УДК 51-72 doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-432-437

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ С ЕСТЕСТВЕННЫМ КВАНТОВАНИЕМ

В.В. Головина, Е.С. Грошиков, П.П. Рымкевич

Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация
Адрес для переписки: victoria_gol@mail.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 17.03.20, принята к печати 19.05.20
Язык статьи — русский

Ссылка для цитирования: Головина В.В., Грошиков Е.С., Рымкевич П.П. Детерминированные системы с естественным квантованием // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 3. С. 432–437. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-432-437

Аннотация
Предмет исследования. Исследование детерминированных систем является актуальной проблемой естествознания. В работе рассмотрен подход, позволяющий изучать поведение детерминированных систем. Целью работы является построение уравнения эволюции таких систем, из которого возможно показать, что часть макроскопических процессов подчиняется квантовой логике. **Метод.** Предложен новый алгебраический подход, основанный на некоммутативной алгебре. Показано, что для любой детерминированной системы при условии задания ее изменения за малый промежуток времени можно построить систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию данной системы во времени. Введенный аппарат некоммутативного умножения является альтернативой операторного исчисления квантовой механики. **Основные результаты.** Построено ассоциативное некоммутативное кольцо, позволяющее описать эволюцию произвольной детерминированной системы. Предложенная алгебра — изоморфная алгебра Гейзенберга. Показано, что все элементы алгебраических колец являются обычными функциями числовых переменных в отличие от математического аппарата квантовой механики, что дает возможность придания им различного физического смысла. **Практическая значимость.** Рассмотрен пример построения дифференциального уравнения, описывающего движение классической частицы при наличии случайных сил. Полученное уравнение описывает плотность вероятности нахождения классической частицы в произвольный момент времени в фазовом пространстве.

Ключевые слова
система, некоммутативное умножение, матрица перехода, оператор дифференцирования, физическая модель, преобразование Фурье

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-432-437

DETERMINISTIC SYSTEMS WITH NATURAL QUANTIZATION

V.V. Golovina, E.S. Groshikov, P.P. Rymkevich

Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation
Corresponding author: victoria_gol@mail.ru

Article info
Received 17.03.20, accepted 19.05.20
Article in Russian

For citation: Golovina V.V., Groshikov E.S., Rymkevich P.P. Deterministic systems with natural quantization. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 3, pp. 432–437 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-432-437

Abstract
Subject of Research. The research of deterministic systems is a topical problem of natural science. The paper presents an approach for behavior study of the deterministic systems. The work is aimed at creation of the evolution equation for deterministic systems, which shows that part of the macroscopic processes complies with quantum logic. **Method.** A new algebraic approach is proposed based on non-commutative algebra. It is shown that for any deterministic system in case of setting its change for a short time period, it is possible to create a system of differential equations describing the evolution of a given system in time. Implemented apparatus of non-commutative multiplication is an alternative to the operator calculus for quantum mechanics. **Main Results.** An associative non-commutative ring is built describing

the evolution of arbitrary deterministic system. The proposed algebra is an isomorphic Heisenberg algebra. It is shown that all elements of algebraic rings are functions of numerical variables unlike the mathematical apparatus of quantum mechanics and, therefore, it is possible to give them different physical meaning. **Practical Relevance.** An example of differential equation creation is considered describing the motion of a classical particle in the presence of random forces. The obtained equation describes the probability density of a classical particle location at an arbitrary point of time in phase space.

Keywords
system, non-commutative multiplication, transfer matrix, differentiation operator, physical model, Fourier transform

Введение

Изучение поведения детерминированных систем является актуальной проблемой естествознания. В последнее время этой проблемой занимается общая теория систем, в частности теория динамических систем [1, 2]. Нетривиальные подходы к изучению поведения сложных систем выдвигает такое направление современной науки как синергетика [3, 4]. В данной работе авторы предлагают новый алгебраический подход, основанный на некоммутативной алгебре [5].

Физические процессы, происходящие в природе, описываются набором количественных характеристик. Пусть процесс считается заданным, если известен набор $\mathbf{\Psi} = \{\Psi_1 \ldots \Psi_N\}$ аддитивных величин в текущий момент времени T, где $\mathbf{\Psi}$ — вектор в N-мерном пространстве состояний, например, плотность тока тепла с внутренней структурой [6, 7]. В общем случае рассмотрим процесс в системе отсчета с набором $\mathbf{Q} = \{Q_1 \ldots Q_M\}$ обобщенных координат. Под процессом будем понимать упорядоченную последовательность событий в M-мерном пространстве обобщенных координат с заданием вектора состояния $\mathbf{\Psi}$. При этом все компоненты вектора состояния $\mathbf{\Psi}$ называются каналами распространения.

Если состояние системы в произвольный начальный момент времени $T = t$ задан вектором $\mathbf{\Psi}_o(q, t)$, который однозначно определяет вектор состояния системы $\mathbf{\Psi}(\mathbf{Q}, T)$ в произвольный момент времени $T \geq t$, то такой процесс называется детерминированным. Целью настоящей работы является построение уравнения эволюции детерминированных систем, из которого возможно показать, что большинство макроскопических процессов подчиняются квантовой логике.

Постановка задачи

Представим состояние системы вектором $\mathbf{\Psi}(\mathbf{Q}, T)$, который определяется интегралом вида:

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{Q}, T) = \int\limits_{(\Omega_q)} \mathbf{\Psi}_o(q, t)\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, t|\tau|\mathbf{R})dq_1dq_2\ldots dq_M, \quad (1)$$

где $d\Omega_q = dq_1dq_2\ldots dq_M$ — объем в M-мерном пространстве координат; $\mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{q}$ — вектор перемещения в пространстве обобщенных координат; $\tau = T - t$ — длительность процесса; $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, t|\tau|\mathbf{R})$ — матрица перехода, каждый элемент которой $\Lambda_{kn}(\mathbf{q}, t|\tau|\mathbf{R})$ можно трактовать как долю величины Ψ_{kn}, перешедшей с канала k на канал n за время τ и переместившейся на вектор $\mathbf{R}$.

В детерминированных системах матрица перехода $\mathbf{\Lambda}$ однозначно определяет с помощью определяющего уравнения (1) состояние системы в произвольный момент времени. Сам процесс можно рассматривать как перераспределение некоторой векторной величины $\mathbf{\Psi}_o$ с возможным учетом источников и стоков в пространстве и времени.

Сформулируем задачу следующим образом — определить уравнение эволюции матрицы перехода $\mathbf{\Lambda}$.

Метод решения

Поскольку процесс является детерминированным, то для матрицы перехода можно представить следующее верное тождество, справедливое для всех $\tau_1 \in [0, \tau]$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, t|\tau|\mathbf{R}) = \\ &= \int\limits_{(\Omega_r)} \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, t|\tau_1|\mathbf{r})\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q} + \mathbf{r}, t + \tau_1|\tau - \tau_1|\mathbf{R} - \mathbf{r})d\Omega_r \overset{def}{=} \\ &= \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, t|\tau_1|\mathbf{R}) \,\overline{\otimes}\, \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, t + \tau_1|\tau - \tau_1|\mathbf{R} - \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $d\Omega_r = dr_1\ldots dr_M$.

Уравнение (2) по смыслу представляет собой аналог известного уравнения Смолуховского–Колмогорова–Чепмена [8] и означает переход системы из одного состояния в другое через всевозможные промежуточные состояния. Так как в детерминированном процессе прошлое однозначно определяет будущее, то выражение (2) описывает марковский процесс. Смысл выражения (2) становится более понятным, если воспользоваться соотношением (1) и записать это выражение для двух моментов времени: $T = t + \tau_1$ и $T = t + \tau$. В результате получим

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{Q}, t + \tau_1) = \int\limits_{(\Omega_q)} \mathbf{\Psi}_o(\mathbf{q}, t)\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, t|\tau_1|\mathbf{Q} - \mathbf{q})d\Omega_q;$$

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{Q}, t + \tau) = \int\limits_{(\Omega_q)} \mathbf{\Psi}(\mathbf{q}, t + \tau_1)\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, t + \tau_1|\tau - \tau_1|\mathbf{Q} - \mathbf{q})d\Omega_q.$$

Выражение (2) можно рассматривать как некоммутативное умножение, которое для двух распределений $A(\mathbf{q}|\mathbf{R})$ и $B(\mathbf{q}|\mathbf{R})$ можно определить как

$$\begin{aligned} &C(\mathbf{q}|\mathbf{R}) = A(\mathbf{q}|\mathbf{R}) \,\overline{\otimes}\, B(\mathbf{q}|\mathbf{R}) \overset{def}{=} \\ &= \int\limits_{(\Omega_r)} A(\mathbf{q}|\mathbf{R})B(\mathbf{q} + \mathbf{r}|\mathbf{R} - \mathbf{r})d\Omega_r. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее в тексте работы для компактности будем придерживаться алгебраической формы записи.

Матричные элементы Λ_{kn} представим аналитическими функциями по переменной q и в общем случае — кусочно-непрерывными по векторной переменной $\mathbf{R}$.

В соответствии с методом [9] определим обратный фурье-образ матрицы перехода $\mathbf{\Lambda}(q|Q)$, а именно:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{q}, t|\tau|\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\!\int e^{i\mathbf{kR}}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}, t|\tau|\mathbf{R})dR_1\ldots dR_M. \quad (4)$$

Для простоты расширим область определения обобщенных координат на всю числовую ось, соответственно доопределив матрицу перехода $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}|\mathbf{R})$ следующим образом:

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}|\mathbf{R}) \equiv 0, \quad q \notin \Omega_q.$$

Применив обратное преобразование Фурье к выражению (3) с учетом определения (4), получим

$$\tilde{C}(\mathbf{q}|\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\!\int dr_1dr_2\ldots dr_M\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\!\int e^{i\mathbf{kr}}dR_1\ldots dR_M\times$$

$$\times A(\mathbf{q}|\mathbf{r})B(\mathbf{q}+\mathbf{r}|\mathbf{R}-\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\!\int A(\mathbf{q}|\mathbf{r})\tilde{B}(\mathbf{q}+\mathbf{r}|\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}}d\Omega_r =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\!\int A(\mathbf{q}|\mathbf{r})\sum_{\substack{n_1=0\\ \ldots\\ n_M=0}}^{\infty}\frac{r_1^{n_1}\ldots r_M^{n_M}}{n_1!\ldots n_M!}\tilde{B}_q^{n_1+\ldots+n_M}(\mathbf{q}|\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}}d\Omega_r =$$

$$= \sum_{\substack{n_1=0\\ \ldots\\ n_M=0}}^{\infty}\frac{1}{n_1!\ldots n_M!}\tilde{B}_q^{n_1+\ldots+n_M}(\mathbf{q}|\mathbf{k})\times \quad (5)$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\!\int A(\mathbf{q}|\mathbf{r})r_1^{n_1}\ldots^{n_M}e^{i\mathbf{kr}}d\Omega_r =$$

$$= \sum_{\substack{n_1=0\\ \ldots\\ n_M=0}}^{\infty}\frac{(-i)^{n_1+\ldots n_M}}{n_1!\ldots n_M!}\tilde{A}_k^{n_1+\ldots+n_M}(\mathbf{q}|\mathbf{k})\tilde{B}_q^{n_1+\ldots+n_M}(\mathbf{q}|\mathbf{k}),$$

где символы $\tilde{A}_k^{n_1+\ldots+n_M}(\mathbf{q}|\mathbf{k})$ и $\tilde{B}_q^{n_1+\ldots+n_M}(\mathbf{q}|\mathbf{k})$ означают:

$$\tilde{A}_k^{(n_1+\ldots+n_M)}(\mathbf{q}|\mathbf{k}) \equiv \frac{\partial^{n_1}\partial^{n_2}\ldots\partial^{n_M}A(\mathbf{q},\mathbf{k})}{\partial k_1^{n_1}\ldots\partial k_M^{n_M}};$$

$$\tilde{B}_q^{(n_1+\ldots+n_M)}(\mathbf{q}|\mathbf{k}) \equiv \frac{\partial^{n_1}\partial^{n_2}\ldots\partial^{n_M}B(\mathbf{q},\mathbf{k})}{\partial q_1^{n_1}\ldots\partial q_M^{n_M}}.$$

Теперь рассмотрим некоммутативное кольцо $R_\otimes$, в котором наряду с естественным сложением определим мультипликативную полугруппу согласно выражению (5) следующим образом:

$$C(\mathbf{q}|\mathbf{k}) = A(\mathbf{q}|\mathbf{k}) \otimes B(\mathbf{q}|\mathbf{k}) \stackrel{def}{=}$$

$$= \sum_{\substack{n_1=0\\ \ldots\\ n_M=0}}^{\infty}\frac{(-i)^{n_1+\ldots n_M}}{n_1!\ldots n_M!}A_k^{(n_1+\ldots+n_M)}(\mathbf{q}|\mathbf{k})B_q^{(n_1+\ldots+n_M)}(\mathbf{q}|\mathbf{k}) \quad (6)$$

Свойство некоммутативного кольца $R_\otimes$ полностью эквивалентно алгебре Гейзенберга, например:

$$[k_n \otimes q_k] = k_n \otimes q_k - q_k \otimes k_n = -i\delta_{nk},$$

где δ_{nk} — символ Кронекера.

Из определения (6) непосредственно следует соотношение:

$$[\hat{k}_n; \hat{q}_k] = \left[-i\frac{\partial}{\partial q_n}q_k\right] = -i\delta_{nk}. \quad (7)$$

Вектор $\mathbf{k}$ в обратном преобразовании Фурье будем называть волновым вектором. Коммутационное соотношение (7) представляет собой соотношение неопределенности Гейзенберга. Таким образом, для фурье-образа матрицы перехода $\mathbf{\Lambda}$ уравнение (2) можно переписать в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{q}, t|\tau|\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{q}, t|\tau_1|\mathbf{k}) \otimes \tilde{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{q}, t_1|\tau-\tau_1|\mathbf{q}). \quad (8)$$

Для большинства детерминированных процессов матрица перехода зависит лишь от вектора перемещения в пространстве обобщенных координат и не зависит от их начальных значений, т. е. имеет вид $\mathbf{\Lambda}(t|\tau|\mathbf{r})$. В этом случае в соотношении (6) некоммутативное умножение «⊗» превращается в обычное алгебраическое умножение, и выражение (2) для оригиналов представляет обычную коммутативную свертку функций [5].

В общем случае матрица перехода подчиняется некоммутативной алгебре Гейзенберга, поэтому с полным основанием можно считать, что часть встречающихся в природе явлений **естественным образом квантованы**.

Если система существует в любой момент времени, то при $\tau \to 0$

$$\tilde{\Lambda}_{nk}(t, \mathbf{q}|0|\mathbf{k}) = \delta_{nk} = \mathbf{I}, \quad (9)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица (единица кольца $R_\otimes$).

Для малых времен τ разложим $\tilde{\Lambda}_{nk}$ по степени τ, в результате чего получим:

$$\tilde{\Lambda}_{nk}(t, \mathbf{q}|\tau|\mathbf{k}) = \delta_{nk} + \frac{1}{i}H_{nk}(t, \mathbf{q}|\mathbf{k}) + \ldots. \quad (10)$$

Матрицу $H_{nk}(t, \mathbf{q}|\mathbf{k})$ в выражении (10) будем называть квазигамильтонианом системы.

Далее положим в уравнении (8) $\tau_1 = \tau$ и $\tau \to \tau + d\tau$, тогда с учетом выражений (9) и (10) получим

$$i\tilde{\Lambda}_{nk_\tau}(t, \mathbf{q}|\tau|\mathbf{k}) = \tilde{\Lambda}_{nr}(t, \mathbf{q}|\tau|\mathbf{k}) \otimes H_{rk}(t+\tau, \mathbf{q}|\mathbf{k}). \quad (11)$$

Поскольку в задачах чаще вводится не длительность процесса, а время канала и текущее время $T = t + \tau_1$, то с учетом свойств преобразования Фурье (4) и методов, изложенных в [10], перейдя к оригиналам, выражение (11) примет вид

$$i\mathbf{\Lambda}_T^{T'}(t, \mathbf{q}|T|\mathbf{Q}) = \mathbf{H}^T\Big(T, \overset{1}{\mathbf{q}}|i\overset{2}{\nabla}\Big)\mathbf{\Lambda}^T(t, \mathbf{q}|T|\mathbf{Q}), \quad (12)$$

где $\mathbf{\Lambda}^T$ и $\mathbf{H}^T$ — транспонированные матрицы $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{H}$ соответственно; ∇ — оператор дифференцирования.

Уравнение (12) описывает эволюцию детерминированных систем во времени, если известны изменения в системе за малый промежуток времени, а также начальные и граничные условия. Номера над некоммутирующими величинами обозначают порядок их следования. Это обозначение было предложено В.П. Масловым [11]. А Фейман [12], по-видимому, начал систематически использовать функции от упорядоченных операторов [13–16], а также исчисления вейлевских функций [17, 18]. При этом умножение «⊗» в смысле (6) тесно связано с алгеброй Гейзенберга [19]. Основное отличие рассматриваемого аппарата заключается в том, что все элементы колец $R_{\overline{\otimes}}$ и $R_{\otimes}$ являются обычными функциями числовых переменных в отличие от математического аппарата классической квантовой механики, и, следовательно, возможно придание им различного физического смысла.

Для конкретного построения уравнения (12) можно предложить простую схему.

1. Строится физическая модель системы (так называемые «правила игры») и рассматриваются возможные перемещения.

2. Используя обратное преобразование Фурье, определяется транспонированный квазигамильтониан этой системы.

3. Заменой k_n на $i\dfrac{\partial}{\partial Q_n}$ строим уравнение (12).

Приведем пример применения предложенной схемы.

Рассмотрим движение классической частицы при наличии поля случайных сил.

Задача движения частицы при наличии случайных сил рассматривается в статистической физике [20, 21].

Пусть материальная точка массой m находится в поле регулярной силы $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Примем следующую модель («правило игры»). Кроме силы $\mathbf{F}$ частица может получать импульс $\mathbf{p}$, распределенный по нормальному закону с дисперсией σ^2. Нормальный закон распределения можно обосновать законом больших чисел. Действие же случайной силы подчиняется экспоненциальному закону распределения со средним временем $\tau_o = \dfrac{1}{2}$.

Введем функцию распределения — $\Lambda(t_o, \mathbf{R}, \mathbf{p}_o|\tau|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$, где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{p}_o$ — радиус-вектор и импульс частицы в момент времени t_o; $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ — вектор перемещения за время τ; $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_o$ — приращение импульса за это время; Λ — плотность вероятности перемещения частицы в фазовом пространстве. В силу условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\!\int \Lambda(t_o, \mathbf{R}, \mathbf{p}_o|\tau|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q})d\rho_x d\rho_y d\rho_z dq_x dq_y dq_z \equiv 1.$$

Для малого промежутка времениτ выражение для $\Lambda(|\tau|)$ можно представить в виде:

$$\Lambda(t_o, \mathbf{R}, \mathbf{p}_o|\tau|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}) =$$
$$= \left[(1 - \exp(-\lambda\tau))\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[\frac{(\mathbf{q} - \mathbf{F}\tau)^2}{2\sigma^2}\right]\right. \qquad (13)$$
$$\left. + \exp(-\lambda\tau)\delta(\mathbf{q} - \mathbf{F}\tau)\right]\delta\left(\boldsymbol{\theta} - \frac{(\mathbf{p}_o\tau)}{m}\right).$$

Применяя к выражению (13) обратное преобразование Фурье, получаем:

$$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(t_o, \mathbf{R}, \mathbf{p}_o|\tau|\mathbf{k}, \mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\!\int \boldsymbol{\Lambda}(t_o, \mathbf{R}, \mathbf{p}_o|\tau|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q})\times$$
$$\times e^{i(\mathbf{k}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{u}\mathbf{q})}dV_\theta dV_q = \qquad (14)$$
$$= \exp\left[\frac{i\mathbf{p}_o\mathbf{k}}{m}\tau\right](1 - \exp[\lambda\tau])\exp[i\mathbf{F}\mathbf{u}\tau]\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}u^2\right] +$$
$$+ \exp[-\lambda\tau]\exp[i\mathbf{F}\mathbf{u}\tau].$$

Для малых τ полученный квазигамильтониан H примет вид:

$$H = \frac{i\mathbf{p}_o\mathbf{k}}{m} + i\mathbf{F}\mathbf{u} + \lambda\left[\exp\left(\frac{\sigma^2 u^2}{2}\right) - 1\right]. \qquad (15)$$

Таким образом, в соответствии с уравнением (12) и выражениями (14) и (15) окончательно получим

$$i\Lambda'_T(t_o, \mathbf{R}, \mathbf{p}_o|T|\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p}}{m}\nabla\Lambda(t_o, \mathbf{R}, \mathbf{p}_o|T|\mathbf{r}, \mathbf{p}) -$$
$$- (\nabla_p\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}))\Lambda(t, \mathbf{R}, \mathbf{p}_o|T|\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \qquad (16)$$
$$+ \lambda\left[\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\nabla_p^2\right) - 1\right]\Lambda(t, \mathbf{R}, \mathbf{p}_o|T|\mathbf{r}, \mathbf{p}),$$

где ∇_p — оператор градиента в пространстве импульсов.

Уравнение (16) описывает плотность вероятности нахождения классической частицы в момент времени T в точке фазового пространства $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ с учетом сделанных допущений, если в момент времени t_o частица находилась в точке с координатой $\mathbf{R}$ и имела импульс $\mathbf{p}_o$.

Оператор усреднения $\left(\dfrac{\sigma^2}{2}\nabla_p^2\right)$ и правило его действия рассмотрены в работе [22].

Заключение

В статье предложен метод, позволяющий описать эволюцию во времени детерминированной системы при условии задания ее изменения за малый промежуток времени. С этой целью построено ассоциативное некоммутативное кольцо, позволяющее описать эволюцию произвольной детерминированной системы. Введенный аппарат некоммутативного умножения является альтернативой операторного исчисления квантовой механики. Основное отличие рассматриваемого аппарата заключается в том, что все элементы колец являются обычными функциями числовых переменных в отличие от математического аппарата классической квантовой механики, что дает возможность придавать им различный физический смысл. Рассмотрен пример построения дифференциального уравнения, описывающего движение классической частицы при наличии случайных сил. Полученное уравнение описывает плотность вероятности нахождения классической частицы в произвольный момент времени в фазовом пространстве.

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
3. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука, 1997. 285 р.
4. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики: Режимы с обострением, самоорганизация, темпомиры. СПб.: Алетейя, 2002. 414 с.
5. Рымкевич П.П. Введение в теорию распространения свойств // Труды XXVII летней школы «Анализ и синтез нелинейных систем». СПб.: ИПМаш РАН, 2000. С. 455–497.
6. Горшков А.С., Макаров А.Г., Романова А.А., Рымкевич П.П. Оценка среднего времени прохождения теплового потока через многослойные текстильные и швейные изделия // Известия вузов. Технология легкой промышленности. 2011. № 4. С. 44–45.
7. Рымкевич П.П., Макаров А.Г., Басенко В.Г., Ляшенко В.А., Шафаренко Ю.К. Диаграммный метод решения одномерных нестационарных задач в теории тепло- и массопереноса // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. 2015. № 4. С. 8–12.
8. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 526 с.
9. Рымкевич П.П., Горшков А.С. Теория переноса. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2015. 120 с.
10. Рымкевич П.П., Горшков А.С. Уравнение переноса аддитивных свойств в квантовой механике. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 128 p.
11. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973. 621 с.
12. Фейнман Р.П. Об операторном исчислении, имеющем приложение в квантовой электродинамике // Проблемы современной физики. 1955. Т. 3. С. 37–79.
13. Карасев М.В., Маслов В.П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991. 365 с.
14. Маслов В.П. Применение метода упорядоченных операторов для получения точных решений // Теоретическая и математическая физика. 1977. Т. 3. № 2. С. 185–209.
15. Карасев М.В., Маслов В.П. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II. Операторные унитарно-нелинейные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1979. Т. 13. С. 145–267.
16. Маслов В.П., Незайкинский В.Е. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. I. Псевдодифференциальные уравнения с растущими коэффициентами // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1979. Т. 13. С. 5–144.
17. Карасев М.В. О вейлевском и упорядоченном исчислении некоммутирующих операторов // Математические заметки. 1979. Т. 26. № 6. С. 885–907.
18. Anderson R.F.V. The Weyl functional calculus // Journal of Functional Analysis. 1969. V. 4. N 2. P. 240–267. doi: 10.1016/0022-1236(69)90013-5
19. Березин Ф.А. Квантование // Известия АН СССР. Серия математическая. 1974. Т. 38. № 5. С. 1116–1175.
20. Лифшиц Е.М., Патаевский Л.П. Теоретическая физика: учеб. пособие для физ. спец. ун-тов. Т. 9. Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния. М.: Наука, 1978. 497 с.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. пособие для физ. спец. ун-тов. Т. 4. Статистическая физика. Часть 1. М.: Наука, 1976. 583 с.
22. Рымкевич П.П., Головина В.В., Алтухов А.И. Осреднение уравнений движения в потенциальных автономных системах // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 1. С. 141–146. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-141-146

References

1. Andronov A.A. Vitt A.A., Khaikin S.E. *Oscillation Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1981, 568 p. (in Russian)
2. Guckenheimer J., Holmes Ph. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1990, 459 p.
3. Kapitca S.P., Kurdiumov S.P. *Synergetics and Future Forecasts*. Moscow, Nauka Publ., 1997, 285 p. (in Russian)
4. Kniazeva E.N., Kurdiumov S.P. *Fundamental Principles of Synergetics: Blow-Up Regimes, Self-Organization and Tempo Structures*. St. Petersburg, Aletejja Publ., 2002, 414 p. (in Russian)
5. Rymkevich P.P. Introduction to properties propagation theory. *Proc. XXVII Summer International School "Analysis and synthesis of nonlinear mechanics of oscillatory systems"*, St. Petersburg, 2000, pp. 455–497. (in Russian)
6. Gorshkov A.S., Makarov A.G., Romanova A.A., Rymkevitch P.P. Estimation of the average period of the nonstationary heat transmission through multi layered textile and clothing industry fabrics. *The News of higher educational institutions. Technology of Light Industry*, 2011, no. 4, pp. 44–45. (in Russian)
7. Rymkevich P., Makarov A., Basenko V., Liashenko V., Shafarenko Yu. The chart method of the solution of the one-dimensional non-stationary tasks in the theory of heat and mass transfer. *Vestnik of St. Petersburg State University of Technology and Desig. Series 1. Natural and Technical Sciences*, 2015, no. 4, pp. 8–12. (in Russian)
8. Gardiner C.W. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer, 1985.
9. Rymkevich P.P., Gorshkov A.S. *Transport Theory*. St. Petersburg, SPbPU Publ., 2015, 120 p. (in Russian)
10. Rymkevich P.P., Gorshkov A.S. *Transfer Equation of Additive Properties in Quantum Mechanics*. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015, 128 p. (in Russian)
11. Maslov V.P. *Method of Operators*. Moscow, Nauka Publ., 1973, 621 p. (in Russian)
12. Feinman R.P. On the operator calculus applied in quantum electrodynamics. *Problemy sovremennoj fiziki*, 1955, vol. 3, pp. 37–79. (in Russian)
13. Karasev M.V., Maslov V.P. *Nonlinear Poisson Brackets. Geometry and Quantization*. Moscow, Nauka Publ., 1991, 365 p. (in Russian)
14. Maslov V.P. Application of the method of ordered operators to obtain exact solutions. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1977, vol. 33, no. 2, pp. 960–976. doi: 10.1007/BF01036594
15. Karasev M.V., Maslov V.P. Algebras with general commutation relations and their applications. II. Unitary-nonlinear operator equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 1981, vol. 15, no. 3, pp. 273–368. doi: 10.1007/BF01083679
16. Maslov V.P., Nazaikinskii V.E. Algebras with general commutation relations and their applications. I. Pseudodifferential equations with increasing coefficients. *Journal of Soviet Mathematics*, 1981, vol. 15, no. 3, pp. 167–273. doi: 10.1007/BF01083678
17. Karasev M.V. Weyl and ordered calculus of noncommuting operators. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 26, no. 6, pp. 945–958. doi: 10.1007/BF01142081
18. Anderson R.F.V. The Weyl functional calculus. *Journal of Functional Analysis*, 1969, vol. 4, no. 2, pp. 240–267. doi: 10.1016/0022-1236(69)90013-5
19. Berezin F.A. Quantization. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1974, vol. 8, no. 5, pp. 1109–1165. doi: 10.1070/IM1974v008n05ABEH002140
20. Lifshitc E.M., Pataevskii L.P. *Theoretical Physics. Tutorial. V. 9. Statistical Physics. Part 2. Condensed State Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 497 p. (in Russian)
21. Landau L.D., Lifshitc E.M. *Theoretical Physics. Tutorial. V. 4. Statistical Physics. Part. 1*. Moscow, Nauka Publ., 1976, 583 p. (in Russian)
22. Rymkevich P.P., Golovina V.V., Altukhov A.I. Motion equation averaging in potential autonomous systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 1, pp 141–146. (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-141-146

Авторы

Головина Виктория Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-2691-7680, victoria_gol@mail.ru

Грошиков Евгений Сергеевич — помощник начальника учебно-методического отдела, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0003-4434-6815, mops643@mail.ru

Рымкевич Павел Павлович — доктор технических наук, доцент, профессор, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-9362-0561, pprymkevich@gmail.com

Authors

Victoria V. Golovina — PhD, Associate Professor, Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-2691-7680, victoria_gol@mail.ru

Evgeny S. Groshikov — Assistant Head of the Educational and Methodological Department, Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0003-4434-6815, mops643@mail.ru

Pavel P. Rymkevich — D.Sc., Associate Professor, Professor, Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-9362-0561, pprymkevich@gmail.com