)46822-4
 15. Polyakov A. Sliding mode control design using canonical homogeneous norm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, vol. 29, no. 3, pp. 682–701. doi: 10.1002/rnc.4058
 16. Bernuau E., Efimov D., Perruquetti W., Polyakov A. On an extension of homogeneity notion for differential inclusions. *Proc. 12th European Control Conference (ECC 2013)*, 2013, pp. 2204–2209. doi: 10.23919/ECC.2013.6669525
 17. Zimenko K., Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Generalized Feedback Homogenization and Stabilization of Linear MIMO Systems. *Proc. 16th European Control Conference (ECC 2018)*, 2018, pp. 1987–1991. doi: 10.23919/ECC.2018.8550195

Авторы

Коновалов Дмитрий Евгеньевич — студент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-9973-8202, d.e.konovalev@mail.ru

Зименко Константин Александрович — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 55355650800, ORCID ID: 0000-0001-6220-7494, kostyazimenko@gmail.com

Маргун Алексей Анатольевич — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 55521791600, ORCID ID: 0000-0002-5333-0594, alexeimargun@gmail.com

Кремлев Артем Сергеевич — кандидат технических наук, ординарный доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 8670923900, ORCID ID: 0000-0002-7024-3126, kremlev_artem@mail.ru

Добриборщ Дмитрий — инженер, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 57191331224, ORCID ID: 0000-0002-1091-7459, dmitrii.dobriborsci@itmo.ru

Authors

Dmitry E. Konovalev — Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-9973-8202, d.e.konovalev@mail.ru

Konstantin A. Zimenko — PhD, Senior Scientific Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 55355650800, ORCID ID: 0000-0001-6220-7494, kostyazimenko@gmail.com

Alexey A. Margun — PhD, Senior Scientific Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 55521791600, ORCID ID: 0000-0002-5333-0594, alexeimargun@gmail.com

Artem S. Kremlev — PhD, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 8670923900, ORCID ID: 0000-0002-7024-3126, kremlev_artem@mail.ru

Dmitry Dobriborsci — Engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 57191331224, ORCID ID: 0000-0002-1091-7459, dmitrii.dobriborsci@itmo.ru