

УДК 621.833

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-110-117

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗНИЦЫ УГЛОВ НАПРАВЛЕНИЯ ЗУБЬЕВ В ЗОНЕ ЗАЦЕПЛЕНИЯ И ПОЛНОТА КОНТАКТА В ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ

А.И. Абдуллаев<sup>a,b</sup>, Г.Н. Расулов<sup>a</sup>, О.Ф. Исмаилов<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Азербайджанский технический университет, Баку, AZ1073, Азербайджан

<sup>b</sup> Международный научно-технический журнал «Машиноведение», Баку, AZ1073, Азербайджан

Адрес для переписки: qoshqarrasul@gmail.com

### Информация о статье

Поступила в редакцию 29.07.19, принята к печати 09.12.19

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Абдуллаев А.И., Расулов Г.Н., Исмаилов О.Ф. Математическое моделирование разницы углов направления зубьев в зоне зацепления и полнота контакта в зубчатых передачах // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 1. № 1. С. 110–117. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-110-117

### Аннотация

Представлена математическая модель разницы углов направления зубьев в зоне зацепления при цилиндрических и конических передачах, широко применяемых в приводах различных машин и агрегатов, а также в измерительных устройствах. На основе выполненного анализа рассмотрено частное решение — математическая модель разницы углов направления зубьев в зоне зацепления, охватывающая факторы, создаваемые только конструктивными элементами шпоночных соединений. В результате численного эксперимента выявлено количественное влияние угловых отклонений элементов шпоночных соединений на разницу углов направления зубьев в зоне зацепления. Разница углов направления зацепляемых зубьев оказывается основным источником, влияющим на полноту контакта зубьев, что является одним из показателей надежности и эксплуатационных качеств зубчатых передач. Рассмотрены элементы шпоночных соединений в сопряжении вал-колесо. На основе проведенного анализа выявлен механизм влияния отклонений конструктивных параметров элементов шпоночных соединений на характер и позиции контакта зацепляемых зубьев. Предложены конструктивные и технологические направления, обуславливающие минимизацию влияния погрешностей шпоночного соединения на образование разницы в углах направления зацепляемых зубьев. Даны рекомендации по применению многоступенчатых редукторов типа AN, в которых шпоночное соединение используется в сопряжениях вал-колесо только в ведущем и ведомом валах, а также по применению новой конструкции шпонки и шпоночного соединения, обеспечивающих самоподнастройку одного из зубьев (зубчатого колеса) в ходе их зацепления. Предложен эффективный способ наладки технологической системы при нарезании шпоночной канавки на валу.

### Ключевые слова

математическая модель, зубчатое зацепление, размерная цепь, шпоночное соединение, полнота контакта, разница

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-110-117

## MATHEMATICAL MODELING OF ANGULAR DIFFERENCE BETWEEN TEETH DIRECTION IN ZONE OF ENGAGEMENT AND COMPLETENESS OF CONTACT IN GEARS

A.I. Abdullayev<sup>a,b</sup>, G.N. Rasulov<sup>a</sup>, O.F. Ismayilov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Azerbaijan Technical University, Baku, AZ1073, Azerbaijan

<sup>b</sup> International Scientific-Technical Journal “Machine Science”, Baku, AZ1073, Azerbaijan

Corresponding author: qoshqarrasul@gmail.com

### Article info

Received 29.07.19, accepted 09.12.19

Article in Russian

**For citation:** Abdullayev A.I., Rasulov G.N., Ismayilov O.F. Mathematical modeling of angular difference between teeth direction in zone of engagement and completeness of contact in gears. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 110–117 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-110-117

### Abstract

The paper presents a mathematical model of the difference in the angles of the teeth direction in the engagement zone of cylindrical and bevel gears, which are widely used in drives of various machines and units, as well as in measuring

devices. A particular solution is considered based on the performed analysis. It is a mathematical model of the difference in the angles of the teeth direction in the engagement zone, covering the factors generated only by structural elements of keyed joints. A numerical experiment revealed a quantitative effect of the angular deviations of the keyed elements on the difference in the angles of the teeth direction in the engagement zone. The difference in the angles of the gear teeth direction turns out to be the main source that affects the teeth contact completeness, which is one of the indicators of the reliability and performance of gears. The elements of keyed joints in the shaft-wheel conjugation are also considered. The analysis is carried out and the effect of design parameter deviations of the keyed joint elements on the nature and position of the locked teeth contact is revealed. Design and technological directions are proposed that minimize the effect of keyed joint errors on the formation of the difference in the angles of the gear teeth direction. Recommendations are given on the use of multi-stage gearboxes of the AN type. They use the keyed joints in conjugations of shaft-wheel only in the drive and driven shafts. We also give recommendations on applying the new design of the keyed joints, providing self-adjustment of one of the teeth (gear) during their engagement. An effective method is proposed for setting up a technological system when cutting a keyway on a shaft.

#### Keywords

mathematical model, gearing, dimensional chain, keyed joints, contact completeness, difference

### Введение

Одним из показателей качества и надежности зубчатой передачи является полнота контакта зубьев. Площадь контакта зубьев влияет как на их несущие способности, так и на износостойкость, и на плавность работы, а также на точность перемещений в приборах [1–5]. При ее уменьшении увеличивается удельное давление на поверхность, ухудшаются условия трения зубьев. Так как работа, выполняемая трением, связана с относительно небольшой площадью контакта, то ускоряются локальные линейные износы зубьев. Практика показывает, что износ пропорционален работе, выполняемой трением [5–9]. Таким образом, чем меньше номинальная площадь, тем интенсивнее линейное изнашивание, увеличивается образование радиального зазора между зацепляемыми зубьями, нарушается

$$\Delta\beta_0 = F(\Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \Delta\beta_3, \Delta\beta_4, \Delta\beta_5, \Delta\beta_6, \Delta\beta_7, \Delta\beta_8, \Delta\beta_9, \Delta\beta_{10}, \Delta\beta_{11}, \Delta\beta_{12}, \Delta\beta_{13}), \quad (1)$$

где отклонения:  $\Delta\beta_1$  — осей основных отверстий корпуса редуктора от параллельности;  $\Delta\beta_2$  и  $\Delta\beta_8$  — осей валов (ведущей и ведомой) от параллельности к осям основных отверстий корпуса (индексы 2, 3, 4, 5, 6 и 7 относятся к ведущим, а 8, 9, 10, 11, 12 и 13 к ведомым элементам зацепления);  $\Delta\beta_3$  и  $\Delta\beta_9$  — осей посадочных ступеней (для зубчатых колес) валов от параллельности к осям (вращения) валов;  $\Delta\beta_4$  и  $\Delta\beta_{10}$  — от параллельности рабочих поверхностей шпоночных канавок валов к осям последних;  $\Delta\beta_5$  и  $\Delta\beta_{11}$  — от параллельности рабочих поверхностей шпонок;  $\Delta\beta_6$  и  $\Delta\beta_{12}$  — от параллельности рабочих поверхностей шпоночных канавок зубчатых колес к осям их основных отверстий;  $\Delta\beta_7$  и  $\Delta\beta_{13}$  — отклонения параллельности направления зубьев от осей основных отверстий зубчатых колес.

Одним из основных функциональных рабочих узлов зубчатых передач является шпоночное соединение (ШС). Отклонение от параллельности рабочих поверхностей элементов шпоночного соединения (ЭШС) относительно оси вращения зубчатого венца приводит к погрешностям (различиям) в направлениях зацепляемых зубьев [15].

Таким образом, погрешности ЭШС во взаимосвязи с другими подобными факторами (например, отклонение направления зуба и т. п.) определяют качество зацепления по полноте контакта зубьев. Влияние погрешностей ЭШС (ПЭШС) на полноту контакта зубьев

плавность работы передачи, уменьшается срок службы зубьев (колес) [10–12].

Следовательно, одним из направлений повышения надежности зубчатой передачи, редукторов, а также измерительных устройств может быть увеличение фактической площади контакта зубьев. Последняя зависит, прежде всего, от разности направлений зацепляемых зубьев, от угла между ними. Основными факторами, влияющими на угол между направлениями зацепляющихся зубьев, являются погрешности, допущенные при изготовлении и сборке несущих элементов зубчатой передачи (редуктора), которые непосредственно находятся в функциональной связи с зубчатым зацеплением [3, 10–14].

Функциональная связь между разницей углов направления зубьев цилиндрических и конических передач в зоне зацепления  $\Delta\beta_0$  и влияющими на нее факторами выражается зависимостью:

носит сложный характер, и поэтому исследования этого вопроса являются актуальными.

Цель работы — выявление механизма влияния ПЭШС вал-колесо на характер контакта зацепляемых зубьев и разработка мер по улучшению условий контакта зубьев.

### Постановка проблемы

Известно, что рабочая поверхность шпонки принимает от вала определенную силу  $P$  (крутящий момент), и противоположно расположенной рабочей поверхностью передает ее на зубчатое колесо (или наоборот). При фрезеровании шпоночной канавки на вале допускается погрешность в виде отклонения рабочей поверхности канавки от параллельности ее к оси вала ( $\Delta\beta_4$ ). А при обработке шпоночной канавки на колесо допускается погрешность в виде отклонения рабочей поверхности канавки шпонки от параллельности оси зубчатого венца ( $\Delta\beta_6$ ) (рис. 1). Шпонка также имеет погрешность изготовления в виде отклонения от параллельности рабочих поверхностей ( $\Delta\beta_5$ ). Допустим, что проекция оси посадочной шейки вала и оси симметрии шпонки пересекаются в точке  $A$ , при этом:  $\delta$  — наибольший зазор между сопрягаемыми цилиндрическими поверхностями;  $\Delta\beta$  — отклонение направления зуба от параллельности к оси посадочной шейки вала. Эти

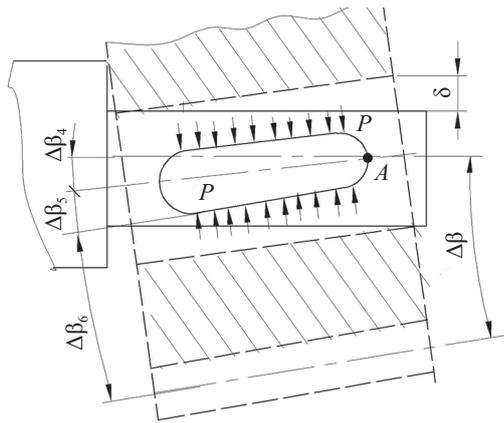


Рис. 1. Влияние положения шпоночного соединения на положение зацепляемого зуба

погрешности в совокупности с другими аналогичными погрешностями определяют конечное направление зуба в зоне зацепления. Разница в углах направлений зацепляющихся пар зубьев примерно удваивается [15].

Когда рабочая поверхность шпонки не параллельна оси вала, сила  $P$ , которая стремится равномерно распределиться по сопрягаемым поверхностям, так же как ШС, обуславливают поворот зубчатого колеса на определенный угол, в этом случае происходит самоустановление системы (рис. 1). Соответственно, зубья колеса скрещиваются относительно оси вала под тем же углом в плоскости, перпендикулярной плоскости рабочей поверхности шпонки. При этом углы скрещивания отдельных зубьев по окружности разные. В результате в период одного оборота колеса, поверхности контакта зубьев меняют свои позиции вдоль зубьев, тогда изменяются площади контакта. Представляет научный интерес механизм влияния ПЭШС на формирование площади контакта зацепляемых зубьев.

### Математическое моделирование разницы углов направления зацепляемых зубьев

Для рационального решения поставленной задачи целесообразно вывести общую математическую модель разности углов направления зацепляемых зубьев, а в дальнейшем применить ее для решения частной производной задачи.

Для выражения функциональной связи (1) в виде математической зависимости, используется теория размерных цепей, применительно к угловым векторным размерным цепям<sup>1</sup>. Тогда

$$\Delta\beta_0 = \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 + \Delta\beta_3 + \Delta\beta_4 + \Delta\beta_5 + \Delta\beta_6 + \Delta\beta_7 + \Delta\beta_8 + \Delta\beta_9 + \Delta\beta_{10} + \Delta\beta_{11} + \Delta\beta_{12} + \Delta\beta_{13} = \sum_{i=1}^n \Delta\beta_i \quad (2)$$

Необходимо отметить, что математическая модель (2) целевой функции имеет особенности: значение замыкающего звена  $\Delta\beta_0$  формируется при кинематике ее составляющих (кроме  $\Delta\beta_1$ ), причем величины последних ограничены собственными значениями, сформированными только на участке дуги зацепления колес в зоне зацепления. Так как  $\Delta\beta_0$  формируется при кинема-

тике собственных составляющих, и последние изменяют свои направления в зоне зацепления (в зависимости от поворотов колес), то и не исключена вероятность взаимокомпенсации составляющих.

При конструировании приборов и их узлов допуск замыкающего звена распределяют между составляющими размерной цепи с определенной (надлежащей) закономерностью (порядком) [16]. Исходя из этого и с учетом функциональной связи (1), при расчете размерных цепей по вероятностному способу, допуск замыкающего звена  $T_0$  вычисляют по формуле

$$T_0 = t \sqrt{\sum_{i=1}^{13} \lambda_i^2 T_i^2} \quad (3)$$

где  $t$  — коэффициент, определяющий процент риска;  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{13}^2$  — коэффициенты, зависящие от кривых распределения соответствующих первичных погрешностей (индексы параметров соответствуют индексам параметров по (2));  $T_i$  — допуск  $i$ -той составляющей размерной цепи.

Составляющие размерной цепи (2) можно разделить на две части: составляющие, связанные только с элементами шпоночного соединения, и остальные. Функциональная связь между разницей углов направления зубьев и влияющими на нее факторами, создаваемые только конструктивными элементами шпоночных соединений,  $\Delta\beta_0'$ , является составной частью (2) и выражается зависимостью:

$$\Delta\beta_0' = f(\Delta\beta_4, \Delta\beta_5, \Delta\beta_6, \Delta\beta_{10}, \Delta\beta_{11}, \Delta\beta_{12}).$$

Тогда размерная цепь отклонения направления зуба от параллельности к оси посадочной шейки вала, образуемая размерами  $\Delta\beta_4, \Delta\beta_5, \Delta\beta_6, \Delta\beta_{10}, \Delta\beta_{11}$  и  $\Delta\beta_{12}$ , будет (рис. 2):

$$\Delta\beta_0' = \Delta\beta_4 + \Delta\beta_5 + \Delta\beta_6 + \Delta\beta_{10} + \Delta\beta_{11} + \Delta\beta_{12}, \quad (4)$$

где  $\Delta\beta_1'$  — (на рис. 2) результирующая размеров  $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2$  и  $\Delta\beta_3$ . Так как он не имеет прямую связь с элементами шпоночных соединений, здесь можно принять  $\Delta\beta_1' = 0$ .

Таким образом, математическая модель допуска (рассеяния) разницы углов направления зацепляемых зубьев, учитывающая при конструировании только допуски элементов (или погрешностей элементов при изготовлении) шпоночного соединения, будет:

$$T_0' = t \sqrt{\sum_{i=4}^6 \lambda_i^2 T_i^2 + \sum_{i=10}^{12} \lambda_i^2 T_i^2} \quad (5)$$

где  $T_0'$  — часть допуска на разницы углов направления зубьев в зоне зацепления, выделенная только для элементов шпоночных соединений ( $T_0' = kT_0$ , где  $k$  — коэффициент,  $k < 1$ ).

Применение математических моделей разницы углов направления зацепляемых зубьев (2)–(5) позволяет решать различные конструктивные и технологические прямые и обратные задачи.

<sup>1</sup> РД 50-635-87 Методические указания. Цепи размерные. Основные понятия. Методы расчета линейных и угловых цепей. Введен 01.07.1988. М.: Изд-во стандартов, 1987. 31 с.

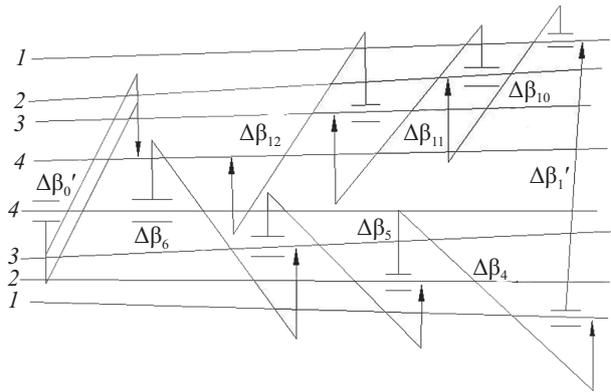


Рис. 2. Угловая размерная цепь элементов шпоночных соединений зацепляемых зубьев.

- 1 — теоретические оси валов и колес (оси вращения);
- 2 — направления рабочих поверхностей шпонок на валу;
- 3 — направления рабочих поверхностей шпонок на колесах;
- 4 — оси шпоночных канавок колес

**Численный эксперимент.** Шпоночные соединения применяются почти во всех сопряжениях вал-колесо (кроме сопряжений ведущего вала с шестерней быстроходной передачи) различных типоразмеров редукторов и зубчатых передач. При этом размеры элементов шпоночного соединения и допуски на них принимаются согласно ГОСТ<sup>1</sup>. Для анализа вышепредставленных предположений, рассмотрим пример, принимая свободное шпоночное соединение в сопряжении со средним распространенным размером, согласно ГОСТ.

1. Диаметр поверхности сопряжения вал-шестерня находится в интервале 44–50 мм; размер шпонки,  $b \times h \rightarrow 14 \times 9$ ; рабочая длина шпонки,  $l = 50$  мм. При этом допуски по ГОСТ для: диаметра вала,  $\varnothing (44-50)_{-0,043}$ ; диаметра втулки,  $\varnothing (44-50)_{+0,120}^{+0,050}$ ; ширины шпонки,  $14h9 = 14_{-0,043}$ .

2. Диаметр поверхности сопряжения вал-колесо находится в интервале 50–58 мм; размер шпонки,  $b \times h \rightarrow 16 \times 9$ ; рабочая длина шпонки,  $l = 56$  мм;  $\varnothing (50-58)_{-0,043}$ ;  $\varnothing (50-58)_{+0,050}^{+0,120}$ ; и  $16h9 = 16_{-0,043}$ .

ГОСТ не предусматривает допуски на отклонения рабочих поверхностей шпоночных канавок от параллельности к осям вала и колеса и на отклонения параллельности рабочих поверхностей шпонки. При аналогичных случаях считается, что они включены в допуск соответствующего линейного размера. Для определения угловых отклонений элементов шпоночного соединения использованы допуски на соответствующие размеры и получено, что  $\Delta\beta_4 = 03'$ ;  $\Delta\beta_5 = 03'$ ;  $\Delta\beta_6 = 05'$ ;  $\Delta\beta_{10} = 03'$ ;  $\Delta\beta_{11} = 03'$  и  $\Delta\beta_{12} = 05'$ .

Принимаем  $t = 3$  (риск 0,27 %, согласно принятому порядку в приборостроении);  $\lambda_i^2 = \frac{1}{6}$  (при неизвестности закона распределения фактора), определяем разницу углов направления зацепляемых зубьев, создаваемые

<sup>1</sup> ГОСТ 23360–78. Основные нормы взаимозаменяемости. Соединения шпоночные с призматическими шпонками. Размеры шпонок и сечений пазов. Допуски и посадки. Введен 01.01.80. М.: Изд-во стандартов, 1993. 19 с.

только конструктивными элементами шпоночных соединений,  $\Delta\beta_0' = T_0' = 11,34'$ .

Таким образом, разница углов направления зацепляемых зубьев больше чем в два раза превосходит величину отклонения параллельности рабочей поверхности шпоночной канавки колеса от его оси (калитет точности 10), из-за возможных угловых отклонений конструктивных элементов шпоночных соединений. Если учесть, что математическая модель (2) включает еще 7 составляющих, то необходимость поиска путей уменьшения разницы углов направления зацепляемых зубьев будет очевидной.

### Влияние положения шпоночного соединения в зубчатых передачах на характер контакта зубьев

Как отмечено выше, погрешности ЭШС создают эквивалентные погрешности направления зубьев. В результате контакт между зубьями происходит ограниченно, односторонне и нерегулярно как по длине, так и по эвольвентному профилю зубьев.

Возможный наибольший угол поворота оси зубчатого венца  $\beta$  зависит от величины гарантированного (наибольшего) зазора между сопрягаемыми цилиндрическими поверхностями вал-колесо (рис. 1):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta}{l}; \beta = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{l},$$

где  $l$  — длина сопрягаемых цилиндрических поверхностей вал-колесо.

В соответствии с особенностями процесса изготовления, отклонение от параллельности ЭШС к оси вала формируется в направлениях координатных осей  $X$  и  $Y$  (рис. 3). На рисунке ось  $X$  параллельна плоскости, проходящей через оси зацепляемых зубчатых колес. Погрешности в соединении, образованные в направлении оси  $X$ , по-разному влияют на формирование направления зацепляемого зуба в зависимости от углового положения ШС.

Для выявления влияния погрешности ЭШС на направление зуба принимаем, что только элементы одного из шпоночных соединений зацепляемой пары обладают погрешностями изготовления, а остальные элементы, имеющие функциональные связи с направлением зуба, обладают идеальной точностью (рис. 1 и 2). Анализ механизма влияния положения ШС на направление зуба представляется на плоскости, проходящей через оси валов, так как зацепление зубьев происходит именно на ее периферии (рис. 3).

Допустим, что в результате сборки ЭШС на ведомом узле вал-колесо, отклонение рабочей поверхности шпонки от параллельности к оси вала достигла величину  $\Delta_1$ , по длине сопряжения  $l$ , в направлении оси  $X$  (рис. 3, а). При этом отклонение рабочей поверхности шпоночной канавки колеса от параллельности к оси составляет  $\Delta_2$ . Если эти погрешности имеют противоположные направления, то они взаимно компенсируются,  $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ , а при совпадении их направлений они суммируются,  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ , и образуют общую величину отклонения направления зуба. В этом случае

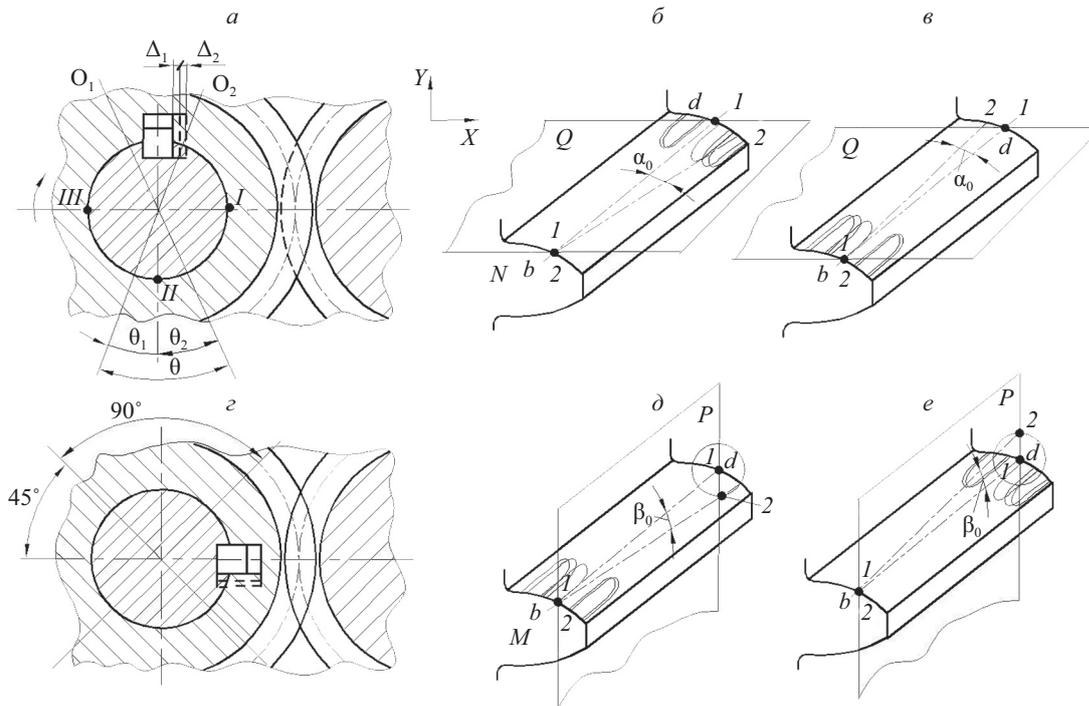


Рис. 3. Схема шпоночного соединения, зубчатого зацепления и направления зуба

максимальная угловая погрешность направления зуба составляет  $\Delta\beta = \Delta\beta_4 + \Delta\beta_5 + \Delta\beta_6$  (рис. 1 и 2).

На рис. 3, а, з показаны две разные, отличающиеся друг от друга на  $90^\circ$ , схемы зацепления зубьев. Положения ШС показаны, когда плоскость его симметрии создает угол  $90^\circ$  и совпадает с плоскостью, проходящей через оси сцепленной пары. Погрешности в виде непараллельностей ЭШС в направлении оси  $X$  обуславливают поворот оси зубчатого венца (направление зуба) на некоторый угол  $\alpha_0$  на поверхности  $Q$ , в зависимости от величины  $\Delta$ , согласно зависимости  $\alpha_0 = \arctg \Delta / l_{ш}$  (где  $l_{ш}$  — длина поверхности сопряжения шпонка–колесо).

Рассмотрим контакт зубьев в случае, представленном на рис. 3, а. Допустим, что предполагаемая точка контакта  $b$  на делительной окружности зуба находится на поперечной плоскости, проходящей через сечение скрещивания плоскости симметрии шпонки с осью вала (рис. 3, б) (назовем центром скрещивания). При этом, начиная с этой точки, расстояние между соответствующими точками теоретических линий контакта зубьев уменьшается (или увеличивается, в зависимости от направления скрещивания) в двух направлениях, вдоль зубьев. Таким образом, имеет место отклонение позиции контакта зубьев от теоретических линий зацепления, связанное с  $\Delta$  (в направлении оси  $X$ ) и криволинейностью эвольвентного профиля (в направлении оси  $Y$  на плоскости  $P$ ).

Соответственно, в зоне зацепления, образующая 1-1 профиля зуба с порядковым номером  $N$  (зуб  $N$ ) поворачивается на угол  $\alpha_0$  на плоскости  $Q$  и, в отличие от теоретического, занимает положение 2-2. Образуется погрешность, эквивалентная погрешности собственно направления зуба. Начиная от точки  $b$ , на горизон-

тальной плоскости  $Q$  в направлении точки  $d$  тело зуба «приближается» к зацепляемому зубу. В связи с этим контакт происходит в областях зуба в зоне точки  $d$ , а в зоне вокруг точки  $b$  возникает наибольший зазор между соответствующими зонами зацепляемых зубьев.

Очевидно, что когда плоскость симметрии ШС находится в каком-нибудь положении  $OO_1$ , зуб  $N$  входит в зацепление (рис. 3, а, б). Он находится в зацеплении в течение поворота вала на угол  $\theta$  и выходит из зацепления, когда плоскость симметрии ШС занимает положение  $OO_2$  ( $\theta = \theta_1 + \theta_2$ ;  $\theta_1 = \theta_2$ ). Согласно теории контакта, номинальная площадь контакта имеет форму параболы. Длина и номинальная площадь контакта формируются в зависимости от неровностей контактирующих поверхностей и угла различия направлений контактирующих зубьев. При вращении шестерни площадь контакта перемещается от вершины к ножке зуба колеса (для шестерни, наоборот).

Согласно теории зацепления, в начальной стадии зацепления (контакта) зуба  $N$  продолжается дальнейшее зацепление, контакт зуба  $(N - 1)$ , а при стадии завершения — входит в зацепление зуб  $(N + 1)$ . Изменяются условия контакта зубьев. При этом различие направлений зацепляемых зубьев в сочетании с разностями шагов зубьев соседних зацепляемых пар обуславливают вероятность появления удара при входе и выходе зубьев при зацеплении, поэтому для предотвращения подобных явлений предусмотрено фланкирование зубьев — закругление их вершин [5].

При повороте вала на  $90^\circ$  ШС занимает позицию  $I$  (рис. 3, з). При этом аналогичная картина создается на плоскости  $P$  (рис. 3, д). Образующая зацепляемого зуба  $M$  занимает не теоретическую свою позицию 1-1, а позицию 2-2. Зуб  $M$  (колесо) поворачивается в зоне

зацепления на угол  $\beta_0$ , только из-за погрешностей ШС  $\beta_0 = \alpha_0$ . Образуется погрешность направления зуба уже на плоскости  $P$ . Таким образом, контактирование зубьев происходит на участках противоположных концов зубьев, вокруг точки  $b$ . Одновременно образуется зазор между эвольвентными поверхностями зубьев на участках вокруг точки  $d$ , на этот раз на плоскости  $P$ .

При повороте вала на  $180^\circ$  ШС занимает позицию II (рис. 3, в). Зуб, расположенный напротив зуба  $N$ , занимает его положение. При этом образующая 1-1 подвергается повороту на угол  $\alpha_0$ , уже на плоскости  $Q$ , но в противоположном направлении и занимает позицию 2-2. Контакт зубьев происходит на их противоположных концах, на участках вокруг точки  $b$ . Начиная от точки  $b$ , в направлении точки  $d$  образуется зазор (без учета деформаций) между рабочими поверхностями зубьев, который достигает максимальное значение в точке  $d$ .

При повороте вала на  $280^\circ$ , ШС занимает положение III (рис. 3, е). Зуб, расположенный напротив зуба  $M$  занимает его положение. Образующая 1-1 занимает положение 2-2, и ее отклонение равняется углу  $\beta_0$  уже на вертикальной плоскости  $P$ . Контакт зубьев происходит уже в участках вокруг точки  $d$ .

Выше описан механизм контакта зубьев в четырех экстремальных позициях вала ШС. Таким образом, при каждом обороте вала в зависимости от положения ШС контакт зубьев происходит плавно-последовательно на правом–левом–правом–левом концах зубьев. Переход контакта от одной схемы к другой происходит мгновенно-плавно при вращении зубчатых колес, когда плоскость симметрии ШС составляет угол, равный  $45^\circ$  с плоскостью, проходящей через оси валов. В зависимости от отношения количества зубьев зацепляемых пар (т. е. от передаточного числа  $u$ ) каждый зуб контактирует только с одним зубом (при  $u = 1$ ), несколькими зубьями ( $u \rightarrow$  целое число) и со всеми зубьями пары. Подобный циклический контакт зацепляемых зубьев поддерживается во весь период срока службы передачи. В результате образующая 2-2 описывает в пространстве конус, угол на вершине которого равняется  $2\alpha_0 = 2\beta_0$ . Вершина конуса находится на эвольвентном профиле в центре скрещивания. В ходе зацепления каждой пары зубьев вершина конуса на колесе первоначально образуется на вершине и в дальнейшем перемещается в направлении ножки зуба. При нахождении центра перекрещивания в противоположном конце ШС (зуба), вершина конуса также меняет свою позицию соответственно. Таким образом, на характер контакта зубьев влияет и позиция центра скрещивания. Центр может быть сформирован в пределах длины ШС, а также вне ее, и обладает особым значением в формировании позиции контакта зубьев.

Известно, что для исключения влияния погрешностей направления зубьев зацепляемых пар на их надежность применяется дополнительная финишная операция обработки зубьев и обеспечиваются их бочкообразные формы [5, 10, 12].

Таким образом, возникает необходимость в разработке мер, позволяющих устранить или уменьшить негативное влияние ПЭШС на направления за-

цепляемых зубьев, обеспечивающих улучшение их контакта.

**Управление механизмом контактирования зубьев зацепляемых пар.** Повышение надежности зубчатых передач с минимизацией влияния угловых погрешностей их элементов на качество зацепления является одной из актуальных задач.

На основе анализа вышеизложенного, можно прийти к выводу, что минимизацией влияния ПЭШС на направление зубьев можно повысить надежность работы зубчатой передачи. Эту задачу можно эффективно решить в трех направлениях:

1) применением сопряжения вал-колесо без использования ШС и пакетных редукторов типа АН;

2) усовершенствованием конструкции элементов ШС, позволяющим исключить влияния ПЭШС на направление зубьев в зоне зацепления;

3) усовершенствованием наладки технологической системы при нарезании шпоночной канавки на валу.

1. В Азербайджанском техническом университете (АзТУ) под руководством проф. А. И. Абдуллаева созданы многоступенчатые пакетные редукторы типа АН, в конструкции которых количества ШС доведено до минимума. Одним из преимуществ редукторов типа АН является то, что в них используются ШС только в первых и последних соединениях вал–колесо зубчатых передач. Отсутствие ШС на всех промежуточных сопряжениях вал–колесо обуславливает устранение негативного влияния ПЭШС на качество зубчатой передачи [1, 17, 18].

Проведенные испытания подобных трехступенчатых пакетных редукторов в лабораторных условиях АзТУ и в производственных условиях (на скважине Государственной нефтяной компании Азербайджанской Республики (SOCAR), в механизме лифтовой системы зданий) показали их пригодность и эффективность для применения [18].

Разработан и изготовлен натурный образец нового конструктивного решения трехступенчатого двухпоточного пакетного редуктора на двух валах с передаточным отношением 64, для передаточного механизма механического привода штанговых насосов. Проведены промышленные испытания пакетного редуктора на станке-качалке СКД 3-1,5-710 на скважине глубиной 850 м вблизи г. Баку. По своим техническим параметрам пакетный редуктор полностью соответствовал нормативам заказчика – SOCAR, и удовлетворил все его требования по нефтедобыче, надежности и работоспособности. Редуктор был рекомендован для дальнейшего производства с целью использования на станках-качалках [18].

2. Разработана конструкция шпонки и ШС на уровне патента Азербайджана, применение которого обуславливает исключение негативных влияний погрешностей несоосности и непараллельности рабочих поверхностей элементов зубчатых передач на их надежность работы. Обеспечивается улучшение контактных условий зубьев зацепляемых пар передачи (рис. 4). Суть механизма управления контактированием зубьев заключается в том, что создаются условия для самоподнастройки одного из зубьев (деталей) в ходе их зацепления под силы, дей-

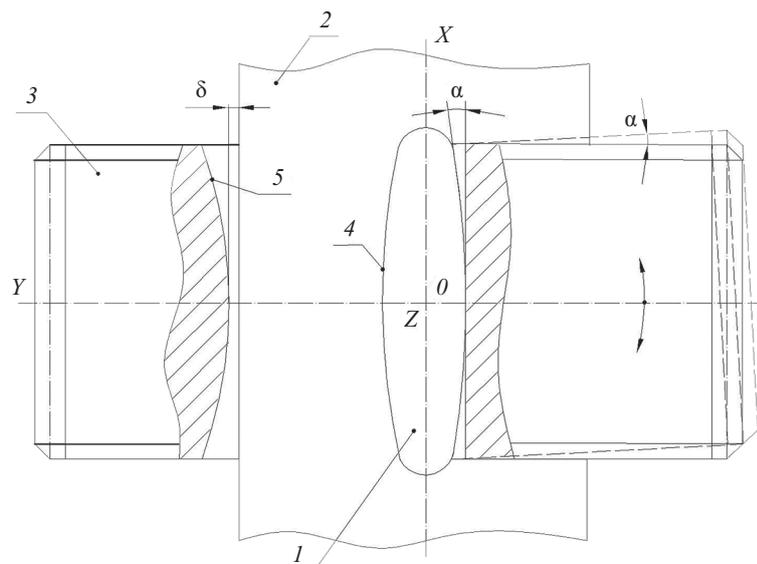


Рис. 4. Цилиндрическое шпоночное соединение в сопряжении вал-колесо

ствующие односторонне на рабочие поверхности контактирующих зубьев. Ось детали поворачивается на угол  $\alpha$ , равный разнице направлений зацепляемых зубьев.

Предложенная цилиндрическая ШС отличается от стандартных призматических, тем, что рабочие поверхности 4 шпонки 1, установленной на валу 2, являются частью цилиндрической поверхности. Создаются условия поворота одного из колес 3 относительно другого под воздействием односторонне действующей силы на рабочие поверхности зубьев при их контактировании. Для получения возможности плавного поворота колеса, его посадочное отверстие выполняется седлообразной формы 5. Обеспечивается возможность поворота одной из деталей зацепляемой пары вокруг двух пространственных осей Y и Z (рис. 4).

Характер цилиндрических шпоночных соединений для сопряжения вал-колесо (тип посадки, базовые размеры ШС и т. п.) принимается, как принято для стандартных призматических ШС, так как рабочая площадь поперечного сечения цилиндрической ШС мало отличается от предусмотренных для призматических ШС.

3. Целенаправленная наладка технологической системы является одним из основных направлений обеспечения высокой точности обработки [19]. Для минимизации влияния ПЭШС на характер контакта зубьев необходимо осуществить наладку технологической системы в середине канавки при нарезании шпоночной канавки на валу, так как наилучшие условия контакта обеспечиваются, когда центр скрещивания находится в середине ШС по длине. Тогда радиус основания конуса, полученный в положении 2-2, уменьшится в два раза по сравнению со случаем, когда центр скрещивания находится на концах ШС (на точках  $b$  или  $d$ , рис. 3).

Контактирование зубьев концентрируется в основном на середине зуба по длине. Соответственно уменьшается негативное влияние ПЭШС на характер контакта зацепления зубьев. Происходит уменьшение амплитуды «качения» зуба почти в два раза, перенос ее центра на середину зуба обуславливает улучшение условий работы и повышение надежности работы всей зубчатой передачи.

### Заключение

Предложена математическая модель разницы углов направления зубьев в зоне зацепления цилиндрических и конических зубчатых передач. На основе ее анализа выведена производная модель, охватывающая влияние в целевой функции возможных угловых отклонений элементов шпоночного соединения.

Выявлен и раскрыт механизм контакта зубьев в зубчатых передачах, в зависимости от положения и погрешности элементов шпоночного соединения при зацеплении. Установлено, что при сопряжении зубчатого колеса с валами с помощью шпоночного соединения, отрицательное влияние погрешностей элементов шпоночного соединения на качество соединений удваивается, становится более сложным, зависит от количества одновременно зацепляемых пар и от передаточного числа передачи.

Предложены конструктивные и технологические мероприятия, обуславливающие минимизацию влияния погрешностей шпоночного соединения на образование разницы в углах направлений зацепляемых зубьев, позволяющие улучшить условия их контактирования.

### Литература

1. Абдуллаев А.И., Наджафов А.М. Качественная оценка технического уровня пакетного редуктора // Вестник машиностроения. 2008. № 12. С. 6–9.

### References

1. Abdullaev A.I., Nadzhafov A.M. A qualitative assessment of batch reducer's technical level. *Vestnik mashinostroeniya*, 2008, no. 12, pp. 6–9. (in Russian)

2. Гутин С.Я., Власов М.Ю. Информационные технологии в эскизном проектировании и оптимизации параметров зубчатых цилиндрических редукторов. М.: Высшая школа, 2004. 110 с.
3. Елисеев Ю.С., Нежурин И.П. Деформации и погрешности в зацеплении и их роль в работе зубчатой передачи // Вестник машиностроения. 1999. № 8. С. 28–31.
4. Старжинский В.Е., Басинюк В.Л., Мардосевич Е.И., Шалобаев Е.В. Анализ публикаций по проблеме оптимизации компоновочных схем зубчатых механизмов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Проблеми механічного приводу. 2013. № 40(1013). С. 156–169.
5. Технология производства и методы обеспечения качества зубчатых колес и передач: учеб. пособие / под общ. ред. В. Е. Старжинского и М.М. Кане. СПб: Профессия, 2007. 832 с.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. Дроздов Ю.Н., Юдин Е.Г., Белов А.И. Прикладная трибология: (трение, износ, смазка в технических системах). М.: Эко-Пресс, 2010. 604 с.
8. Sánchez M.B., Pleguezuelos M., Pedrero J.I. Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects // Mechanism and Machine Theory. 2017. V. 109. P. 231–249. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.11.014
9. Sánchez M.B., Pleguezuelos M., Pedrero J.I. Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears // Meccanica. 2013. V. 48. N 3. P. 527–543. doi: 10.1007/s11012-012-9612-8
10. Антониук В.Е., Павловский В.Я., Поддубко С.Н., Александрова В.С., Николаенкова И.Н. Продольная модификация зубчатых колес планетарных передач мобильных машин // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 4(17). С. 37–41.
11. Жабин А.И., Кивенсон А.И., Смирнова Е.В. Методы и средства повышения точности зубчатых передач по нормам контакта зубьев (обзор) // Вестник машиностроения. 1990. № 4. С. 46–50.
12. Романов В.В., Спицын В.Е., Дейнекин А.С., Мироненко А.И. Зубчатые передачи редукторов с профильно-продольной модификацией зубьев // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2009. Т. 4. № 6(40). С. 39–44.
13. Petry-Johnson T.T., Kahraman A., Anderson N.E., Chase D.R. An experimental investigation of spur gear efficiency // Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME. 2008. V. 130. N 6. P. 0626011–06260110. doi: 10.1115/1.2898876
14. Yu W., Mechefske C.K. Analytical modeling of spur gear corner contact effects // Mechanism and Machine Theory. 2016. V. 96. P. 146–164. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.10.001
15. Абдуллаев А.И., Расулов Г.Н. Размерные цепи в многоступенчатых пакетных редукторах // Прогресивні технології і системи машинобудування. Міжнародний збірник научних трудов. 2011. № 1(41). С. 20–26.
16. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. 10-е изд., стер. М.: Высшая школа, 2006. 575 с.
17. Абдуллаев А.И., Наджафов А.М. Трехступенчатый двухпоточный цилиндрический редуктор. Евразийский патент № EA017053B1. Бюл. 2012. № 9.
18. Наджафов А.М., Абдуллаев А.И. О результатах промышленного испытания трехступенчатого двухпоточного пакетного редуктора станка-качалки СКД 3-1,5-710 // Вісник НТУ «ХП». Серія: Проблеми механічного приводу. 2013. № 40(1013). С. 89–93.
19. Расулов Н.М., Надилов У.М. Исследование точности формирования диаметральных размеров при зубодолблении ступенчатым долбяком // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 5. С. 893–899. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-5-893-899
2. Gutin S.Ya., Vlasov M.Yu. Information technologies in initial design and parameter optimization of parallel-shaft reduction gear units. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2004, 110 p. (in Russian)
3. Eliseev Yu.S., Nezhurin I.P. Deformations and inaccuracies in gearing and their role in gear operation. Vestnik mashinostroeniya, 1999, no. 8, pp. 28–31. (in Russian)
4. Starzhinsky V.E., Basiniuk U.L., Mardasevich A.I., Shalobaev E.V. Analysis of publications for the problem of optimization of gear mechanism arrangement. The messenger of the NTU “KHPI”, 2013, no. 40(1013), pp. 156–169. (in Russian)
5. Production technology and methods for quality maintenance of gear wheels and pairs. TUTORIAL. Ed. by V.E. Starzhinskii, M.M. Kane. St. Petersburg, Professija Publ., 2007, 832 p. (in Russian)
6. Johnson K.L. Contact mechanics. Cambridge University Press, 1985.
7. Dроздов Yu.N., Yudin E.G., Belov A.I. Applied Tribology: Friction, Wear, Lubrication in Technical Systems. Moscow, Eco-Press Publ., 2010, 604 p. (in Russian)
8. Sánchez M.B., Pleguezuelos M., Pedrero J.I. Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects. Mechanism and Machine Theory, 2017, vol. 109, pp. 231–249. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.11.014
9. Sánchez M.B., Pleguezuelos M., Pedrero J.I. Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears. Meccanica, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 527–543. doi: 10.1007/s11012-012-9612-8
10. Antoniuk V.E., Pavlovski V.J., Poddubko S.N., Aleksandrova V.S., Nikolaenkova I.N. Longitudinal updating of cogwheels of planetary transfers of mobile cars. Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials, 2011, no. 4(17), pp. 37–41. (in Russian)
11. Zhabin A.I., Kivenson A.I., Smirnova E.V. Methods and facilities for accuracy improvement of gears according to gear edge contact norms (review). Vestnik mashinostroeniya, 1990, no. 4, pp. 46–50. (in Russian)
12. Romanov V.V., Spitsyn V.E., Deinekin A.S., Mironenko A.I. Gear pairs of reduction units with profile-longitudinal modification of teeth. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2009, vol. 4, no. 6(40), pp. 39–44. (in Russian)
13. Petry-Johnson T.T., Kahraman A., Anderson N.E., Chase D.R. An experimental investigation of spur gear efficiency. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2008, vol. 130, no. 6, pp. 0626011–06260110. doi: 10.1115/1.2898876
14. Yu W., Mechefske C.K. Analytical modeling of spur gear corner contact effects. Mechanism and Machine Theory, 2016, vol. 96, pp. 146–164. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.10.001
15. Abdullaev A.I., Rasulov G.N. Dimensional chains in the multistage package reducers. Progressive technologies and systems of mechanical engineering, 2011, no. 1(41), pp. 20–26. (in Russian)
16. Venttsel E.S. Probability Theory. 10<sup>th</sup> ed. Vysshaya shkola Publ., 2006, 575 p. (in Russian)
17. Abdullaev A.I., Nadzhafov A.M. Triple twin cylindrical reduction gear. Patent EA017053B1, 2012. (in Russian)
18. Najafov A.M., Abdullayev A.I. About results of release testing of triple-reduction double-flow package gear of sucker-rod pump models SKD 3-1,5-710. The messenger of the NTU “KHPI”, 2013, no. 40(1013), pp. 89–93. (in Russian)
19. Rasulov N.M., Nadirov U.M. Accuracy research of the diametrical sizes forming at gear shaping by stepped cutter. Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics, 2015, vol. 15, no. 5, pp. 893–899. (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-5-893-899

#### Авторы

**Абдуллаев Аяз Идаят** — доктор технических наук, профессор, профессор, Азербайджанский технический университет, Баку, AZ1073, Азербайджан; редактор, Международный научно-технический журнал «Машиноведение», Баку, AZ1073, Азербайджан, ORCID ID: 0000-0002-0028-7860, abu\_ayaz@aztu.edu.az

**Расулов Гошгар Нариман** — старший преподаватель, Азербайджанский технический университет, Баку, AZ1073, Азербайджан, ORCID ID: 0000-0001-9752-1096, qoshqarrasul@gmail.com

**Исмаилов Орхан Фуад** — ассистент, Азербайджанский технический университет, Баку, AZ1073, Азербайджан, ORCID ID: 0000-0002-5432-6175, orxan-ismayiloff@mail.ru

#### Authors

**Ayaz I. Abdullayev** — D.Sc., Full Professor, Azerbaijan Technical University, Baku, AZ1073, Azerbaijan; Chief Editor, International Scientific-Technical Journal “Machine Science”, Baku, AZ1073, Azerbaijan, ORCID ID: 0000-0002-0028-7860, abu\_ayaz@aztu.edu.az

**Goshgar N. Rasulov** — Senior Lecturer, Azerbaijan Technical University, Baku, AZ1073, Azerbaijan, ORCID ID: 0000-0001-9752-1096, qoshqarrasul@gmail.com

**Orkhan F. Ismayilov** — Assistant, Azerbaijan Technical University, Baku, AZ1073, Azerbaijan, ORCID ID: 0000-0002-5432-6175, orxan-ismayiloff@mail.ru