

УДК 004.942

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-249-256

## АНАЛИЗ ДИНАМИКИ МЕР ЦЕНТРАЛЬНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

Ф.Л. Шуваев, М.В. Татарка

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация  
 Адрес для переписки: cadetfed@mail.ru

### Информация о статье

Поступила в редакцию 16.01.20, принята к печати 20.02.20  
 Язык статьи — русский

**Ссылка для цитирования:** Шуваев Ф.Л., Татарка М.В. Анализ динамики мер центральности математических моделей случайных графов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 2. С. 249–256. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-249-256

### Аннотация

**Предмет исследования.** При проектировании и обеспечении информационной безопасности систем связи одним из самых мощных инструментов является имитационное моделирование, которое по сравнению с другими методами позволяет рассматривать системы связи большой емкости, улучшать качество решений по управлению ресурсом сети и точнее прогнозировать их последствия. При этом базовыми математическими моделями для анализируемых систем являются случайные графы. Они дают фундаментальное понимание свойств анализируемых сетей и служат основой для имитационного моделирования. Учитывая высокие темпы развития вычислительных возможностей компьютеров и сред имитационного моделирования, особенно актуальным становится вопрос исследования топологических свойств случайных графов, заключающийся в анализе вероятностной динамики мер центральности. **Метод.** В ходе эксперимента использованы методы расчета центральности для вершин и графа в целом, основанные на научном аппарате теории графов. При исследовании вероятностной динамики математических моделей графов применена методика сравнения, основанная на диаграммах размахов. **Основные результаты.** Выполнено исследование динамики мер центральности в модели случайного графа Эрдеша–Реньи, модели малого мира Уоттса–Строгатца и свободно масштабируемой модели Барабаша–Альберта. Проведено сравнение мер центральности этих моделей с реальной сетью. Выявлено, что топологические свойства реальной сети наиболее полно описывает модель Барабаша–Альберта. Представленный в статье анализ мер центральности позволяет проследить взаимосвязи между параметрами различных моделей графов, что в свою очередь может быть применено в анализе реальных сетей. **Практическая значимость.** Полученные результаты могут быть применены при моделировании физических и социальных систем, представленных в виде графов. Представленные материалы полезны специалистам, занимающимся анализом сетей в различных областях науки и техники: социологии, медицины, физики и радиотехники.

### Ключевые слова

граф, вершина, центральность «по посредничеству», центральность «по близости», центральность «по степени», диаграмма размахов

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-249-256

## DYNAMICS OF CENTRALITY MEASURES OF RANDOM GRAPH MATHEMATICAL MODELS

F.L. Shuvaev, M.V. Tatarka

Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation  
 Corresponding author: cadetfed@mail.ru

### Article info

Received 16.01.20, accepted 20.02.20  
 Article in Russian

**For citation:** Shuvaev F.L., Tatarka M.V. Dynamics of centrality measures of random graph mathematical models. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 2, pp. 249–256 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-249-256

### Abstract

**Subject of Research.** Simulation is one of the most powerful tools among information security provision measures in the design process of communication systems. As compared to other methods, it considers large-capacity communication systems, improves the quality of network resource management solutions and predicts more accurately their

consequences. In this case, random graphs are the basic mathematical models for the analyzed systems. They provide fundamental understanding of the analyzed network properties and serve as the basis for simulation. With regard to the processing power high development rate for computers and simulation environments, the study of the topological properties of random graphs becomes especially urgent. It involves analyzing the probabilistic dynamics of centrality measures. **Method.** In the experiment we used centrality calculation methods for vertices and the graph as a whole based on the scientific apparatus of the graph theory. Comparison method based on span diagrams was used in the study of probabilistic dynamics of graph mathematical models. **Main Results.** We have studied the dynamics of centrality measures in the Erdős-Renyi random graph model, the Watts-Strogatz small world model and the freely scalable Barabashi-Albert model. The centrality measures of these models have been compared with a real network. We have made it clear that the topological properties of a real network are described by the Barabashi-Albert model to the fullest extent possible. The analysis of centrality measures presented in the paper gives the possibility to trace interconnections between the parameters of various graph models, that, in turn, can be used in the analysis of real networks. **Practical Relevance.** The obtained results can be applied in modeling of physical and social systems presented in the form of graphs. The paper findings are of interest for professionals involved in the analysis of networks in various fields of science and technology: sociology, medicine, physics and radio engineering.

**Keywords**

graph, node, betweenness centrality, closeness centrality, centrality based on degree, span diagram

**Введение**

Теория графов играет огромную роль в фундаментальной и прикладной математике [1]. В сочетании с комбинаторикой, теорией вероятностей и современными средствами имитационного моделирования активно развивается подраздел теории графов — случайные графы. Случайные графы позволяют решать прикладные практические задачи в области проектирования сетей связи, социологии и информационной безопасности [2–5]. Успешное решение таких задач обусловлено более верным осознанием природы сетей, получаемым в результате имитационного моделирования случайных графов. В то же время свойства этих моделей исследованы слабо, что обусловлено тем, что только последние 2–3 года появились полноценные средства для имитационного моделирования случайных графов. Существует около десяти математических моделей случайных графов, при этом основными, наиболее полно отражающими природу сетей, являются: модель случайного графа Эрдеша–Реньи, модель малого мира Уоттса–Строгатца и свободно масштабируемая модель Барабаша–Альберта [6–8]. При всем изобилии математических моделей случайных графов нет точного понимания, какие же из них более приближены к реальным сетям. Исследуем топологические свойства этих моделей, рассчитав меры центральности графов: «по посредничеству», «по близости» и «по степени» [9].

**Способы расчета мер центральности для вершин и для графа в целом**

Рассмотрим граф  $G = (V, E)$ , в котором  $V$  — конечное множество вершин, а  $E$  — конечное множество пар вершин. Для графа  $G$  существует три базовые меры центральности, применяемые для описания потенциальной важности вершины графа. Самой интуитивно-понятной является концепция, в основе которой лежит предположение, что вершина с большим значением степени является самой важной [10]. Центральность «по степени»  $C_D$  вершины  $v$  рассчитывается как количество смежных с ней вершин:

$$C_D(v) = \sum_{j=1}^{|V|} a(v, j),$$

где  $a(v, j) = 1$  только тогда, когда вершины соединены ребром;  $a$  — функция, принимающая значение «1» если вершины смежны, «0» — в других случаях.

На практике для расчетов применяется следующий вариант определения центральности вершины, не зависящий от размеров сети — относительная центральность «по степени»:

$$C_D(v) = \frac{\sum_{j=1}^{|V|} a(v, j)}{|V| - 1}.$$

Другой взгляд на центральность основывается на частоте прохождения через вершину кратчайших путей между всеми парами вершин и называется посредничеством [10–12]. Считается, что вершина с наибольшим значением центральности «по посредничеству» наибольшим образом влияет на группы остальных вершин, так как является основной при транзите информации через нее. Определим, что  $q_{vj}$  — количество кратчайших путей от вершины графа  $v$  до вершины графа  $j$ , а  $q_{vj}(k)$  — количество кратчайших путей от  $v$  до  $j$ , проходящих через вершину  $k$ . Тогда центральность «по посредничеству»  $C_B(k)$  рассчитывается:

$$C_B(k) = \sum_v \sum_j \frac{q_{vj}(k)}{q_{vj}}.$$

Самым распространенным способом нормализации является деление значения центральности на количество пар вершин  $|V|^2$ :

$$C_B(k) = \frac{1}{|V|^2} \sum_v \sum_j \frac{q_{vj}(k)}{q_{vj}}.$$

В этом случае значения центральности будут ограничены числами от 0 до 1.

Третья концепция определения центральности вершины «по близости» также базируется на идее контроля отношений между вершинами графа. Центральную позицию занимает вершина, наиболее независимая от остальных вершин при передаче информации. В таком случае центральность «по близости»  $C_C(k)$  измеряется путем суммирования геодезических расстояний  $d$  от вершины  $k$  до всех остальных [10]:

$$C_C(k)^{-1} = \sum_v d(v, k).$$

При таком определении вершина будет иметь максимальную центральность, если она наиболее удалена от остальных. Для расчетов принято центральность «по близости» рассматривать как величину, обратную значению  $C_C(k)^{-1}$ , умноженную на  $|V|-1$ :

$$C_C(k) = \frac{|V| - 1}{\sum_v d(v, k)}.$$

Перейдем к рассмотрению понятия центральности графа в целом. Наиболее распространенный подход — рассматривать центральность графа как степень отличия значения меры центральности вершины с наибольшим значением от значений для других вершин [10, 13]. Таким образом, центральность графа должна показывать:

- до какой степени центральность самой центральной вершины больше центральности остальных вершин [10, 14];
- выражаться отношением приращения центральности к максимально возможному значению для графа, содержащего рассматриваемое количество вершин. Другими словами, если  $C_G(v_i)$  — центральность вершины  $v_i$  (для любой из рассмотренных мер) графа  $G = \{V, E\}$ , а  $C_G(v^*)$  — наибольшее значение центральности вершины, то центральность графа рассчитывается как

$$C_G = \frac{\sum_{i=1}^{|V|} [C_G(v^*) - C_G(v_i)]}{|V| - 1}.$$

Исследование топологических свойств случайных графов подразумевает под собой изучение вероятностной динамики основных мер центральности графов, т. е. их изменение с ростом количества вершин  $V$ , при различной вероятности  $P(V)$  их появления [15]. Исследуем вероятностную динамику на базе имитационного моделирования рассмотренных ниже моделей случайных графов.

### Модель случайного графа Эрдеша–Реньи

Модель случайного графа Эрдеша–Реньи предложили венгерские математики П. Эрдеш и Э. Реньи. Будем поочередно выбирать натуральное целое число  $n$  из множества  $\{n \in \mathbb{N} | n \leq 1000\}$ , таким образом  $V = \{1, \dots, n\}$  — множество вершин моделируемых случайных графов. Пусть  $E \in \{e_1, \dots, e_n\}$  — все возможные ребра, которые можно провести на парах элементов из  $V$ . Зададимся некоторой вероятностью  $p \in [0, 1]$  и станем выбирать ребра из множества  $\{e_1, \dots, e_n\}$  по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$ , т. е. в случае успеха вносим очередное ребро в строящееся множество ребер  $E$ , а в случае неудачи — не вносим. В результате этих преобразований получаем случайный граф  $G = \{V, E\}$  Эрдеша–Реньи [1, 16].

Проведем имитационное моделирование случайных графов Эрдеша–Реньи для исследования вероятностной динамики мер центральности по следующей схеме:

- 1) количество вершин графов меняется в диапазоне  $\{n \in \mathbb{N} | n \leq 1000\}$  с шагом 1. При этом значение вероятности  $p(e)$  образования ребра  $e$  фиксируется;
- 2) на каждом шаге изменения  $V$  формируется граф на базе модели Эрдеша–Реньи и измеряются три меры центральности:  $C_D(V)$ ,  $C_B(V)$  и  $C_C(V)$ ;
- 3) полученные значения наносятся на график зависимости числа вершин от значения меры центральности;
- 4) для исследования влияния вероятности добавления ребра параметра  $p(e)$  на значение центральности графа, пп. 1–3 циклично выполняются для вектора параметров  $\mathbf{p} = \{0,005; 0,01; 0,02; 0,03; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3\}$ .

Результаты имитационного моделирования представлены на рис. 1. Исходя из рисунка видно, что центральность «по посредничеству» при  $\mathbf{p} = \{0,005; 0,01\}$  имеет точку экстремума, до которой значения централизации возрастают, после — уменьшаются. С увеличением значений вектора параметров  $\mathbf{p} = \{0,02; 0,03; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3\}$  зависимость стремится к линейной форме.

На рис. 1 для значений центральности «по близости» при изменении параметров  $\mathbf{p} = \{0,02; 0,03; 0,05\}$  видны переходные процессы, при которых функция из монотонно возрастающей переходит в монотонно убывающую.

Значения центральности «по степени» имеют большую изменчивость при увеличении параметра  $p(e)$ . При малых значениях данного параметра центральность «по степени» почти не меняется для любой размерности графа.

Рассмотрим вероятностную динамику мер центральности графа. Для этого построим диаграммы размахов, представленные на рис. 2. Диаграмма размахов — это удобный способ представления групп числовых данных через квартили. Прямые вертикальные линии означают степени разброса величины центральности, горизонтальная линия — среднее значение, закрашенные области — квартили. Имитационное моделирование будем проводить по схеме, представленной ранее.

Исходя из рис. 2 видно, что среднее центральности «по посредничеству» уменьшается с увеличением вероятности образования ребра, вместе с этим уменьшается степень разброса значений центральности «по посредничеству».

Среднее центральности «по степени» наоборот увеличивается с ростом вероятности  $p$ , а степень разброса — увеличивается.

Вероятностная динамика центральности «по близости» имеет нелинейную форму. Среднее последовательно увеличивается и уменьшается, степень разброса значений достаточна велика. Основным фактором, влияющим на центральность «по близости», является размерность графа. Ввиду этого вероятностная динамика этой меры центральности также нелинейна.

### Модель малого мира Уоттса–Строгатца

Модель малого мира предложена в 1998 году американскими учеными Д. Уоттсом и С. Строгатцем [1, 17].

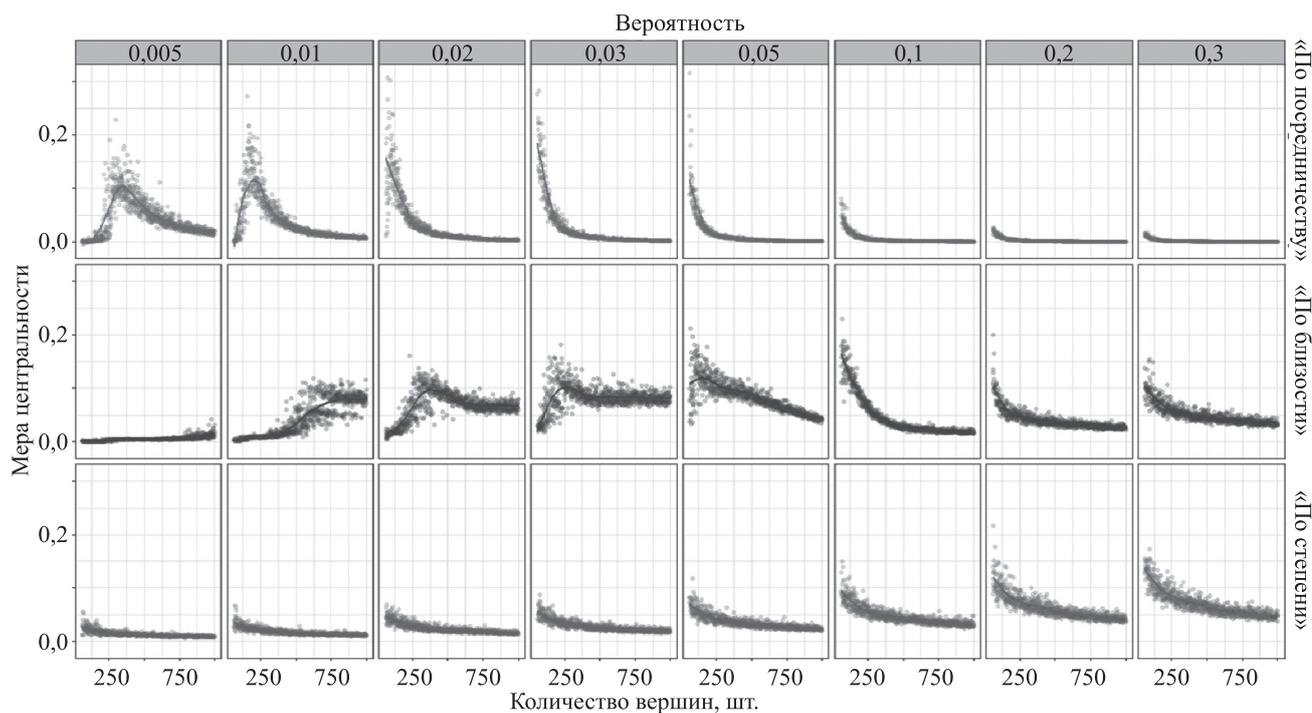


Рис. 1. Зависимость значений мер центральности графа, построенного на базе модели Эрдеша–Реньи, от числа вершин для различных значений  $p$  вероятности образования ребра

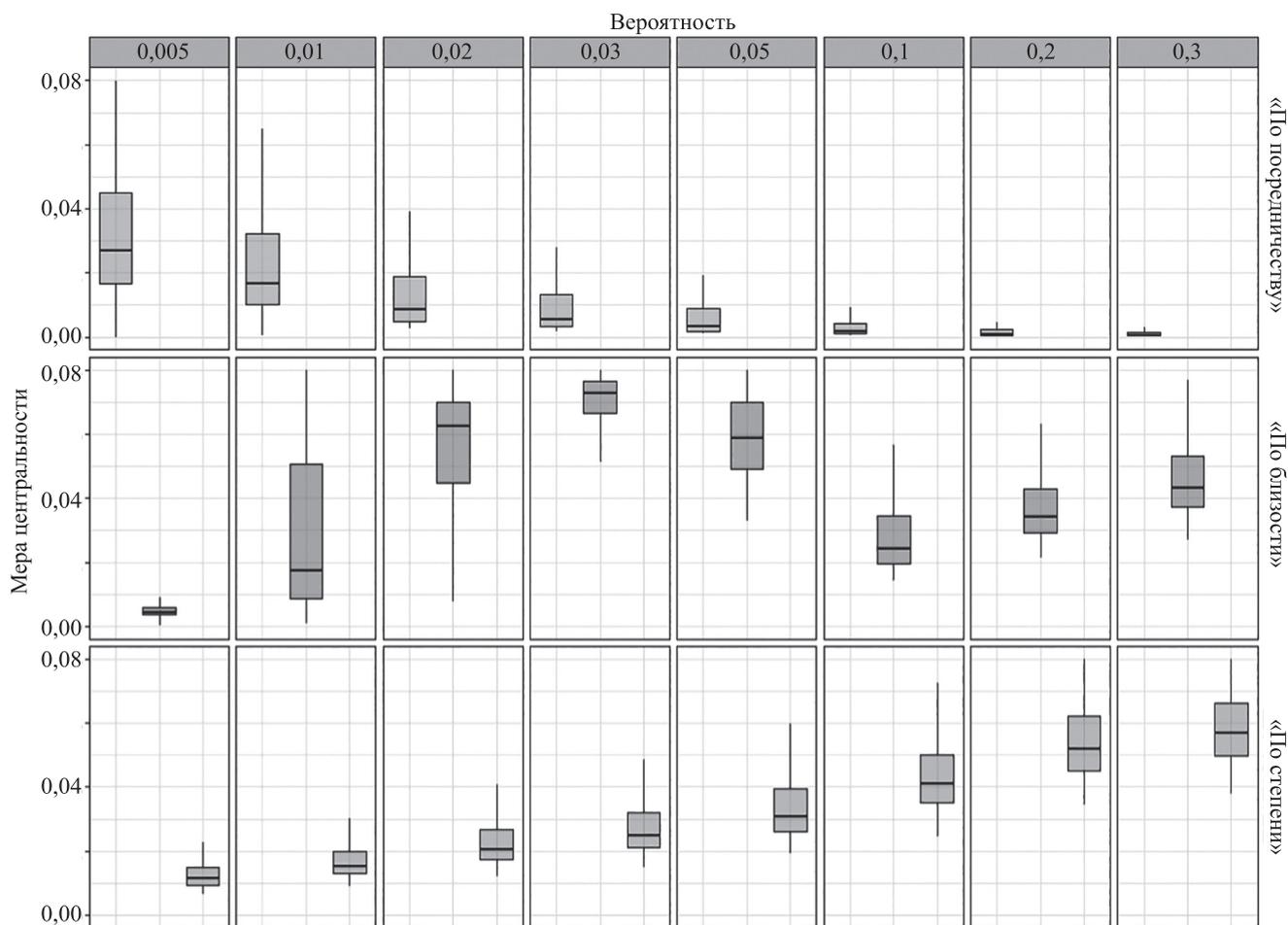


Рис. 2. Вероятностная динамика мер центральности в графе, построенном на базе модели Эрдеша–Реньи

Она представляет собой одномерную регулярную решетку, состоящую из  $V$  вершин, причем каждая из вершин соединена только с  $k$  ближайшими соседями, и наложены периодические граничные условия (вероятность соединения с любыми другими вершинами, кроме соседних равна нулю), т. е. решетка свернута в кольцо при  $p = 0$ . После этого каждая связь с заданной вероятностью  $p$  перебрасывается на другую случайно выбранную вершину. При  $p = 0$  получаем граф с исходной решеткой, при  $p = 1$  — случайный граф Эрдеша–Реньи.

Проанализируем динамику изменения мер центральности для модели малого мира. Для выявления динамики проведем имитационное моделирование по следующей схеме.

1. Зафиксируем количество вершин моделируемого графа в  $|V| = 300$ . Построим 1000 графов малого мира с  $k = 1$  ближайшими соседями и вероятностью переключения ребер  $p = 0,01$ , измерим среднее значение трех мер центральности.
2. Повторим п. 1, увеличив вероятность переключения ребер на 0,01. Итерационно осуществим расчеты до значения  $p = 0,2$  с шагом 0,01;
3. Повторим пп. 1–2 для значений  $k = 2, 3, 4$ .

Результаты имитационного моделирования для модели Уоттса–Строгатца представлены на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что централизация «по близости» ( $C_C$ ) мало зависит от параметра  $k$  числа ближайших соседей для вершины и имеет низкие значения на всех значениях переключения вероятности. Линейный тренд имеет централизация «по степени» ( $C_D$ ), значения ее выше, чем централизации «по близости». Централизация «по посредничеству» ( $C_B$ ) имеет тренд, близкий к убывающей экспоненте, ее значения для

всех  $k$  ближайших соседей уменьшается с увеличением параметра  $p$ .

### Модель предпочтительного присоединения Барабаши–Альберта

Анализ предыдущих математических моделей показал, что они позволяют строить графы с характеристиками, не свойственными многим реальным сетям. В реальных сетях в процессе роста новые вершины с большей вероятностью образуют ребра с вершинами, уже имеющими много связей, в силу их выдающегося положения в сети. Для изучения реальных сетей разработан класс моделей, получивших название свободно масштабируемые модели, самой распространенной среди них считается модель предпочтительного присоединения Барабаши–Альберта [18, 19]. Формируется она по следующему принципу:

- 1) в начальный момент времени  $t = 0$  есть  $V_i$  несвязных вершин;
- 2) на каждом шаге ( $t = 1, 2, 3$ ) будем присоединять вершину с  $E_i$  ребрами;
- 3) количество ребер, с которыми приходит в граф новая вершина, остается постоянным, и соединяется она с уже существующей вершиной сети с вероятностью, пропорциональной степени этой вершины.

Наиболее полно отражает природу реальных сетей модель Барабаши–Альберта с введенным параметром распределения вероятностей соединения вершин [20]. При таком варианте построения модели вводится вектор распределения вероятностей образования вершин. На рис. 4, а представлен граф, построенный по модели Барабаши–Альберта без параметра распределения вероятностей, т. е. количество вершин в ней фикси-

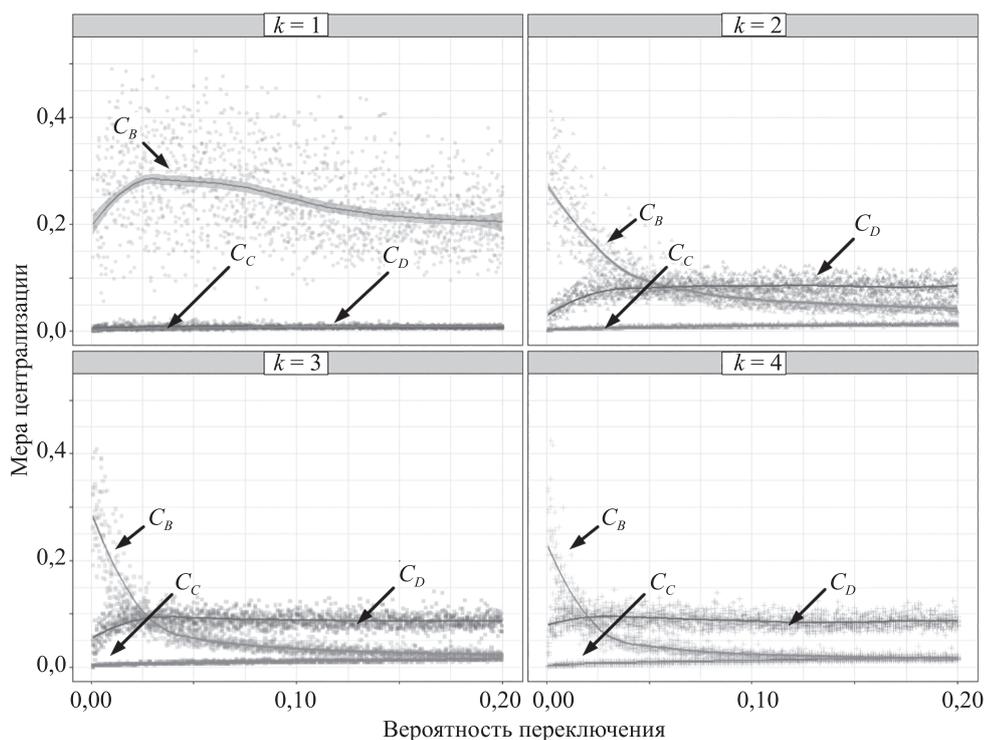


Рис. 3. Вероятностная динамика мер центральности в графе, построенном на базе модели Уоттса–Строгатца

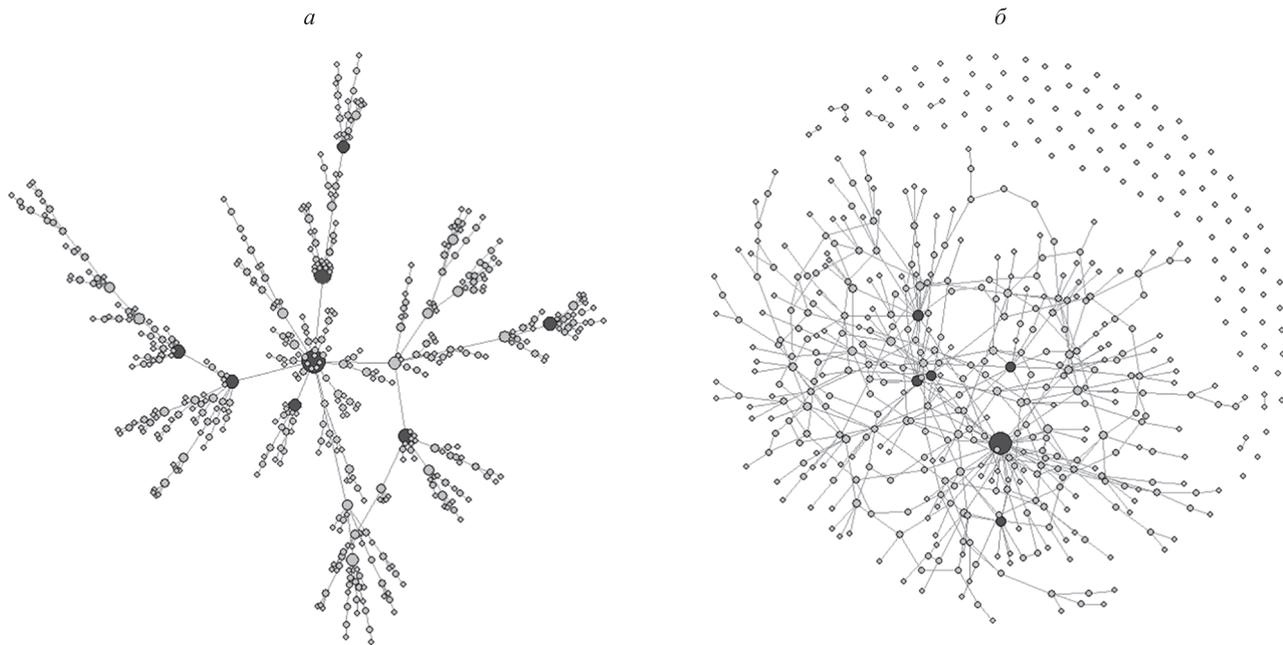


Рис. 4. Граф, построенный на базе модели Барабаши–Альберта: без дополнительных параметров (а); с дополнительными параметрами (б)

ровано и равно 500, а вновь появляющиеся вершины соединяются с вершинами с большей степенью. На рис. 4, б представлен граф, построенный по модели Барабаши–Альберта, но со следующим введенным вектором распределения вероятностей образования вершин:  $p_1 = 0,25$  — вершина изолирована;  $p_2 = 0,5$  — вершина соединяется с одной вершиной;  $p_3 = 0,25$  — вершина соединяется с двумя вершинами [20].

Исходя из рис. 4, б видно, что построенный граф содержит изолированные вершины и вершины, обладающие высокой степенью (увеличены в размерах).

Проведем имитационное моделирование графа Барабаши–Альберта изменяя количество вершин в диапазоне  $\{n \in \mathbb{N} | 5 \leq n \leq 5000\}$  с шагом 1 для восьми векторов распределения вероятностей соединения вершин:  $\mathbf{P}_1 = \{0,25; 0,25; 0,25\}$ ,  $\mathbf{P}_2 = \{0,25; 0,25; 0,7\}$ ,  $\mathbf{P}_3 = \{0,25; 0,7; 0,25\}$ ,  $\mathbf{P}_4 = \{0,25; 0,7; 0,7\}$ ,  $\mathbf{P}_5 = \{0,7; 0,25; 0,25\}$ ,  $\mathbf{P}_6 = \{0,7; 0,25; 0,7\}$ ,  $\mathbf{P}_7 = \{0,7; 0,7; 0,25\}$ ,  $\mathbf{P}_8 = \{0,7; 0,7; 0,7\}$ . Результаты имитационного моделирования представлены на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что все три меры центральности нелинейно уменьшаются с ростом количества вершин. Наибольший разброс имеет центральность «по посредничеству», наименьший — центральность «по близости». При этом значения вектора распределения вероятностей соединения вершин в целом

не меняют динамику мер центральности в модели. Из результатов моделирования следует, что в модели Барабаши–Альберта меры центральности транзитивно упорядочены как  $C_B > C_D > C_C$ . Это означает, что граф, построенный на базе модели Барабаши–Альберта имеет тенденцию быть разделенным на подгруппы, соединенные между собой ребром или общей вершиной [10]. Данная тенденция подтверждает наибольшее соответствие реальным сетям именно этой модели.

#### Сравнительный анализ моделей случайных графов с сетью, построенной по реальным данным

Выполним сравнительный анализ моделей случайных графов с реальной сетью. Размер реальной сети — 1283 вершины. В таблице сведены характеристики трех рассмотренных моделей (такой же размерности) и реальной сети взаимосвязей между главами местных департаментов здравоохранения<sup>1</sup>.

Несмотря на то, что каждая модель перенимает характеристики реальной сети, ни одна из них не соответ-

<sup>1</sup> Режим доступа: Network data to accompany book «Network Analysis in R» Available at: <https://github.com/DougLuke/UserNetR/>, свободный. Яз. англ. (дата обращения 10.01.2020).

Таблица. Сравнение характеристик моделей и реальной сети

	Размер ( $V$ )	$C_B$	$C_D$	$C_C$
Эрдеша–Реньи	1283	0,0183	0,0068	0,0049
Уоттса–Строгатца	1283	0,0202	0,0039	0,043
Барабаши–Альберта	1283	0,1812	0,0208	0,0014
Реальная сеть	1283	0,1613	0,0138	0,0013

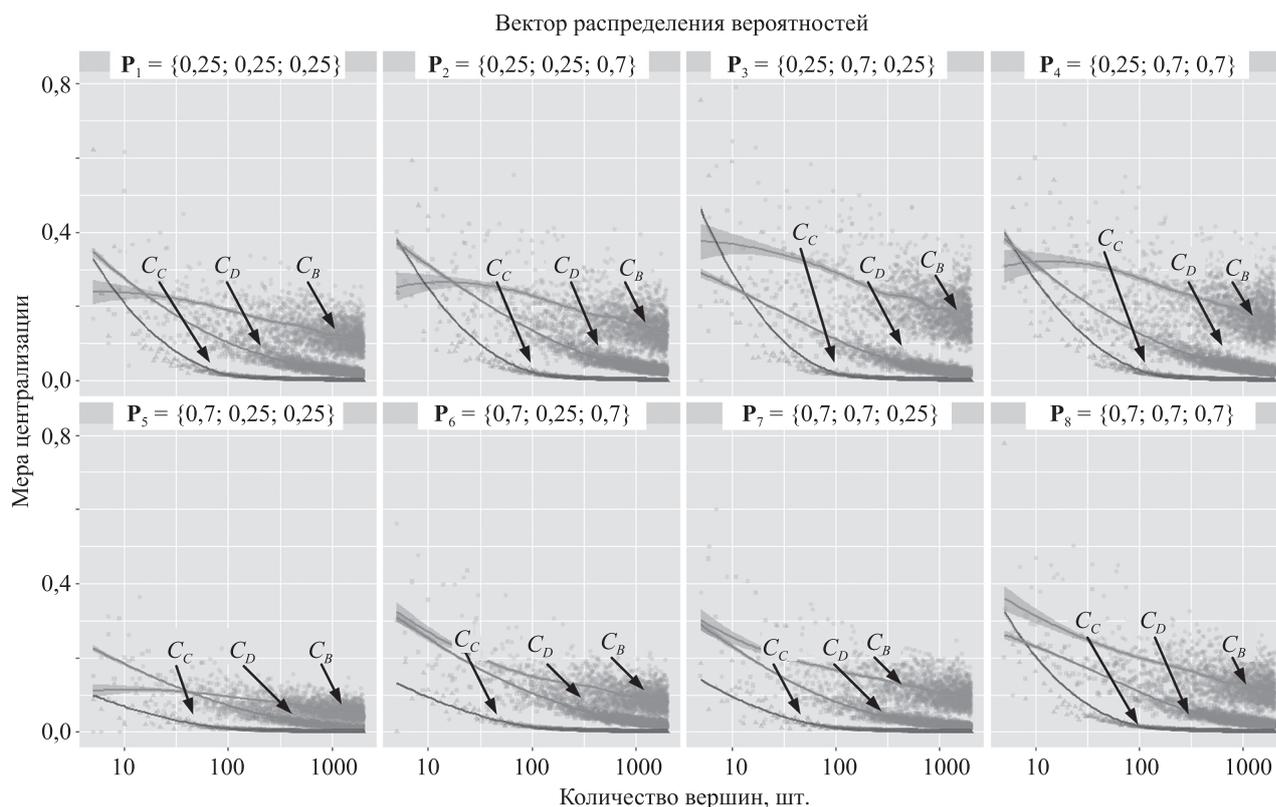


Рис. 5. Вероятностная динамика мер центральности в графе, построенном на базе модели Барабаши–Альберта с вектором распределения вероятностей соединения вершин

ствует ей в полной мере. Ближе всего к реальной сети, как и отмечалось ранее, относится граф, построенный на базе модели Барабаши–Альберта.

### Заключение

В статье выполнен анализ динамики изменения мер центральности основных моделей случайных графов. Проведено имитационное моделирование, в ходе которого получены оценки мер центральности, описывающих графы: «по близости», «по посредничеству» и «по

степени». Проведен эмпирический эксперимент, при выполнении которого сравнивались характеристики математических моделей графов и реальной сети.

В результате эксперимента выявлено, что топологические свойства реальной сети наиболее полно описывает модель Барабаши–Альберта. Представленное в статье исследование позволяет проследить взаимосвязи между параметрами различных моделей графов, что в свою очередь может быть применено в анализе реальных сетей.

### Литература

1. Райгородский А.М. Модели случайных графов. М.: Издательство МЦНМО, 2011. 134 с.
2. Шевченко Д.Н., Литвин А.Ю., Федянин М.А. Имитационное моделирование графа состояний в задачах анализа надежности технических систем // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 3(36). С. 101–104.
3. Chen P.-Y., Choudhury S., Hero A.O. Multi-centrality graph spectral decompositions and their application to cyber intrusion detection // Proc. 41<sup>st</sup> IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2016). 2016. P. 4553–4557. doi: 10.1109/ICASSP.2016.7472539
4. Newman M.E.J. Networks: an Introduction. N.Y.: Oxford University Press Inc., 2010. 1042 p.
5. Rodrigue J.-P. The Geography of Transport Systems. Taylor & Francis, 2017. 440 p.
6. Watts D., Strogatz H. Collective dynamics of «Small-world» networks // Nature. 1998. V. 393. N 6684. P. 440–442. doi: 10.1038/30918
7. Hartmann A., Mézard M. Distribution of diameters for Erdős-Rényi random graphs // Physical Review E. 2018. V. 97. N 3. P. 032128. doi: 10.1103/PhysRevE.97.032128

### References

1. Raigorodskii A.M. *Random Graph Models*. Moscow, MCCME Publ., 2011, 134 p. (in Russian)
2. Shevchenko D.N., Litvin A.U., Fedianin M.A. Reliability analysis of technical systems by simulation modeling of graph of states. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 3(36), pp. 101–104. (in Russian)
3. Chen P.-Y., Choudhury S., Hero A.O. Multi-centrality graph spectral decompositions and their application to cyber intrusion detection. *Proc. 41<sup>st</sup> IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2016)*, 2016, pp. 4553–4557. doi: 10.1109/ICASSP.2016.7472539
4. Newman M.E.J. *Networks: an Introduction*. N.Y., Oxford University Press Inc., 2010, 1042 p.
5. Rodrigue J.-P. *The Geography of Transport Systems*. Taylor & Francis, 2017, 440 p.
6. Watts D., Strogatz H. Collective dynamics of «Small-world» networks. *Nature*, 1998, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442. doi: 10.1038/30918
7. Hartmann A., Mézard M. Distribution of diameters for Erdős-Rényi random graphs. *Physical Review E*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 032128. doi: 10.1103/PhysRevE.97.032128

8. Le C., Levina E., Vershynin R. Concentration and regularization of random graphs // *Random Structures and Algorithms*. 2017. V. 51. N 3. P. 538–561. doi: 10.1002/rsa.20713
9. Bonchi F., De Francisci G., Riondato M. Centrality measures on big graphs: exact, approximated, and distributed algorithms // *Proc. 25<sup>th</sup> International Conference Companion on World Wide Web*. 2016. P. 1017–1020. doi: 10.1145/2872518.2891063
10. Щербакова Н.Г. Меры центральности в сетях // *Проблемы информатики*. 2015. № 2. С. 18–30.
11. Бредихин С.В., Ляпунов В.М., Щербакова Н.Г. Мера важности научной периодики — «Центральность по посредничеству» // *Проблемы информатики*. 2014. № 3. С. 53–63.
12. Brandes U., Borgatti S., Freeman L.C. Maintaining the duality of closeness and betweenness centrality // *Social Networks*. 2016. V. 44. P. 153–159. doi: 10.1016/j.socnet.2015.08.003
13. Юдина М.Н. Узлы в социальных сетях: меры центральности и роль в сетевых процессах // *Омский научный вестник*. 2016. № 4. С. 161–165.
14. Piraveenan M. Topological analysis of complex networks using assortativity. PhD Diss. Sydney: University of Sydney, 2010. 189 p.
15. Van Mieghem P., Ge X., Schumm P., Trajanovski S., Wang H. Spectral graph analysis of modularity and assortativity // *Physical Review E*. 2010. V. 82. N 5. P. 056113. doi: 10.1103/PhysRevE.82.056113
16. Barzel B., Biham O. Quantifying the connectivity of a network: the network correlation function method // *Physical Review E*. 2009. V. 80. N 4. P. 046104. doi: 10.1103/PhysRevE.80.046104
17. Gibson H., Vickers P. Using adjacency matrices to lay out larger small-world networks // *Applied Soft Computing Journal*. 2016. V. 42. P. 80–92. doi: 10.1016/j.asoc.2016.01.036
18. Barabasi A. *Network Science*. Glasgow: Cambridge University Press, 2016. 453 p.
19. Stauffer D., Meyer-Ortmanns H. Simulation of consensus model of deffuant et al. on a Barabási–Albert network // *International Journal of Modern Physics*. 2004. V. 15. N 2. P. 241–246. doi: 10.1142/S0129183104005644
20. Люк Д. Анализ сетей (графов) в среде R: Руководство пользователя / пер. с англ. А.М. Груздева. Издательство ДМК Пресс, 2017. 250 с.
8. Le C., Levina E., Vershynin R. Concentration and regularization of random graphs. *Random Structures and Algorithms*, 2017, vol. 51, no. 3, pp. 538–561. doi: 10.1002/rsa.20713
9. Bonchi F., De Francisci G., Riondato M. Centrality measures on big graphs: exact, approximated, and distributed algorithms. *Proc. 25<sup>th</sup> International Conference Companion on World Wide Web*, 2016, pp. 1017–1020. doi: 10.1145/2872518.2891063
10. Shcherbakova N.G. Centrality measures in networks. *Problems of Informatics*, 2015, no. 2, pp. 18–30. (in Russian)
11. Bredikhin S.V., Liapunov V.M., Shcherbakova N.G. Importance measure of scientific periodicals — “Betweenness centrality”. *Problems of Informatics*, 2014, no. 3, pp. 53–63. (in Russian)
12. Brandes U., Borgatti S., Freeman L.C. Maintaining the duality of closeness and betweenness centrality. *Social Networks*, 2016, vol. 44, pp. 153–159. doi: 10.1016/j.socnet.2015.08.003
13. Yudina M.N. The nodes of social networks: measures of centrality and role in network processes. *Omsk Scientific Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 161–165. (in Russian)
14. Piraveenan M. *Topological analysis of complex networks using assortativity*. PhD Diss. Sydney, University of Sydney, 2010, 189 p.
15. Van Mieghem P., Ge X., Schumm P., Trajanovski S., Wang H. Spectral graph analysis of modularity and assortativity. *Physical Review E*, 2010, vol. 82, no. 5, pp. 056113. doi: 10.1103/PhysRevE.82.056113
16. Barzel B., Biham O. Quantifying the connectivity of a network: the network correlation function method. *Physical Review E*, 2009, vol. 80, no. 4, pp. 046104. doi: 10.1103/PhysRevE.80.046104
17. Gibson H., Vickers P. Using adjacency matrices to lay out larger small-world networks. *Applied Soft Computing Journal*, 2016, vol. 42, pp. 80–92. doi: 10.1016/j.asoc.2016.01.036
18. Barabasi A. *Network Science*. Glasgow, Cambridge University Press, 2016, 453 p.
19. Stauffer D., Meyer-Ortmanns H. Simulation of consensus model of deffuant et al. on a Barabási–Albert network. *International Journal of Modern Physics*, 2004, vol. 15, no. 2, pp. 241–246. doi: 10.1142/S0129183104005644
20. Luke D. *A User’s Guide to Network Analysis in R*. Springer, 2015, 238 p.

#### Авторы

**Шуваев Федор Леонидович** — кандидат технических наук, научный сотрудник, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0001-7502-9455, cadetfed@mail.ru

**Татарка Максим Васильевич** — кандидат технических наук, докторант, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-4425-7671, maksimtbv@gmail.com

#### Authors

**Fedor L. Shuvaev** — PhD, Scientific Researcher, Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0001-7502-9455, cadetfed@mail.ru

**Maksim V. Tatarka** — PhD, Doctoral Student, Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-4425-7671, maksimtbv@gmail.com