УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
июль–август 2020 Том 20 № 4 ISSN 2226-1494 http://ntv.itmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
July–August 2020 Vol. 20 No 4 ISSN 2226-1494 http://ntv.itmo.ru/en/
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

**УДК 536.6** doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588

# ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ОДНОМЕРНЫХ ТЕЛАХ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

**Н.В. Пилипенко[a], Ю.П. Заричняк[a], В.А. Иванов[b], А.М. Халявин[a]**

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
[b] Институт физико-технических проблем Севера им. В.П. Ларионова Сибирского отделения Российской академии наук, Якутск, 677980, Российская Федерация
Адрес для переписки: pilipenko38@mail.ru, amkhalyavin@gmail.com

**Информация о статье**
Поступила в редакцию 01.05.20, принята к печати 08.06.20
Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Пилипенко Н.В., Заричняк Ю.П., Иванов В.А., Халявин А.М. Параметрическая идентификация дифференциально-разностных моделей теплопереноса в одномерных телах на основе алгоритмов фильтра Калмана // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 4. С. 584–588. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588

**Аннотация**
Рассмотрено решение обратной задачи теплопроводности путем параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса в одномерных телах. Дифференциально-разностная модель представляет собой систему дифференциальных обыкновенных уравнений первого порядка относительно вектора состояния. При этом решаются прямая и обратная задачи теплопроводности, а для минимизации функции невязки между измеренными и модельными значениями параметров используется алгоритм рекуррентного цифрового фильтра Калмана по параметрам. В работе рассматривается его применение для решения двух определенных задач, а именно: оценивание и планирование эксперимента по восстановлению граничных условий теплообмена системы тел. При планировании эксперимента, либо при натурных исследованиях, вначале проводится параметризация задачи, а затем параметрическая идентификация. Для определения доверительной области измерения искомых параметров используется матрица Грама (информационная матрица Фишера), составляющими которой являются функции чувствительности, отражающие все значимые факторы теплометрии: вид теплопереноса в системе, количество и место расположение точек измерения температуры, качество каналов регистрации измеряемых величин, особенности входных воздействий, участок измерений по времени и количество моментов времени измерений на этом участке и др. В статье приводится пример применения фильтра Калмана, рассмотрен батарейный преобразователь нестационарного теплового потока, для которого проведено построение дифференциально-разностной модели, показаны результаты восстановления нестационарного теплового потока, меняющегося по произвольному закону, и установлены доверительные области искомых параметров.

**Ключевые слова**
обратная задача теплопроводности, параметрическая идентификация, фильтр Калмана

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588

# PARAMETRIC IDENTIFICATION OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE MODELS OF HEAT TRANSFER IN ONE-DIMENSIONAL BODIES BASED ON KALMAN FILTER ALGORITHMS

**N.V. Pilipenko[a], Yu.P. Zarichnyak[a], V.A. Ivanov[b], A.M. Khalyavin[a]**

[a] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
[b] Larionov Institute of the North Physical-Technical Problems of the RAS Siberian Branch, Yakutsk, 677980, Russian Federation
Corresponding author: pilipenkomail.ru, amkhalyavin@gmail.com

**Article info**
Received 01.05.20, accepted 08.06.20
Article in Russian

**For citation:** Pilipenko N.V., Zarichnyak Yu.P., Ivanov V.A., Khalyavin A.M. Parametric identification of differencial-difference models of heat transfer in one-dimensional bodies based on Kalman filter algorithms. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 584–588 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588

**Abstract**
The paper considers the solution of the inverse heat conduction problem by parametric identification of differential-difference models of heat transfer in one-dimensional bodies. Differential-difference models is a system of differential ordinary equations of the first order with respect to the state vector. In this case, the direct and inverse heat conduction problems are solved, and the Kalman recurrent digital filter algorithm is used in terms of parameters for discrepancy minimization between the measured and model parameters values. The paper considers the Kalman algorithm application for two specific problems, namely: an experiment estimation and planning for restoration of heat transfer boundary conditions for a system of bodies. When planning an experiment or during field studies, the task parametrization is carried out initially and then parametric identification, as well. To determine the confidence area for measuring the desired parameters, the Gram matrix (Fisher information matrix) is used, involving the components which are sensitivity functions that represent all significant factors of heat metering: the type of heat transfer in the system, the number and location of temperature measurement points, the quality of channels for recording measured values, and the features of input actions, time measurement section and the number of measurement time points in this section. The paper gives an example of Kalman recurrent digital filter, considers the battery transformer of unsteady heat flux, for which the creation of the differential-difference model is carried out, shows the results of unsteady heat flux restoration, changing according to an arbitrary law. Confidence areas of the desired parameters are established.

**Keywords**
inverse heat conduction problem, parametric identification, Kalman filter

## Введение

При исследовании нестационарного теплообмена в системах тел в различных областях знаний возникает необходимость определения локальных плотностей тепловых потоков на поверхностях объектов исследования, контроля и управления. В частности, это теплоэнергетика, ракетные и космические летательные аппараты, медицина, аэрогидродинамические трубы и др. При этом необходимо рассчитать значения теплового потока по измеренным температурам или их разностями, в отдельных точках исследуемых тел. Эта задача относится к обратным задачам теплопроводности (ОЗТ), которые как известно, делятся на граничные, коэффициентные и комбинированные ОЗТ. В работе [1] рассмотрены различные методы решения ОЗТ, однако возникают новые задачи, которые требуют совершенствования известных методов, а также создания приборов для получения информации, необходимой для решения конкретных ОЗТ. Одной из актуальных проблем является также задача оценивания и устранения методологических неопределенностей при планировании и проведении эксперимента [2–5].

В данной работе рассмотрен метод параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса в одномерных телах с использованием рекуррентного линейного цифрового фильтра Калмана (ФК) по параметрам [6]. Применение ФК охватывает много различных областей знаний, но чаще всего его используют как инструмент для решения двух определенных задач: оценивания и планирования эксперимента. ФК – это полное статистическое описание задачи оценивания, но его возможности значительно шире, чем просто оценивание, так как он полностью определяет во времени распределение вероятностей тех параметров, которые подлежат оцениванию, тем самым характеризуя текущий уровень знания о динамической системе, основываясь на данных всех предыдущих проведенных измерениях. Полученные распределения вероятности составляют основу дальнейшего статистического анализа и методов планирования эксперимента при выборе и использовании всевозможных моделей [7].

## Метод восстановления граничных условий теплообмена в системе тел на основе алгоритмов фильтра Калмана

В основе метода лежит параметризация ОЗТ с последующей параметрической идентификацией дифференциально-разностной модели (ДРМ) теплопереноса в объекте исследования, представляющую собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно вектора температурного состояния $\mathbf{T}(\tau) = [t_i(\tau)]_{i=1}^{n}$.

В общем случае ДРМ имеет вид [2]:

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{T}(\tau) + \mathbf{G}(\tau)\mathbf{U}(\tau), \qquad (1)$$

где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ — матрицы обратных связей и управления; $\mathbf{U}(\tau)$ — вектор управления. Матрицы обратных связей и управления зависят от температуры, и уравнение (1) является нелинейным.

В объекте проводятся измерения: температуры в отдельных точках; разности температур; среднеобъемные температуры, что отражено в матрице измерений $\mathbf{H}$ универсальной модели измерений $\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}\mathbf{T}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k$, где $\mathbf{Y}_k$ — вектор измерений; $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ — вектор случайных погрешностей.

Для определения искомых параметров решается ОЗТ. При этом принимается допущение о том, что известен характер изменения граничных условий на поверхности системы тел – тепловой поток, который позволяет с требуемой точностью выполнить кусочно-линейную аппроксимацию на всем интервале его изменения:

$$q(\tau) = \sum_{j=1}^{r} q_j \varphi_j(\tau),$$

где $\varphi_j(\tau)$ — система базисных функций; $q_j$ — априори неизвестные коэффициенты, которые объединяются в вектор искомых параметров $\mathbf{Q} = |q_1 \ldots q_r|^T$ ($T$ — знак транспонирования). В качестве базисной функции используются B-сплайны 1-го порядка. Такую аппроксимацию $q(\tau)$ называют параметризацией ОЗТ. Тогда задача восстановления $q(\tau)$ сводится к параметрической идентификации ДРМ теплопереноса в объекте — последовательному получению оптимальных оценок $\hat{\mathbf{Q}}_{z,l}$ вектора искомых параметров $\mathbf{Q}_z$.

Оптимальные оценки $\hat{\mathbf{Q}}_{z,l}$ вектора искомых параметров $\mathbf{Q}_z$ получаются путем минимизации по $\mathbf{Q}_z$ квадратичной функции невязки [8]:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}_z) = \sum_{k=1}^{l} (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\mathbf{Q}_z))^T\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\mathbf{Q}_z)),$$

где $\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}_z)$ — переходная матрица; $\hat{\mathbf{Y}}_k(\mathbf{Q}_z)$ — аналог вектора измерений $\mathbf{Y}_k$, рассчитываемый по ДРМ теплопереноса для различных значений искомых параметров $\mathbf{Q}_z$, который называется модельным вектором измерений; $\mathbf{R}$ — ковариационная матрица вектора случайных погрешностей $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ в измерениях температур.

Для получения оптимальных оценок $\hat{\mathbf{Q}}_{k+1}$ вектора $\mathbf{Q}$ в $(k + 1)$-й момент времени используется ФК по искомым параметрам [9]:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{k+1} = \hat{\mathbf{Q}}_k + \mathbf{K}_{k+1}[\mathbf{Y}_{k+1} - \hat{\mathbf{Y}}_{k+1}(\hat{\mathbf{Q}}_k)],$$
$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T[\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}]^{-1},$$
$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k,$$

где $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{P}_{k+1}$ — ковариационные матрицы ошибок оценок параметров для моментов времени $\tau_k = k\Delta\tau$ и $\tau_k = (k + 1)\Delta\tau$; $\mathbf{H}_k$ — матрица коэффициентов чувствительности измеряемой температуры к изменению искомых параметров в момент времени $\tau_{k+1}$; $\mathbf{K}_k$ — весовая матрица.

## Оценка доверительной области искомых параметров

Рассмотрим систему тел в виде трех пластин, которые образуют батарейный преобразователь теплового потока (ПТП) с одномерным полем температуры при воздействии неизвестного теплового потока $q(\tau)$. При этом будем считать известными: температуру на поверхности тела $t(\tau)$; граничное условие на тыльной стороне третьей пластины, а также априорные сведения о характере изменения $q(\tau)$. Тогда, как показано в [2], можно выполнить кусочно-линейную В-сплайн аппроксимацию и на каждом ее $z$-ом участке выделить вектор искомых параметров $\mathbf{Q}_z(z = 1, 2, 3\ldots n)$:

$$\mathbf{Q}_z = |q_{a_z}\ \ q_{b_z}|^T,$$

где $q_{a_z}, q_{b_z}$ — значения потока в начале и в конце участка сплайн-аппроксимации; $T$ — знак транспонирования.

Входящая в ФК матрица функций чувствительности имеет следующий вид [10]:

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left.\frac{\partial \mathbf{Y}_k}{\partial \mathbf{Q}}\right|_{\mathbf{Q}=\hat{\mathbf{Q}}_k} = \begin{vmatrix} U_{1q_a(k+1)} & U_{1q_b(k+1)} \\ U_{2q_a(k+1)} & U_{2q_b(k+1)} \\ \ldots & \ldots \\ U_{mq_a(k+1)} & U_{mq_b(k+1)} \end{vmatrix}.$$

Составляющие матрицы $\mathbf{H}_{k+1}$

$$U_{jq_a(k+1)} = \left.\frac{\partial y_{j,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_a}\right|_{\mathbf{Q}=\hat{\mathbf{Q}}_k},\ U_{jq_a(k+1)} = \left.\frac{\partial y_{j,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_b}\right|_{\mathbf{Q}=\hat{\mathbf{Q}}_k} \quad (2)$$

являются функциями чувствительности $j$-го измерения $y_i(\hat{\mathbf{Q}}_k)$ к искомым параметрам $q_a$ и $q_b$ в $(k+1)$-й момент времени $(k = 1,2,\ldots,l)$. Значения функций чувствительности рассчитываются по известной $k$-ой оценке $\hat{\mathbf{Q}}_k$ вектора искомых параметров путем решения уравнения теплопереноса, при этом общий, всегда практически реализуемый, универсальный метод их определения — вычисление по следующим формулам [1]:

$$U_{jq_a(k+1)} = \frac{y_{j(k+1)}(\hat{q}_{ak} \pm \Delta q_a, \hat{q}_{bk}) - y_{j(k+1)}(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk})}{\Delta q_a},$$
$$U_{jq_b(k+1)} = \frac{y_{j(k+1)}(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk} \pm \Delta q_b) - y_{j(k+1)}(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk})}{\Delta q_b}. \quad (3)$$

Таким образом, для построения матрицы $\mathbf{H}_{k+1}$ для $(k+1)$-го момента времени необходимо по формулам (3) определить изменение во времени значений функции чувствительности.

Ковариационная матрица $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{Q}})$, входящая в ФК, является характеристикой точности оценок $\hat{\mathbf{Q}}$ и имеет вид:

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{Q}}_l) = \sigma^2\left(\sum_{k=1}^{l}\mathbf{H}_k^T\mathbf{H}_k\right)^{-1}, \quad (4)$$

где $\sigma^2$ — среднеквадратическое отклонение при измерении температуры (влияние шума при измерениях).

Выражение в скобках в формуле (4) является матрицей Грама $\mathbf{A}_l$ для системы векторов функций чувствительности (она же — аналог информационной матрицы Фишера) [11]. В рассматриваемом случае при измерении температуры на поверхности ПТП

$$\mathbf{A}_l(\hat{\mathbf{Q}}_l) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

где

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{l} U_{q_{ak}}^2,\ a_{22} = \sum_{k=1}^{l} U_{q_{bk}}^2,\ a_{21} = a_{12} = \sum_{k=1}^{l} U_{q_{ak}}U_{q_{bk}}. \quad (5)$$

После определения элементов матрицы Грама можно рассчитать абсолютные неопределенности измерения значений $\pm\Delta q_a$ и $\pm\Delta q_b$ для первого участка сплайн-аппроксимации теплового потока. Поскольку, как указывалось ранее, ФК является рекуррентной процедурой, не представляет трудности определить параметры $\pm\Delta q_c$, $\pm\Delta q_d$ и т. д., т. е. определить значения указанных параметров на каждом участке сплайн-аппроксимации и, таким образом, установить доверительную область по всем интервалам измерения искомого теплового потока $q(\tau)$ [12].

$$\Delta q_a = \pm\sigma\sqrt{\frac{-a_{22}B}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}},\quad \Delta q_b = \pm\sigma\sqrt{\frac{-a_{11}B}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}},$$

где $B = \chi^2_{1-\alpha}$; $a$ — заданная вероятность; $\chi^2$ — квадрат распределения с вероятностью $1 - \alpha$; если $\alpha = 0{,}95$, то $B = \chi^2_{1-0{,}95} = 5{,}911$ [13].

## Пример использования изложенного метода

Рассмотрим пример определения доверительной области при восстановлении нестационарного теплового потока с помощью батарейного ПТП, описание которого приведено в главе 2 [6], используемого при проведении исследований в дисперсных средах.

На рисунке показан характер изменения в ходе эксперимента температуры $t(\tau)$ и теплового потока $q(\tau)$, восстановленного по разработанной авторами программе «Heat Identification» [14] с использованием ФК. Необходимо установить доверительную область восстановленного теплового потока $q(\tau)$.

Для решения задачи разбиваем один из интервалов сплайн-аппроксимации (в частности, от $\tau_1$ до $\tau_2$) на участки $\Delta\tau$ (например, 5 участков) и рассчитываем с использованием указанной программы температуры, соответствующие полученному потоку на границах участков:

$$t = \begin{pmatrix} 23{,}10 \\ 33{,}37 \\ 40{,}87 \\ 46{,}37 \\ 52{,}17 \end{pmatrix} \text{°C — значения для моментов времени}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ с.}$$

Для определения функций чувствительности по формулам (2) задаем приращение $\gamma = 0{,}01$ вначале для $q_a$, а затем, зафиксировав $q_a$, для $q_b$, и рассчитываем температуры на участках:

$$t_{q_a} = \begin{pmatrix} 23{,}29 \\ 33{,}61 \\ 41{,}14 \\ 46{,}67 \\ 52{,}48 \end{pmatrix} \text{°C}, \; t_{q_b} = \begin{pmatrix} 23{,}29 \\ 33{,}61 \\ 41{,}14 \\ 46{,}67 \\ 52{,}48 \end{pmatrix} \text{°C — значения}$$

для моментов времени

Определяем функции чувствительности по формулам (2):

$$U_{q_a} = \begin{pmatrix} 1{,}92\cdot10^{-3} \\ 2{,}45\cdot10^{-3} \\ 2{,}74\cdot10^{-3} \\ 2{,}97\cdot10^{-3} \\ 3{,}08\cdot10^{-3} \end{pmatrix} \text{м}^2\text{°C/Вт}, \; U_{q_b} = \begin{pmatrix} 1{,}46\cdot10^{-4} \\ 3{,}93\cdot10^{-4} \\ 7{,}09\cdot10^{-4} \\ 1{,}09\cdot10^{-3} \\ 0{,}52\cdot10^{-3} \end{pmatrix} \text{м}^2\text{°C/Вт}.$$

Находим коэффициенты матрицы Грама по формулам (5), по которым и определяем $\Delta_{q_a}$ и $\Delta_{q_b}$:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{5} U_{q_{ak}}^2, \; a_{11} = 3{,}5\cdot10^{-5}\ \text{К}^2\cdot\text{м}^4/\text{Вт}^2;$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{5} U_{q_{bk}}^2, \; a_{22} = 4{,}2\cdot10^{-6}\ \text{К}^2\cdot\text{м}^4/\text{Вт}^2;$$

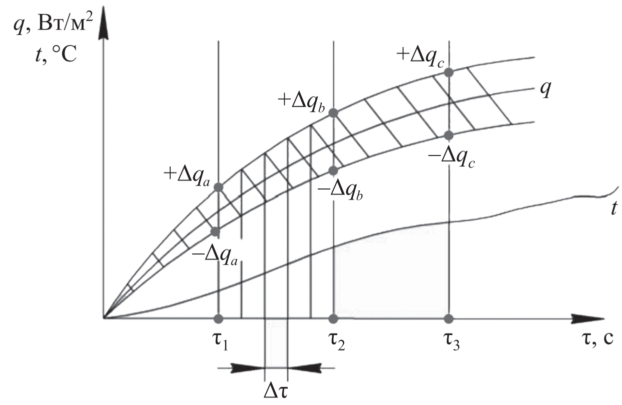


*Рисунок*. Доверительная область восстановленного теплового потока

$$a_{21} = a_{12} = \sum_{k=1}^{5} U_{q_{ak}} U_{q_{bk}}, \; a_{21} = a_{12} = 1{,}1\cdot10^{-5}\ \text{К}^2\cdot\text{м}^4/\text{Вт}^2;$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3{,}5\cdot10^{-5} & 1{,}1\cdot10^{-5} \\ 1{,}1\cdot10^{-5} & 4{,}2\cdot10^{-6} \end{vmatrix};$$

$$\Delta q_a = \pm\,\sigma\sqrt{\frac{-a_{22}B}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}, \; \Delta q_a = \pm 0{,}99\cdot10^3\ \sigma\text{Вт/м}^2;$$

$$\Delta q_b = \pm\,\sigma\sqrt{\frac{-a_{11}B}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}, \; \Delta q_b = \pm 2{,}92\cdot10^3\ \sigma\text{Вт/м}^2;$$

При вычислении $\Delta q_a$ и $\Delta q_b$ приняты значения $\sigma = 1$°C и $B = 5{,}911$.

## Заключение

Приведено решение обратной задачи теплопроводности, полученное путем параметрической идентификации дифференциально-разностной модели процесса теплопереноса в системе тел, базирующееся на применении рекуррентного цифрового фильтра Калмана по параметрам. Выполнена априорная параметризация задачи, основанная на представлении искомого теплового потока B-сплайнами первого порядка для каждого кусочно-линейного участка [15]. Установлены границы доверительных областей определения искомых параметров на основе функций чувствительности, которые получены путем решения уравнений теплопереноса. Приведены результаты модельных экспериментов. Разработанные методы и устройства используются при восстановлении плотности нестационарного теплового потока в ударных аэродинамических трубах, при проведении исследований в дисперсных средах.

## Литература


1. Бек Д., Блакуэлл Б., Сент-Клер Ч., мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.
2. Кириллов К.В., Пилипенко Н.В. Алгоритмы программ для решения прямых и обратных задач теплопроводности при использо-


## References


1. Beck J.V., Blackwell B., St. Clair Ch.R., jr. *Inverse Heat Conduction. Ill-Posed Problems*. James Beck, 1985, 308 p.
2. Kirillov K., Pilipenko N. Solution algorithms for direct and backward heat conductivity problems by means of differential-difference

вании дифференциально-разностных моделей // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2010. № 5(69). С. 106–110.

3. Пилипенко Н.В. Методические погрешности определения нестационарных условий теплообмена при параметрической идентификации // Измерительная техника. 2007. № 8. С. 54–59.
4. Пилипенко Н.В., Польщиков Г.В., Сиваков И.А. Установка для определения динамических характеристик сенсоров теплового потока // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 5. С. 71–75.
5. Ярышев Н.А. Теоретические основы измерения нестационарной температуры. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 256 с.
6. Пилипенко Н.В. Методы и приборы нестационарной теплометрии на основе решения обратных задач теплопроводности. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. 180 с.
7. Пилипенко Н.В. Использование расширенного фильтра Калмана в нестационарной теплометрии при решении обратных задач теплопроводности // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2019. Т. 62. № 3. С. 212–217. doi: 10.17586/0021-3454-2019-62-3-212-217
8. Пилипенко Н.В. Методы параметрической идентификации в нестационарной теплометрии. Ч. 2 // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2003. Т. 46. № 10. С. 67–71.
9. Сиваков И.А., Пилипенко Н.В. Применение фильтра Калмана при восстановлении плотности теплового потока на поверхности объекта исследования в импульсной аэродинамической трубе // Сборник докладов IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Информационные технологии в науке, образовании и экономике». 2012. С. 55–58.
10. Пилипенко Н.В. Неопределенность восстановления нестационарного теплового потока путем параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 7. С. 664–671. doi: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-664-671
11. Pilipenko N. Parametric identification of differential-difference heat transfer models in non-stationary thermal measurements // Heat Transfer Research. 2008. V. 39. N 4. P. 311–315. doi: 10.1615/HeatTransRes.v39.i4.40
12. Пилипенко Н.В., Казарцев Я.В. Оптимальное планирование эксперимента при идентификации процессов теплообмена сенсоров теплового потока // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2011. Т. 54. № 5. С. 88–93.
13. Худсон Д. Статистика для физиков: Лекции по теории вероятностей и элементарной статистике. М.: Мир, 1970. 296 с.
14. Пилипенко Н.В. Восстановление нестационарных тепловых потоков на основе решения обратных задач теплопроводности // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 6. С. 538–544. doi: 10.17586/0021-3454-2017-60-6-538-544
15. Пилипенко Н.В. Нестационарная теплометрия на основе решения обратных задач теплопроводности // Сборник трудов девятой Международной научно-практической конференции «Исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности». Санкт-Петербург, 2010. С. 388–392.

models. *Scientific and Technical Bulletin of St. Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2010, no. 5(69), pp. 106–110. (in Russian)

3. Pilipenko N.V. The systematic errors in determining the nonstationary heat-exchange conditions with parametric identification. *Measurement Techniques*, 2007, vol. 50, no. 8, pp. 880–887. doi: 10.1007/s11018-007-0166-4
4. Pilipenko N.V., Polschikov G.V., Sivakov I.A. Setup for determination of dynamic characteristics of heat flux sensors. *Journal of Instrument Engineering*, 2013, vol. 56, no. 5, pp. 71–75. (in Russian)
5. Yaryshev N.A. *Theoretical Basis of Non-Stationary Measurement of Temperature*. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1990, 256 p. (in Russian)
6. Pilipenko N.V. *Methods and Devices for Unsteady Heat Measuring Based on the Solution of Inverse Heat Conduction Problems*. St. Petersburg, NRU ITMO Publ., 2011, 180 p. (in Russian)
7. Pilipenko N.V. Using the extended Kalman filter in nonstationary thermal measurement when solving inverse heat transfer problems. *Journal of Instrument Engineering*, 2019, vol. 62, no. 3, pp. 212–217. (in Russian). doi: 10.17586/0021-3454-2019-62-3-212-217
8. Pilipenko N.V. Methods of parametric identification in the non-stationary heat metering. Part 2. *Journal of Instrument Engineering*, 2003, vol. 46, no. 10, pp. 67–71. (in Russian)
9. Sivakov I.A., Pilipenko N.V. Kalman filter application when restoring heat flux density on study object surface in pulsed wind tunnel. *Proc. IV All-Russian Scientific-Practical Conference with International Participation "Information Technologies in Science, Education and Economy"*, 2012, pp. 55–58. (in Russian)
10. Pilipenko N.V. Uncertainty of non-stationary heat flux recovery by parametric identification of differential-difference model of heat transmission. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, vol. 60, no. 7, pp. 664–671. (in Russian). doi: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-664-671
11. Pilipenko N. Parametric identification of differential-difference heat transfer models in non-stationary thermal measurements. *Heat Transfer Research*, 2008, vol. 39, no. 4, pp. 311–315. doi: 10.1615/HeatTransRes.v39.i4.40
12. Pilipenko N.V., Kazartsev Y.V. Optimal design of experiment on heat exchange processes identification in heat flow sensors. *Journal of Instrument Engineering*, 2011, vol. 54, no. 5, pp. 88–93. (in Russian)
13. Hudson D.I. *Statistic: Lectures on Elementary Statistics and Probability*. 1964.
14. Pilipenko N.V. Retrieval of non-stationary heat flow based on solution of inverse problems of heat conduction. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, vol. 60, no. 6, pp. 538–544. (in Russian). doi: 10.17586/0021-3454-2017-60-6-538-544
15. Pilipenko N.V. Non-stationary heat metering based on inverse thermal conduction problems. *Proc. 9th International Scientific and Practical Conference "High-Tech Research, Development and Application in Industry"*, 2010, pp. 388–392. (in Russian)

## Авторы

**Пилипенко Николай Васильевич** — доктор технических наук, профессор, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 7006938207, ORCID ID: 0000-0001-9328-3166, pilipenko38@mail.ru

**Заричняк Юрий Петрович** — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 6701513411, ORCID ID: 0000-0001-8713-3583, zarich4@gmail.com

**Иванов Василий Алексеевич** — доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт физико-технических проблем Севера им. В.П. Ларионова Сибирского отделения Российской академии наук, Якутск, 677980, Российская Федерация, Scopus ID: 55877679700, ORCID ID: 0000-0003-0995-8541, v.ivanov49@mail.ru

**Халявин Алексей Михайлович** — студент, инженер, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-4539-3245, amkhalyavin@gmail.com

## Authors

**Nikolay V. Pilipenko** — D.Sc., Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 7006938207, ORCID ID: 0000-0001-9328-3166, pilipenko38@mail.ru

**Yurii P. Zarichnyak** — D.Sc., Senior Scientific Researcher, Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 6701513411, ORCID ID: 0000-0001-8713-3583, zarich4@gmail.com

**Vasiliy A. Ivanov** — D.Sc., Leading Scientific Researcher, Larionov Institute of the North Physical-Technical Problems of RAS Siberian Branch, Yakutsk, 677980, Russian Federation, Scopus ID: 55877679700, ORCID ID: 0000-0003-0995-8541, v.ivanov49@mail.ru

**Alexey M. Khalyavin** — Student, Engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-4539-3245, amkhalyavin@gmail.com