НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
май–июнь 2020 Том 20 № 3 ISSN 2226-1494 http://ntv.itmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
May–June 2020 Vol. 20 No 3 ISSN 2226-1494 http://ntv.itmo.ru/en/

УДК 62-50 doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-364-370

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ РОБАСТНОСТИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р.О. Оморов

Институт физики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика
Адрес для переписки: romano_ip@list.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 17.04.20, принята к печати 15.05.20
Язык статьи — русский

Ссылка для цитирования: Оморов Р.О. Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 3. С. 364–370. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-364-370

Аннотация
Рассмотрен алгебраический метод исследований робастной устойчивости непрерывных и дискретных интервальных динамических систем. Представлены оригинальные результаты робастности, полученные для непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, в рамках алгебраического направления робастной устойчивости. Сформулирована и доказана базовая теорема о робастной устойчивости линейной непрерывной динамической системы с интервальными элементами матрицы правой части, которая определяется через сепаратные угловые коэффициенты характеристического полинома системы. Доказательство выполнено на основе леммы о сепаратных коэффициентах характеристического полинома, получаемых оптимизационными методами нелинейного программирования на множестве интервальных элементов матрицы системы, возможными значениями которых могут быть верхняя или нижняя границы соответствующего интервала или нуль. Сформулировано уточняющее замечание к базовой теореме для непрерывных систем о необходимости полного множества (набора) из четырех угловых полиномов для робастной устойчивости системы, исключающее кратные случаи характеристического полинома, когда множество полиномов Харитонова вырождается и будет состоять из менее требуемых четырех различных полиномов. Получена теорема о необходимых и достаточных условиях робастной устойчивости многогранника интервальных матриц. Для дискретных систем получен дискретный аналог теоремы Харитонова. Приведен алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических систем. Рассмотрены сравнительные характеристики результатов, полученных в работах широко известных авторов алгебраического направления проблемы робастной устойчивости, которые показывают отличительную особенность данного метода, заключающуюся в рассмотрении интервальных матриц общего вида. Достоверность метода апробирована на известных контрпримерах к теореме Биаласа, а также других исследователей, изучающих проблемы робастной устойчивости интервальных динамических систем.

Ключевые слова
интервальная динамическая система, робастная устойчивость, алгебраическое направление робастной устойчивости, интервальный характеристический полином, угловые полиномы Харитонова, интервальная матрица, сепаратные угловые коэффициенты, многогранник матриц, дискретный аналог теорем Харитонова, точка и интервал перемежаемости, контрпримеры к теореме Биаласа

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-364-370

ROBUSTNESS RESEARCH OF INTERVAL DYNAMIC SYSTEMS BY ALGEBRAIC METHOD

R.O. Omorov

Institute of Physics of National Academy of Sciences KR, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic
Corresponding author: romano_ip@list.ru

Article info
Received 17.04.20, accepted 15.05.20
Article in Russian

For citation: Omorov R.O. Robustness research of interval dynamic systems by algebraic method. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 3, pp. 364–370 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-364-370

Abstract
The paper considers robust stability study of continuous and discrete interval dynamic systems by algebraic method. The original robustness results obtained for continuous and discrete linear interval dynamic systems within the algebraic direction of robustness stability are presented. The author formulated and proved the basic theorem on the robustness of linear continuous dynamic system with interval elements of the right-hand part matrix, which is determined through the separate angular coefficients of characteristic polynomial of the system. The basic theorem is proved on the basis of a lemma on the separative coefficients of the characteristic polynomial obtained by optimization methods of nonlinear programming on multiple interval elements of the system matrix. Their possible values can be the upper or lower limits of the corresponding interval or zero. A clarification note to the basic theorem for continuous systems is formulated. The idea lies in the need for a complete set of four angular polynomials for the robustness stability of the system, excluding multiple cases of the characteristic polynomial, when the set of Kharitonov polynomials degenerates and will consist of the less required four different polynomials. The theorem is obtained on the necessary and sufficient conditions of robustness stability for the polyhedron of interval matrices. A discrete analogue of the Kharitonov theorem is obtained for discrete systems. The algorithm of robustness stability determination for discrete interval dynamic systems is presented. Comparative characteristics of the results obtained in the works of well-known authors having studied the algebraic trend of robust stability problem are considered. They show the distinctive feature of this method, which consists in consideration of interval matrices of general type. The validity of the method is tested on the known counterexamples to Bialas's theorem, as well as the other researchers studying robustness problems of interval dynamic systems.

Keywords
interval dynamic system, robust stability, algebraic direction of robust stability, interval characteristic polynomial, Kharitonov's angular polynomials, interval matrix, separate slopes, polyhedron of matrixes, discrete analog of Kharitonov's theorems, intermittency point and interval, counterexamples to Bialas's theorem

Введение

В развитии современной теории управления наблюдается повышенный интерес к проблемам робастности и грубости систем [1–12]. Традиционное понимание грубости и робастности в современной литературе определяет робастность как способность систем сохранять те или иные свойства не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом, а грубость как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологии, при рассмотрении близких по виду уравнений систем [1, 2, 4, 11].

Тот интерес, к которому привлекают проблемы робастности и грубости в различных областях науки и техники, да и не только в теории управления, но и в экологии, синергетике и т. д., связан с тем, что эти понятия относятся к важнейшим свойствам систем, рассматриваемых при их реальном функционировании.

Как известно, основоположником алгебраического направления исследований робастности интервальных систем является российский советский ученый В.Л. Харитонов. В работах В.Л. Харитонова 1978 года решены вопросы об устойчивости семейства полиномов непрерывного времени с интервальными коэффициентами. Им было установлено, что для устойчивости интервального полинома необходимо и достаточно устойчивости лишь четырех угловых полиномов семейства, которые теперь носят название полиномов Харитонова [13].

На данный момент недостаточно рассмотрены вопросы построения робастных и грубых нелинейных систем управления. При этом для инженерных применений необходимо рассмотреть и большие (конечные) возмущения, т. е. вопросы робастности и грубости в большом, а также следует отметить, что на практике модели и параметры возмущений могут быть не только известны, но и неопределенны [14–16].

В настоящее время получено много новых результатов в теории робастной устойчивости, это прежде всего реберная теорема и дискретные аналоги, и варианты теорем Харитонова. Советскими и российскими учеными — Я.З. Цыпкиным, Б.Т. Поляком, Ю.И. Неймарком разработаны частотные критерии робастной устойчивости типа Михайлова, Найквиста, *D*-разбиения [10, 12, 17–19].

В данной работе приведены сравнительные характеристики известных результатов, полученных в работах широко известных авторов алгебраического направления проблемы робастной устойчивости [4, 7–9, 16, 19].

В работах [4, 8, 9, 11] представлены обзоры и постановки задач робастной устойчивости, которые были вызваны известной работой В.Л. Харитонова [13].

В работе Б.Т. Поляка, П.С. Щербакова [19] предложено понятие сверхустойчивости линейных систем управления. При этом сверхустойчивые системы обладают свойствами выпуклости, допускающими простые решения многих классических задач теории управления, в частности, задачи робастной стабилизации при матричной неопределенности. Но существенным ограничением таких систем является практическая узость их класса, определяемого условиями наличия доминирующих диагональных элементов матрицы системы с отрицательными величинами. В данной работе рассматриваются матрицы общего вида.

В работе В.М. Кунцевича [16] получены интересные результаты по робастной устойчивости для линейных дискретных систем. При этом матрица системы задается в классе сопровождающих характеристический полином системы, т. е. в фробениусовой форме, что также сужает класс рассматриваемых реальных систем.

В работах B.R. Barmish и др. [20, 21] предложены контрпримеры к теореме Биаласа [22], которые аннулированы в работе [23].

В работах M. Mansour и др. [24, 25] получены дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова [13], которые имеют ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов, или в случаях применения [4, 26, 27] сложной процедуры проектирования корней полиномов на отрезок [–1, 1].

Таким образом, работа В.Л. Харитонова [13] вызвала огромный интерес к проблеме исследований робастности интервальных динамических систем [4, 8–12, 16–29]. В современной теории интервальных динамических систем существуют два альтернативных направления [4, 8–10, 13, 16–19, 28, 29]:

1) алгебраическое или харитоновское направление;
2) частотное или направление Цыпкина–Поляка.

В настоящей работе рассматривается *алгебраический метод* исследования робастности как непрерывных, так и дискретных интервальных динамических систем, основы которого заложены в работах [23, 25].

Новизна предлагаемого подхода состоит в том, что для линейных динамических систем с интервальной матрицей общего вида сформулирована и доказана базовая теорема о робастной устойчивости линейной непрерывной динамической системы с интервальными элементами матрицы правой части, которая определяется через сепаратные угловые коэффициенты характеристического полинома системы. Базовая теорема доказана на основе леммы о сепаратных коэффициентах характеристического полинома, получаемых оптимизационными методами нелинейного программирования на множестве интервальных элементов матрицы системы, возможными значениями которых могут быть верхняя или нижняя границы соответствующего интервала или нуль. Получено уточняющее замечание к базовой теореме для непрерывных систем, о необходимости полного множества (набора) из четырех угловых полиномов для робастной устойчивости системы, исключающее кратные случаи характеристического полинома, когда множество полиномов Харитонова вырождается и будет состоять из менее требуемых четырех различных полиномов. Сформулирована теорема о необходимых и достаточных условиях робастной устойчивости многогранника интервальных матриц. Для дискретных систем получен дискретный аналог теоремы Харитонова. Приведен алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических систем.

Постановка задачи

Рассматриваются линейные динамические системы порядка n,
непрерывная

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1}$$

и, дискретная

$$\mathbf{x}(m+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(m),\ m = 1,2,3,\ldots, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in R^n$; $\mathbf{x}(m)$ — векторы состояния; $\mathbf{A} \in R^{nxn}$ — интервальная матрица с элементами a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, представляющие интервальные величины $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ с угловыми значениями $\underline{a}_{ij}$, $\overline{a}_{ij}$, $\underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$.

Требуется определить условия робастной устойчивости систем (1) и (2).

Непрерывные системы

Основные результаты. В базовых для рассматриваемого метода работах [23, 29] получены результаты в виде строго доказанных теоремы 1 и леммы к ней о робастной устойчивости системы (1) по условиям гурвицевести четырех угловых полиномов Харитонова, составленным по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i(\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1, n})$ характеристических полиномов системы (1):

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n = 0, \tag{3}$$

где λ — собственные значения матрицы $\mathbf{A}$.

Приведем эти теорему 1 и лемму.

Теорема 1. Для того чтобы положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (1) было асимптотически устойчиво при всех $\mathbf{A} \in D$, или чтобы интервальная матрица $\mathbf{A}$ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевы все четыре угловые полиномы Харитонова, составленные по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i(\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1, n})$ характеристических полиномов (3) системы (1).

Данная теорема доказана на основе следующей леммы.

Лемма. Сепаратные угловые коэффициенты $b_i(\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1, n})$ образуются как соответствующие коэффициенты полиномов (3), либо при угловых значениях элементов a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ матрицы $\mathbf{A}$, либо при нулевых значениях некоторых элементов (если интервал принадлежности включает нуль).

Как нетрудно видеть из леммы, для нахождения коэффициентов $b_i(\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1, n})$ в общем случае необходимо применение оптимизационных методов нелинейного программирования.

К теореме 1, доказательство которой приведено в приложениях работы [23], необходимо сделать следующее уточняющее замечание.

Замечание. Из основного аргумента доказательства теоремы 1, связанного с наличием четырех угловых полиномов Харитонова, следует, что, при отсутствии полного множества (набора) из четырех угловых полиномов, условия теоремы 1 необходимы, но могут быть недостаточны для устойчивости системы (1).

Случай, соответствующий приведенному замечанию, может возникнуть тогда, когда сепаратные угловые коэффициенты полиномов (3) взаимосвязаны и в итоге сужают набор угловых коэффициентов до количества менее четырех.

Справедливость доказанной теоремы 1 подтверждается аннулированием известных контрпримеров к теореме Биаласа [22].

Пример 1. Теорема 1 апробирована на различных контрпримерах к теореме Биаласа, в частности из работы [20], где рассматривается матрица

$$\mathbf{A} = \Omega_r = \begin{bmatrix} -0{,}5 - r & -12{,}06 & -0{,}06 \\ -0{,}25 & 0 & 1 \\ 0{,}25 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где $r \in [0,1]$, для которого подтверждена справедливость теоремы 1.

При этом, в случае матрицы $\mathbf{A} = \Omega_r$ из [20], можно наглядно рассмотреть справедливость приведенного выше замечания к теореме 1.

Действительно, в данном случае последовательные сепаратные угловые коэффициенты образуют неполное множество угловых коэффициентов, поскольку

$$b_1 = -\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1{,}5 + r,\ b_2 = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ii}a_{jj} - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}a_{ji},$$

$$b_3 = -\sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ij}a_{jk}a_{kj} - \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ij}a_{jk}a_{ki} - a_{11}a_{22}a_{33} = 4r + 2{,}06,$$

отсюда сепаратные угловые коэффициенты: $\underline{b}_1 = 1{,}5$; $\overline{b}_1 = 2{,}5$; $\underline{b}_2 = 1{,}5$; $\overline{b}_2 = 2{,}5$; $\underline{b}_3 = 2{,}06$; $\overline{b}_3 = 6{,}06$.

Соответственно, угловых полиномов Харитонова в данном случае будет только два:

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1{,}5\lambda^2 + 1{,}5\lambda + 2{,}06 = f_2(\lambda),$$
$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + 2{,}5\lambda^2 + 2{,}5\lambda + 4{,}06 = f_4(\lambda), \qquad (5)$$

т. е. полного набора четырех угловых полиномов, указанных в работе [23] не будет.

Исходя из этого, по угловым полиномам (5) система (1) будет всюду при $r \in [0,1]$ устойчива, хотя известно, что при $r \in [0{,}5 - \sqrt{0{,}06},\ 0{,}5 + \sqrt{0{,}06}]$ эта система неустойчива.

Пример 2. Рассмотрим еще один наглядный пример, иллюстрирующий выводы замечания к теореме 1.

Пусть задан характеристический полином интервальной системы (1) в виде

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 1{,}5\lambda^2 + 2{,}5\lambda + b_3, \qquad (6)$$

где коэффициент $b_3 \in [2, 3]$. Такой случай системы (1) возможен, например, при фробениусовой или сопровождающей форме матрицы **A**.

Тогда четыре угловых характеристических полинома системы (1) будут следующие:

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1{,}5\lambda^2 + 2{,}5\,\lambda + 3,$$
$$f_2(\lambda) = \lambda^3 + 1{,}5\lambda^2 + 2{,}5\lambda + 3,$$
$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + 1{,}5\lambda^2 + 2{,}5\lambda + 2,$$
$$f_4(\lambda) = \lambda^3 + 1{,}5\lambda^2 + 2{,}5\lambda + 2.$$

Как нетрудно видеть, в данном случае все четыре характеристических полинома системы (1) устойчивы ($b_1b_2 > b_3$) и система (1) робастно устойчива. Если же, положим $b_3 \in [2{,}06, 4{,}06]$, то в этом случае первые два полинома $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ неустойчивы, а два следующих $f_3(\lambda)$ и $f_4(\lambda)$ устойчивы, а следовательно система (1) робастно неустойчива.

В этом примере рассмотрены два случая интервальной системы (1), когда имеются две пары совпадающих или кратных характеристических полиномов, но при этом имеются полные наборы четырех полиномов Харитонова, в отличие от случая системы (1) с матрицей $\mathbf{A} = \Omega_r$ (4), где нет полного набора из четырех угловых характеристических полиномов, а только два угловых полинома, вследствие жесткой зависимости коэффициентов b_i, $i = 1,2,3$ от параметра r. В двух случаях рассматриваемого примера 2 в соответствии с замечанием к теореме 1 можно сделать вполне определенный вывод о робастной устойчивости или неустойчивости интервальной системы (1) с характеристическим полиномом (6), в то время как в случае с матрицей вида $\mathbf{A} = \Omega_r$ определенный вывод о робастной устойчивости нельзя сделать (здесь следует отметить, что в работе [23] вывод по данному случаю сделан неверный).

Теорема 1 и лемма позволяют решить задачу о реберной гипотезе для многогранников матриц [4].

Известно [4], что многогранником матриц называется множество

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_s = \sum_{i=1}^{m} s_i\mathbf{P}_i : s_i \geq 0,\ i = \overline{1, m},\ \sum_{i=1}^{m} s_i = 1\}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{P}_i$, $i = \overline{1, m}$ — постоянные матрицы.

В работе [4] сформулирована гипотеза об условиях устойчивости многогранника **P** (7) в следующем виде.

Гипотеза. Многогранник **P** устойчив тогда и только тогда, когда ребра **P** устойчивы, т. е. матрица

$$s\mathbf{P}_i + (1 - s)\mathbf{P}_j$$

устойчива при любых $i, j = \overline{1, m}$, $s \in [0, 1]$.

Но в работе [21] на контрпримерах показано, что данная гипотеза неверна для строго гурвицева случая.

Противоречия в реберной гипотезе разрешены на основе следующей реберной теоремы 2, доказанной в работе [23].

Теорема 2. Для устойчивости многогранника матриц **P** необходимо и достаточно, чтобы выпуклые ребра **P** были устойчивы, т. е. матрица

$$s_i\mathbf{P}_i + s_2\mathbf{P}_j$$

устойчива при любых $i, j = \overline{1, m}$, $s_1 \in [-1, 0]$, $s_2 \in [0, 1]$.

В данном случае многогранник матриц **P** представлен в виде:

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_s = \mathbf{P}_{s1} + \mathbf{P}_{s2} : \mathbf{P}_{s1} = \sum_{i=1}^{m} s_{1i}\mathbf{P}_i,$$
$$\mathbf{P}_{s2} = \sum_{i=1}^{m} s_{2i}\mathbf{P}_i : s_{1i} + s_{2i} = s_i \geq 0,\ i = \overline{1, m},\ \sum_{1}^{m} s_i = 1\}.$$

Справедливость теоремы 2 также подтверждается аннулированием всех известных контрпримеров из работы [21].

Дискретные системы

Как известно, публикация работы [13] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитонова [4, 10, 24–27]. Так, в работе [4] указано, что «дискретный вариант харитоновского условия четырех многочленов отсутствует». Но здесь же отмечается, что в настоящее время получены [24] дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова. Но эти аналоги теорем Харитонова имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов [4]. Эти ограничения были сняты в работах [26, 27], где получены аналоги теорем Харитонова с использованием теоремы Шура [30]. Также в [26, 27] сформулированы теоремы, являющиеся дискретными аналогами результатов работы [13] по интервальным матрицам и многогранникам матриц.

Далее рассматривается обобщение результатов, полученных в работе [26], с учетом выводов, приведенных выше, для непрерывных систем.

Основные результаты. Для дискретных систем, используя z-преобразование, получаем интервальный характеристический полином

$$f(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} b_i z^{n-i},\ b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i],\ \underline{b}_i \le \overline{b}_i, \quad (8)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Для определения условий устойчивости воспользуемся теоремой Шура [30], т. е. условиями вида

$$|b_0| > |b_n|,$$

для последовательности полиномов, определяемых рекуррентными соотношениями

$$f_i(z) = [b_0 f(z) - b_n f(1/z)z^n]/z, \ldots, f_{i+1}(z) = [b_{0,i} f_i(z) - b_{n,i} f_i(1/z)z^{n-1}]/z,$$

где $b_{0,i}$, $b_{n,i}$ — старший и младший коэффициенты i-го ($i = \overline{1, n-2}$)) полинома $f_i(z)$ соответственно.

Определение. *Точками перемежаемости* для коэффициентов b_i, $i = \overline{0, n}$ будем называть точки на действительной оси, в которых происходят переходы корней полинома (8) через единичную окружность на плоскости корней, а *интервалами перемежаемости* — соответственно, интервалы, в которых корни находятся либо внутри, либо вне единичного круга (рисунок).

В работе [26] сформулированы основные результаты по определению условий робастной устойчивости дискретных интервальных систем в виде соответствующих теорем 1–6. При этом следует отметить, что, как указано выше, для случая непрерывных систем [23], справедливость теоремы 5 имеет ограничение, обусловленное замечанием к теореме 1 работы [23], т. е. теорема 5 верна при полном наборе из четырех различных полиномов Харитонова.

Справедливость результатов [23, 26] относительно аналога сильной теоремы Харитонова продемонстрированы на известных контрпримерах из [4, 24, 25] и др.

Таким образом, алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических систем будет следующим.

1. Пользуясь формулами леммы к теореме 1 [23], оптимизацией по элементам $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$ интервальной матрицы $\mathbf{A}$, находятся сепаратные угловые коэффициенты $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $i = \overline{0, n}$, интервального характеристического полинома (8).
2. Определяются четыре полинома Харитонова, соответствующие интервальному полиному (8)

$$f_1(z)\colon \{\underline{b}_0, \underline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, b_4 \ldots,\}; f_2(z)\colon \{\underline{b}_0, \overline{b}_1, \overline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4 \ldots\};$$

$$f_3(z)\colon \{\overline{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \overline{b}_3, \overline{b}_4 \ldots,\}; f_4(z)\colon \{\overline{b}_0, \overline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \overline{b}_4 \ldots\}.$$

3. Составляются n неравенств вида (П.2), указанных в приложении работы [23].
4. Относительно каждого коэффициента b_i, $i = \overline{0, n}$, считая остальные коэффициенты фиксированными, последовательно находятся точки перемежаемости для всех четырех полиномов Харитонова и по всем n неравенствам (см. п. 3), начиная с меньших порядков.
5. Если все точки перемежаемости по всем коэффициентам b_i, $i = \overline{0, n}$, не принадлежат заданным интервалам, то исходный полином (система) устойчив, в противном случае — неустойчив.

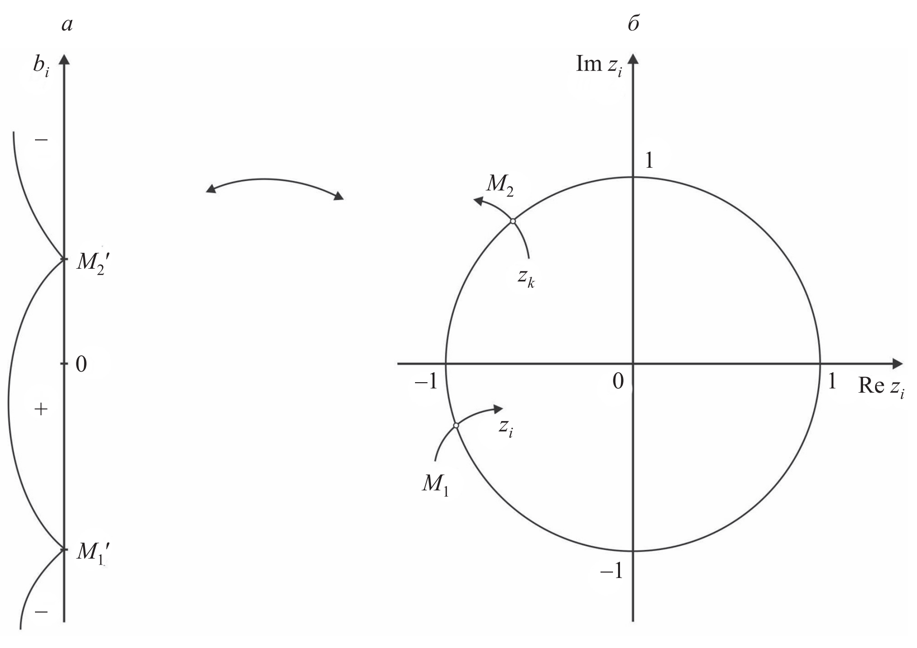

Рисунок. Точки перемежаемости M_1' и M_2' на числовой оси коэффициента b_i по стрелке от –∞ до +∞, и интервалы перемежаемости $(-\infty, M_1']^-$, $[M_1', M_2']^+$, $[M_2', +\infty)^-$ для коэффициента b_i (*а*); M_1 и M_2 точки в единичной окружности плоскости корней z_i, z_k (Re z_i — действительная часть, Im z_i — мнимая часть), которые соответствуют переходам корней характеристического полинома (8) из устойчивой области (+) в неустойчивую область (–) при изменениях коэффициента b_i (*б*)

Заключение

Алгебраический метод харитоновского направления исследований робастной устойчивости интервальных динамических систем, рассмотренный в данной работе, является дальнейшим развитием основных результатов работ [23, 26], который позволяет решать проблему робастной устойчивости при общем виде интервальной матрицы системы. При этом метод направлен для решения задач робастной устойчивости как для линейных непрерывных, так и для линейных дискретных интервальных динамических систем.

Литература

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–250.
2. Аносов Д.В. Грубые системы // Труды Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.
3. Dorato P.D. A historical review of robust control // IEEE Control Systems Magazine. 1987. V. 7. N 2. P. 44–47. doi: 10.1109/MCS.1987.1105273
4. Джури Э.И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 3–28.
5. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36–45.
6. Оморов Р.О., Ушаков А.В. Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Известия вузов. Электромеханика. 1991. № 1. С. 78–85.
7. Оморов Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, 1992. 188 с.
8. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 1. С. 3–23.
9. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II. Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 2. С. 3–30.
10. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. ВИНИТИ. 1991. Т. 32. С. 3–31.
11. Дискуссия по проблеме робастности в системах управления // Автоматика и телемеханика. 1992. № 1. С. 165–176.
12. Неймарк Ю.И. Робастная устойчивость и D-разбиение // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 10–18.
13. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086–2088.
14. Никифоров В.О. Робастное управление линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 87–99.
15. Пелевин А.Е. Синтез робастного закона управления при неопределенностях параметров модели объекта // Гироскопия и навигация. 1999. № 2(25). С. 63–74.
16. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова думка, 2006. 264 с.
17. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.
18. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастный критерий Найквиста // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 25–31.
19. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. С. 37–53.
20. Barmish B.R., Hollot C.V. Counter-example to a recent result on the stability of interval matrices by S. Bialas // International Journal of Control. 1984. V. 39. N 5. P. 1103–1104. doi: 10.1080/00207178408933235
21. Barmish B.R., Fu M., Saleh S. Stability of a polytope of matrices: Counterexamples // IEEE Transactions on Automatic Control. 1988. V. 33. N 6. P. 569–572. doi: 10.1109/9.1254

References

1. Andronov A.A., Pontriagin L.S. Structurally stable systems. *Doklady AN SSSR*, 1937, vol. 14, no. 5, pp. 247–250. (in Russian)
2. Anosov D.V. Structurally stable systems. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1986, vol. 169, pp. 61–95.
3. Dorato P.D. A historical review of robust control. *IEEE Control Systems Magazine*, 1987, vol. 7, no. 2, pp. 44–47. doi: 10.1109/MCS.1987.1105273
4. Jury E.I. Robustness of a discrete system. *Automation and Remote Control*, 1990, vol. 51, no. 5, pp. 571–592.
5. Omorov R.O. Maximal robustness of dynamical systems. *Automation and Remote Control*, 1991, vol. 52, no. 8, pp. 1061–1068.
6. Omorov R.O., Ushakov A.V. Robustness estimates in control and observation tasks. *Russian Electromechanics*, 1991, no. 1, pp. 78–85. (in Russian)
7. Omorov R.O. *Dynamical system quantitative robustness measures and their applications to control systems*. Dissertation for the degree of candidate of technical sciences, St. Petersburg, Saint Petersburg Institute of Fine Mechanics and Optics, 1992, 188 p. (in Russian)
8. Gusev Yu.M., Yefanov V.N., Krymskiy V.G., Rutkovskiy V.Yu. Analysis and synthesis of linear interval dynamic systems (the state of the problem). I. Analysis which uses interval characteristic polynomials. *Soviet journal of computer and systems sciences*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 84–103.
9. Gusev Yu.M., Yefanov V.N., Krymskiy V.G., Rutkovskiy V.Yu Analysis and synthesis of linear interval dynamical systems (the state of the problem). II. Analysis of the stability of interval matrices and synthesis of robust regulators. *Soviet journal of computer and systems sciences*, 1992, vol. 30, no. 2, pp. 26–52.
10. Poliak B.T., Tcypkin Ya.Z. Robust stability of linear systems. Itogi nauki i tehniki. *Tehnicheskaja kibernetika*, 1991, vol. 32, pp. 3–31. (in Russian)
11. Discussion on robustness problem in control systems. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1992, no. 1, pp. 165–176. (in Russian)
12. Neimark Y.I. Robust stability and D-partition. *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no. 7, pp. 957–965.
13. Kharitonov V.L. The asymptotic stability of the equilibrium state of a family of systems of linear differential equations. *Differential Equations*, 1978, vol. 14, no. 11, pp. 2086–2088. (in Russian)
14. Nikiforov V.O. Robust output control for a linear object. *Automation and Remote Control*, 1998, vol. 59, no. 9, pp. 1274–1283.
15. Pelevin A.Ye. Robust control law synthesis under uncertainty of model parameters. *Journal "Giroskopiya i Navigatsiya"*, 1999, no. 2(25), pp. 63–74. (in Russian)
16. Kuntsevich V.M. *Management under Conditions of Uncertainty: Guaranteed Results in Management and Identification Issues*. Kiev, Naukova dumka Publ., 2006, 264 p. (in Russian)
17. Polyak B.T. Tsypkin Y.Z. Frequency criteria of robust stability and aperiodicity of linear-systems. *Automation and Remote Control*, 1990, vol. 51, no. 9, pp. 1192–1201.
18. Polyak B.T. Tsypkin Y.Z. Robust Nyquist test. *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no. 7, pp. 972–977.
19. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Superstable linear control systems. I. Analysis. *Automation and Remote Control*, 2002, vol. 63, no. 8, pp. 1239–1254. doi: 10.1023/A:1019823208592
20. Barmish B.R., Hollot C.V. Counter-example to a recent result on the stability of interval matrices by S. Bialas. *International Journal of Control*, 1984, vol. 39, no. 5, pp. 1103–1104. doi: 10.1080/00207178408933235
21. Barmish B.R., Fu M., Saleh S. Stability of a polytope of matrices: Counterexamples. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, vol. 33, no. 6, pp. 569–572. doi: 10.1109/9.1254
22. Bialas S. A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices. *International Journal of Control*, 1983, vol. 37, no. 4, pp. 717–722. doi: 10.1080/00207178308933004

22. Bialas S. A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices // International Journal of Control. 1983. V. 37. N 4. P. 717–722. doi: 10.1080/00207178308933004
23. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I. Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1995. № 1. С. 22–27.
24. Kraus F.J., Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. On the robustness of low-order Schur polynomials // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1988. V. 35. N 5. P. 570–577. doi: 10.1109/31.1786
25. Mansour M., Kraus F.J. On Robust Stability of Schur Polynomials: Report N 87-05, Inst. Autom. Cont. Ind. Electronics, Swiss, Fed. Inst. Tech. (ETH). Züric, 1987. 34 p.
26. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. II. Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1995. № 3. С. 3–7.
27. Оморов Р.О. О дискретном аналоге теоремы Харитонова // Наука и новые технологии. 2002. № 3. С. 5–10.
28. Оморов Р.О. Робастная устойчивость интервальных динамических систем. Бишкек: Илим, 2018. 104 с.
29. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 6. С. 333–340. doi: 10.17587/mau.20.333-340
30. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1958. 724 с.

23. Omorov R.O. Robustness of interval dynamic systems. I. Robustness in continuous linear interval dynamic systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 34, no. 3, pp. 69–74
24. Kraus F.J., Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. On the robustness of low-order Schur polynomials. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, vol. 35, no. 5, pp. 570–577. doi: 10.1109/31.1786
25. Mansour M., Kraus F.J. *On robust stability of Schur polynomials*. Report N 87-05, Inst. Autom. Cont. Ind. Electronics, Swiss, Fed. Inst. Tech. (ETH), Züric, 1987, 34 p.
26. Omorov R.O. Robustness of interval dynamical systems. II. Robustness of discrete linear interval dynamical systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 34, no. 4, pp. 1–5.
27. Omorov R.O. On discrete analogue of Kharitonov's theorem. *Science and New Technologies*, 2002, no 3. C. 5–10. (in Russian)
28. Omorov R.O. Robust stability of interval dynamic systems. Bishkek, Ilim Publ., 2018, 104 p. (in Russian)
29. Omorov R.O. Robust of interval dynamic systems. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 6, pp. 333–340. (in Russian). doi: 10.17587/mau.20.333-340
30. Tcypkin Ya.Z. *Theory of Pulse Systems*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958, 724 p. (in Russian)

Авторы

Оморов Роман Оморович — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики, главный научный сотрудник, Институт физики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика, Scopus ID: 6602708366, ORCID ID: 0000-0003-3555-1323, romano_ip@list.ru

Authors

Roman O. Omorov — D.Sc., Professor, Corresponding member of National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic (KR), Chief Researcher, Institute of Physics of National Academy of Sciences KR, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, Scopus ID: 6602708366, ORCID ID: 0000-0003-3555-1323, romano_ip@list.ru