doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-2-179-190
УДК 62-50

Модальная чувствительность, робастность и грубость динамических систем (обзорная статья)

Роман Оморович Оморов[1]✉

[1] Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика

[1] romano_ip@list.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-3555-132

Аннотация

Рассмотрены вопросы развития теорий чувствительности и модальной чувствительности, робастности и грубости динамических систем. В современной теории динамических систем и систем автоматического управления возникает необходимость изучения свойств чувствительности, робастности и грубости систем во взаимосвязи. Прикладное значение теории чувствительности связано с проектированием и созданием высокоточных, малочувствительных систем. Наиболее существенные результаты при этом были достигнуты при разработке дифференциальных методов анализа и синтеза малочувствительных систем. Один из подходов к проблеме анализа и синтеза линейных систем малой параметрической чувствительности в пространстве состояний был разработан с применением функций модальной чувствительности или, иначе говоря, методом модальной чувствительности. В обзоре рассмотрены методы исследований и обеспечения робастной устойчивости интервальных динамических систем как алгебраического, так и частотного направлений робастной устойчивости. Приведены основные результаты оригинального алгебраического метода для непрерывного и дискретного времени. В разделе «Основные этапы развития теории грубости систем» изложены основные положения теории и метода топологической грубости динамических систем, основанного на понятии грубости по Андронову–Понтрягину. Приложения метода топологической грубости к синергетическим системам и хаосу использованы для исследований многих систем, таких как аттракторы Лоренца и Рёсслера, систем Белоусова–Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», бифуркации Хопфа, экономических систем Шумпетера и Калдора и др. Для исследований слабо формализуемых и неформализуемых систем предложено использование подхода аналогий теоретико-множественной топологии и абстрактного метода к таким системам. Дальнейшие исследования предполагают развитие теорий чувствительности, робастности, грубости и бифуркаций для сложных нелинейных динамических систем.

Ключевые слова

модальная чувствительность, метод функций модальной чувствительности, метод чисел обусловленности матриц, робастность, грубость динамических систем, интервальная динамическая система, бифуркация, синергетическая система и хаос, метод топологической грубости, особые траектории, особые точки, матричное уравнение Сильвестра

Ссылка для цитирования: Оморов Р.О. Модальная чувствительность, робастность и грубость динамических систем (обзорная статья) // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21, № 2. С. 179–190. doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-2-179-190

The modal sensitivity, robustness and roughness of dynamic systems (review article)

Roman O. Omorov[1]✉

[1] Institute of Machine Science and Automation of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic

[1] romano_ip@list.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-3555-132

© Оморов Р.О., 2021

Abstract

The review focuses on the development of theories of sensitivity and modal sensitivity, robustness and roughness of dynamic systems. In modern theory of dynamic systems and automatic control systems, there is a need to study the properties of sensitivity, robustness and roughness of systems in their interconnection. An import application of sensitivity theory is associated with the design and creation of high-precision and low-sensitivity systems. The most significant results were achieved in the development of differential methods for the analysis and synthesis of low-sensitivity systems. One approach to the analysis and synthesis of linear systems of low parametric sensitivity in the space of states was developed using the functions of modal sensitivity or, in other words, the method of modal sensitivity. A review of robustness theory considers methods of studying and ensuring the robust stability of interval dynamical systems, paying attention to both algebraic and frequency directions of robust stability. The work presents the main results of the original algebraic method of robust stability of interval dynamical systems for continuous and discrete time. The section “Basic development stages of the theory of roughness of systems” describes the main principles of the theory and method of topological roughness of dynamical systems, based on the concept of roughness according to Andronov–Pontryagin. Applications of the topological roughness method to synergetic systems and chaos have been used to investigate many systems, such as the Lorenz and Rössler attractors, the Belousov–Zhabotinsky, Chua, predator-prey, Hopf bifurcation, Schumpeter and Caldor economic systems, etc. The review proposes applying the approach of analogies of theoretical-multiple topology and the abstract method for studying weakly formalized and informal systems. Further research suggests the development of theories of sensitivity, robustness, roughness and bifurcation for complex nonlinear dynamic systems.

Keywords

modal sensitivity, modal sensitivity function method, matrix condition number method, robustness, roughness of dynamic systems, interval dynamic system, bifurcation, synergetic system and chaos, method of topological roughness, special trajectories, special points, Sylvester matrix equation

For citation: Omorov R.O. The modal sensitivity, robustness and roughness of dynamic systems (review article). *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, vol. 21, no. 2, pp. 179–190 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-2-179-190

Введение

Вопросам свойств чувствительности, робастности и грубости динамических систем в современной науке уделяется все больше внимания. Это обусловлено прежде всего тем, что становится актуальным анализ и синтез систем при возмущениях как параметрических, так и внешних сигнальных, которые определены реальными условиями функционирования различных динамических систем.

Рассматриваемые свойства чувствительности, робастности и грубости систем тесно взаимосвязаны. Свойства чувствительности в общем случае противоположны свойствам робастности и грубости. В то же время робастность и грубость отличаются тем, что робастность предполагает любые конечные возмущения, тогда как грубость рассматривается при малых возмущениях, т. е. вблизи невозмущенных состояний систем.

При исследовании чувствительности систем особое место занимают вопросы чувствительности мод (полюсов) или иначе модальной чувствительности систем.

Как известно, впервые *проблема чувствительности* применительно к физическим системам была сформулирована Г. Боде [1]. Иные определения чувствительности предложены в работах известных советских и зарубежных ученых: Е.Н. Розенвассера, Р.М. Юсупова [2]; Р. Томовича, М. Вукобратовича [3]; J. Cruz, W. Perkins [4]; П. Кокотовича [5]. Наиболее широкий обзор по теории чувствительности с обстоятельной библиографией приведен в работе M. Eslami [6].

Прикладное значение теории чувствительности прежде всего связано с проектированием и созданием прецизионных малочувствительных систем автоматического управления. Один из методов (подходов) для решения проблем анализа и синтеза линейных систем управления малой параметрической чувствительности в пространстве состояний с применением функций модальной чувствительности был разработан в диссертации автора [7]. Положения этого метода (подхода), в частности, приведены в совместных работах автора и А.В. Ушакова [8, 9].

Интересы исследователей, которые привлекают проблемы робастности и грубости в различных областях науки и техники, да и не только в теории управления, но и в экологии, синергетике и т. д., связаны с тем, что эти проблемы относятся к важнейшим свойствам систем, рассматриваемым при их реальном функционировании. Особенно расширяет границы проблемы грубости, ее связь с проблемами бифуркаций и катастроф.

Что касается систем управления, то в настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости. Решение этих вопросов связано с основополагающими работами В.Л. Харитонова [10, 11], в которых решены вопросы робастной устойчивости для интервальных полиномов.

В настоящее время получены много новых результатов в теории робастной устойчивости, это прежде всего реберная теорема и дискретные аналоги, и варианты теорем Харитонова. Советскими и российскими учеными — Я.З. Цыпкиным и Б.Т. Поляком [12], Ю.И. Неймарком [13] — разработаны частотные критерии робастной устойчивости типа Михайлова, Найквиста, D-разбиения.

В работах автора [14, 15] представлены оригинальные результаты, полученные для непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, названные в целом *алгебраическим методом робастной устойчивости*.

В классической постановке вопросы *грубости и бифуркаций* динамических систем были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским математиком и физиком А. Пуанкаре [16], в частности, термин бифуркация впервые введен им и означает дословно «раздвоение» или говоря другими словами — от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения.

Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркаций получены А.А. Андроновым и его школой. В работе А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин [17], впервые дано понятие грубости, которое впоследствии названо понятием грубости по Андронову–Понтрягину [18].

В работах автора [19–26] получены результаты, развивающие понятие грубости по Андронову–Понтрягину, позволяющие количественно исследовать и решать задачи грубости и бифуркаций динамических систем, которые эффективно применяемые к синергетическим системам.

В обзоре рассмотрены вопросы развития теорий чувствительности и модальной чувствительности, робастности и грубости динамических систем, в частности, применительно к системам управления и синергетическим системам различной физической природы.

Основные этапы развития теории чувствительности. Модальная чувствительность

Рассмотрим проблему чувствительности применительно к физическим системам, которая была сформулирована в работах [1–5].

Формирование теории чувствительности как самостоятельного научного направления, прежде всего в технической кибернетике, относится к началу 60-х годов XX века. Прикладное значение теории чувствительности связано с проектированием и созданием высокоточных, малочувствительных систем.

При исследовании чувствительности систем применяют методы: дифференциальные и структурные.

Достоинства структурных методов в том, что они позволяют для линейных систем существенно сокращать количество моделей чувствительности для задач анализа.

Основные подходы к синтезу малочувствительных систем следующие:
- выбор такой структуры системы, при которой место включения объекта, являющегося наименее стабильным звеном, наиболее полно отвечает требованиям уменьшения чувствительности системы;
- использование естественных или искусственно введенных в систему избыточных элементов для удовлетворения требованиям малой чувствительности;
- синтез системы по критериям параметрической инвариантности или нулевой чувствительности;
- введение в систему новой обратной связи — обратной связи по функциям чувствительности;
- синтез оптимальных по нечувствительности систем.

Реальные значения параметров систем практически всегда отличаются от расчетных. Это может вызываться неточностью изготовления отдельных элементов, изменениями параметров в процессе хранения и эксплуатации, изменениями внешних условий и т. д.

Изменения параметров приводят к изменениям статических и динамических свойств систем в реальных условиях их функционирования. Это обстоятельство желательно учесть заранее в процессе проектирования и настройки систем. Степень влияния изменения отдельных параметров на различные характеристики систем оценивается посредством чувствительности.

Наиболее существенные результаты по анализу и синтезу малочувствительных систем были достигнуты Е.Н. Розенвассером и Р.М. Юсуповым [2, 27], в особенности при разработке дифференциальных методов анализа и синтеза малочувствительных систем, так в задачах синтеза получены эффективные результаты путем:
- выбора структуры системы, обеспечивающей минимальную чувствительность к вариациям параметров объекта;
- использования избыточности при синтезе систем с учетом требований малой чувствительности;
- синтеза систем по критериям параметрической инвариантности или нулевой чувствительности;
- введением в систему обратной связи по функциям чувствительности;
- синтеза оптимальных по нечувствительности систем управления.

Для уменьшения чувствительности систем к вариациям параметров введением в систему обратной связи по функциям чувствительности образуются два контура:
1) первый контур обеспечивает требуемые динамические свойства при номинальных расчетных характеристиках объекта и регулятора;
2) второй контур уменьшает дополнительное движение, возникающее вследствие изменений параметров объекта и регулятора.

Блок-схема и структурная схема системы управления с двойной обратной связью показаны на рис. 1.

На рис. 1, *a* даны следующие обозначения: $y(t)$, $x(t)$ — вход и выход системы; $f(t)$ — возмущающее воздействие на объект управления; $z(t)$ — выход регулятора; $s(t)$ — выход модели чувствительности; $q(t)$ — корректирующее воздействие; пунктирная линия охватывает замкнутую систему без второй обратной связи, связанной с моделью чувствительности. На рис. 1, *b* — $W_{к1}(p)$, $W_{к2}(p)$, $W_{кm}(p)$ — передаточные функции корректирующих звеньев от 1 до m; $W_{ч1}(p)$, $W_{ч2}(p)$, $W_{чm}(p)$ — передаточные функции звеньев модели чувствительности (МЧ) от 1 до m; $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_m(t)$ — выходы звеньев модели чувствительности от 1 до m; пунктирной линией обозначена МЧ.

Передаточная функция исходной системы (основного контура) по выходному сигналу x относительно управляющего сигнала имеет вид

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_{ос}(p)W_1(p)},$$

где $W_1(p)$ — передаточная функция объекта управления; $W_{ос}(p)$ — передаточная функция обратной связи.

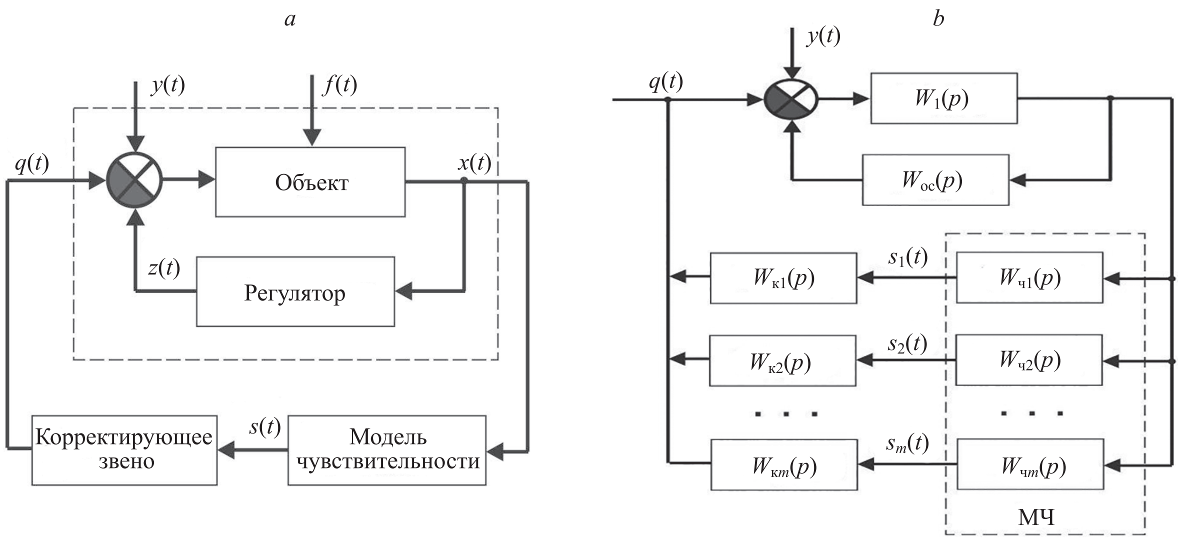

Рис. 1. Блок-схема (*a*) и структурная схема (*b*) системы с двойной обратной связью

Fig. 1. Block diagram (*a*) and structural diagram (*b*) of the dual feedback system

С учетом контура чувствительности получаем передаточную функцию

$$W^*(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)[W_{\text{ос}}(p) + W_{\text{к}}(p)W_{\text{ч}}(p)]}, \qquad (1)$$

где $W_{\text{к}}(p)$ — передаточная функция корректирующего звена; $W_{\text{ч}}(p)$ — передаточная функция модели чувствительности.

Для выбора корректирующих устройств многоконтурной системы, изображенной на рис. 1, *b*, получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} W_{\text{о}}(p) = \dfrac{W_1(p)}{1 + W_{\text{ос}}(p)W_1(p) + W_1(p)\sum\limits_{i=1}^{m} W_{\text{к}i}(p)W_{\text{ч}i}(p)}, \\ S_{\text{о}i}(p) = \dfrac{\partial \ln W_0(p)}{\partial \ln W_i(p)};\ i = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \qquad (2)$$

где $S_{\text{о}i}(p)$ — функции чувствительности; $W_{\text{к}i}(p)$, $W_{\text{ч}i}(p)$ — соответственно передаточные функции i-го звена коррекции и модели чувствительности; $W_{\text{о}}(p)$ — общая передаточная функция системы.

Неизвестными в (1), (2) являются

$$W_{\text{ос}}(p),\ W_{\text{к}1}(p),\ \ldots,\ W_{\text{к}m}(p).$$

Для их нахождения имеем $(m + 1)$ уравнений (2).

К структурным методам достижения минимальной чувствительности относятся результаты, полученные М.В. Мееровым путем выбора структуры системы, принадлежащей к классу устойчивых при неограниченно большом коэффициенте усиления, в соответствующих контурах [28].

Также к структурным методам относятся использование скользящего режима и систем с переменной структурой в скользящем режиме для достижения минимальной чувствительности, которые исследованы в работах Б.Н. Петрова, С.В. Емельянова, В.И. Уткина и других авторов [29–33].

Оригинальный метод достижения малой чувствительности был разработан в работе Перкинса (W.B. Perkins) и Круса (J.B. Cruz) [4], где предложен так называемый метод сравнительной чувствительности, основанный на сравнении дополнительных движений, вызванных вариациями параметров двух систем: номинально эквивалентных разомкнутой и замкнутой (рис. 2).

На рис. 2 даны следующие обозначения: $P(s, \alpha)$, $G(s)$, $H(s)$ — передаточные функции объекта, регулятора и наблюдателя соответственно; s — комплексная переменная преобразования Лапласа; α — параметры объекта; c — индекс замкнутой системы (c-closed); o — индекс разомкнутой системы (o-open); R_s, $Y(s, \alpha)$ — соответственно вход и выход системы.

Проблема минимальной чувствительности является задачей параметрической оптимизации, в которой параметрами являются коэффициенты полиномов числителей матрицы чувствительности **S**, а оптимизируемый функционал есть функционал чувствительности J.

$$\mathbf{S} = [\mathbf{I} + \mathbf{P}(s, \alpha)\mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1},$$

$$J = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \mathbf{E}_o^T(-s, \alpha)\mathbf{S}^T(-s)\mathbf{Q}\mathbf{S}(s)\mathbf{E}_o(s, \alpha)ds,$$

$$\mathbf{E}_c(s, \alpha) = \mathbf{S}\mathbf{E}_o(s, \alpha),$$

где $\mathbf{E}_c(s, \alpha) = \mathbf{Y}_c(s, \alpha) - \mathbf{Y}_c(s, \alpha_0)$; $\mathbf{E}_o(s, \alpha) = \mathbf{Y}_o(s, \alpha) - \mathbf{Y}_o(s, \alpha_0)$; $\mathbf{E}_c(s, \alpha)$, $\mathbf{E}_o(s, \alpha)$ — ошибки, внесенные изменениями параметров $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, в замкнутой и разомкнутой системах; **Q** — некоторая положительно полуопределенная матрица; **I**, **P**, **G**, **H** — соответственно единичная матрица, матрицы передаточных функций объекта, регулятора и наблюдателя; T — знак транспонирования матриц.

Развитием метода сравнительной чувствительности Перкинса–Круса на оптимальные системы является метод Крейндлера (E. Kreindler), касающийся уменьшения чувствительности замкнутых оптимальных систем [34].

Для синтеза линейных систем управления с нулевой параметрической чувствительностью известен метод Т. Мита (T. Mita) [35].

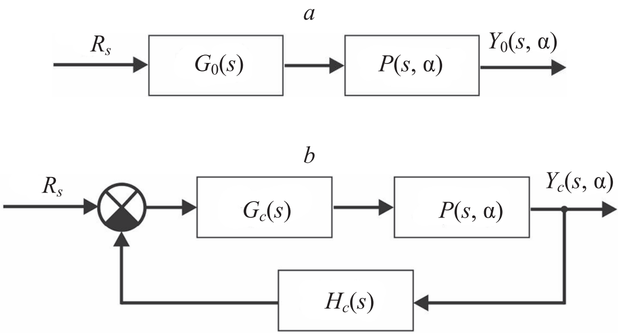

Рис. 2. Номинально эквивалентные разомкнутая (*a*) и замкнутая (*b*) системы

Fig. 2. Nominally equivalent open (*a*) and closed (*b*) systems

Здесь Т. Мита рассматривает линейный стационарный объект управления

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (4)$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ — состояние, вход и выход объекта управления соответствующих размерностей; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — матрицы соответствующих размерностей; $\Delta\mathbf{A}$ — вариация матрицы $\mathbf{A}$, вызванная вариацией неизвестных параметров.

При этом предполагается, что пара $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ — управляема. Управление в виде обратной связи задается в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{g},$$

где $\mathbf{K}$ — матрица обратной связи; $\mathbf{g}$ — внешний вход.

Условие нулевой чувствительности системы определяется соотношением

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B},$$

необходимым и достаточным условием выполнения которого является тождество

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B} \equiv 0. \quad (5)$$

Т. Мита определил условия, которым удовлетворяет матрица $\mathbf{K}$ в выражении (5).

Один из подходов к проблеме анализа и синтеза линейных систем малой параметрической чувствительности в пространстве состояний с применением ***функций модальной чувствительности*** или иначе ***метод модальной чувствительности*** был разработан в диссертационной работе [36]. Положения этого подхода, в частности, приведены в работах [8, 9, 37–39].

Основой метода модальной чувствительности является метод модального управления в теории управления [40], важная положительная особенность которого – однотипность алгоритмического обеспечения процедур анализа и синтеза как для номинального, так и возмущенного режимов работы систем. При этом процедура синтеза строится на основе использования матричного уравнения Сильвестра [41].

Модальное управление представляет собой эффективный аппарат синтеза систем с заданными показателями качества [42]. Одним из развитий этого аппарата является метод модального управления в модельной постановке [36, 43, 44], который сформулирован как задача обеспечения подобия с точностью до линейного преобразования некоторой динамической системе, обладающей желаемым спектром (множеством) мод (собственных значений, полюсов) системы. На базе модального управления с использованием метода функций модальной чувствительности и метода чисел обусловленности матриц осуществляется синтез модально-робастных многомерных систем управления [45, 46].

Огромный вклад в теорию модальной чувствительности внес А.В. Ушаков, одним из учеников которого в этом направлении науки является автор данного обзора. Помимо указанных выше публикаций по данному направлению теории чувствительности, во многих публикациях А.В. Ушакова и его научной школы приведены результаты решений вопросов модальной чувствительности [47–49].

Результаты автора в области теории модальной чувствительности приведены в монографии [46].

Здесь, как отмечено выше, задача синтеза модально-робастных систем управления строится на базе модальной модели, удовлетворяющей матричному уравнению Сильвестра

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{A}\mathbf{M} = -\mathbf{B}\mathbf{H},$$

а матрица линейной стационарной обратной связи $\mathbf{K}$, определяющая закон управления вида

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

выражается как

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}\mathbf{M}^{-1},$$

где обозначения векторов и матриц системы соответствуют обозначениям в (3) и (4), а $\boldsymbol{\Gamma}$ – $n \times n$ — матрица состояния модальной модели, определяющая желаемый спектр мод системы; $\mathbf{M}$ – $n \times n$ — матрица преобразования базисов подобных матриц $\boldsymbol{\Gamma}$ и $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$; $\mathbf{H}$ – $r \times n$ — произвольная матрица, образующая с $\boldsymbol{\Gamma}$ наблюдаемую пару $(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{H})$.

При этом, в случае использования метода функций модальной чувствительности, оптимизируется функционал в виде определенной нормы матрицы модальной чувствительности

$$\mathbf{S}_\lambda \overset{\Delta}{=} [\lambda_{ij}] \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \lambda_{11}\lambda_{12} \dots \lambda_{1p} \\ \lambda_{21}\lambda_{22} \dots \lambda_{2p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n1}\lambda_{n2} \dots \lambda_{np} \end{bmatrix},$$

где λ_{ij} — функция (от варируемого параметра $\bar{\mathbf{q}}$) модальной чувствительности i-ой моды по j-му варьируемому параметру, Δ — по определению.

Соответственно, функционал модальной чувствительности системы определяется как какая-либо норма матрицы $\mathbf{S}_\lambda$, например, как евклидова норма

$$J = \|\mathbf{S}_\lambda\|_E.$$

В случае использования метода чисел обусловленности матриц оптимизируется функционал в виде числа обусловленности с нормированной матрицы $\mathbf{M}$, т. е.

$$J_c = c\{\mathbf{M}\}.$$

Основные этапы развития теории робастности систем

Традиционное понимание *грубости* и *робастности* в современной литературе определяет робастность как способность систем сохранять те или иные свойства не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом при конечных параметрических или внешних возмущениях, а грубость – как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий систем [17, 18, 22, 50–52].

Как выше сказано, решение вопросов робастной устойчивости прежде всего связано с основополагающими работами В.Л. Харитонова для интервальных полиномов [10, 11].

В этих работах В.Л. Харитоновым решены вопросы об устойчивости интервальных полиномов (или семейства полиномов) вида

$$f(\lambda) = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n, \qquad (6)$$

где b_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ — коэффициенты, заданные в интервалах $\underline{b}_i \leq b_i \leq \overline{b}_i$, $\underline{b}_i$, $\overline{b}_i$, — соответственно нижние и верхние границы коэффициентов b_i.

Показано, что необходимыми и достаточными условиями робастной устойчивости всего семейства действительных и комплексных полиномов (6) является соответственно устойчивость четырех и восьми (парных) угловых полиномов. Эти угловые полиномы теперь носят название *полиномов Харитонова*.

В настоящее время получены: реберная теорема и дискретные аналоги и варианты теорем Харитонова, частотные критерии робастной устойчивости типа Михайлова, Найквиста, D-разбиения [18, 19].

Следует отметить, что еще недостаточно рассмотрены вопросы синтеза робастных нелинейных систем управления, в особенности, когда модели и параметры возмущений неопределенны [53, 54].

В работах [55–58] представлены обзоры и постановки задач робастной устойчивости, которые были основаны на работе В.Л. Харитонова [10].

В работе Б.Т. Поляка, П.С. Щербакова [57] предложено понятие сверхустойчивости линейных систем управления. При этом сверхустойчивые системы обладают свойствами выпуклости, допускающими простые решения многих классических задач теории управления, в частности задачи робастной стабилизации при матричной неопределенности. Но существенным ограничением таких систем является практическая узость их класса, определяемого условиями наличия доминирующих диагональных элементов матрицы системы с отрицательными величинами.

В работе В.М. Кунцевича [58] получены интересные результаты по робастной устойчивости для линейных дискретных систем. При этом матрица системы задается в фробениусовой форме, что также сужает класс рассматриваемых реальных систем.

В работах B.R. Barmish и др. [59, 60] предложены контрпримеры к теореме Биаласа [61], которые аннулированы в работе [14].

В работах M. Mansour и др. [62, 63] получены дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова [10], которые имеют ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов, или в случаях применения [51] сложной процедуры проектирования корней полиномов на отрезок [–1, 1].

В современной теории интервальных динамических систем существуют два альтернативных направления [10–13, 49, 53–56, 64]:

1) алгебраическое или харитоновское направление;
2) частотное или направление Цыпкина–Поляка.

В работах автора [14, 15, 46, 64–66] представлены оригинальные результаты, полученные в харитоновском направлении для непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, названные в целом ***алгебраическим методом робастной устойчивости***. Основные результаты метода представлены в работе [64].

Новизна и отличительная особенность метода заключается в том, что для интервальной динамической системы с *матрицей общего вида* как в непрерывном времени

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \qquad (7)$$

так и в дискретном случае

$$\mathbf{x}(m + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(m),\ m = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (8)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in R^n$, $\mathbf{x}(m)$ — векторы состояния; $\mathbf{A} \in R^{nxn}$ — интервальная матрица с элементами a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, представляющими интервальные величины $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ с угловыми значениями $\underline{a}_{ij}$, $\bar{a}_{ij}$, $\underline{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$, определены необходимые и достаточные условия робастной устойчивости систем (7) и (8).

В непрерывном случае определяются так называемые последовательные сепаратные угловые коэффициенты b_i характеристических полиномов (6) системы (7), которые находятся оптимизационными методами нелинейного программирования через интервальные элементы матрицы $\mathbf{A}$.

В дискретном случае вводятся понятия *точек* и *интервалов перемежаемости* для коэффициентов характеристического полинома системы, как показано на рис. 3, на базе которых формулируется алгоритм определения робастной устойчивости системы (8).

Интервальный характеристический полином дискретной системы, получаемый с использованием z-преобразования имеет вид

$$f(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i},\ b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i],\ \underline{b}_i \leq \overline{b}_i, \qquad (9)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Алгебраический метод робастной устойчивости, который разработан для линейных интервальных динамических систем может быть применен к исследованию нелинейных интервальных систем [67], на основе использования положений метода топологической грубости, изложенной в работе [68]. При этом динамика систем рассматривается вблизи ее особых траекторий.

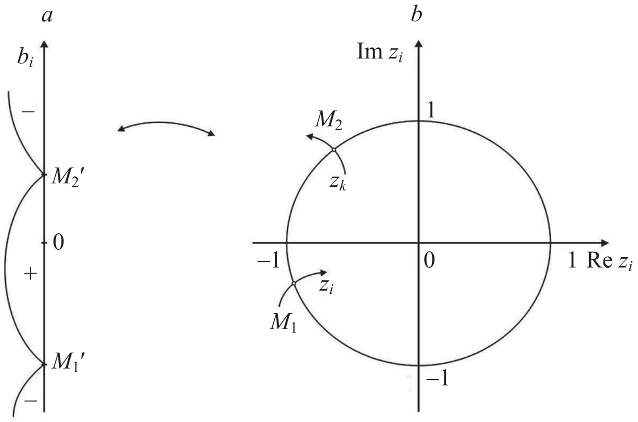

Рис. 3. Точки перемежаемости M_1' и M_2' на числовой оси коэффициента b_i по стрелке от $-\infty$ до $+\infty$ и интервалы перемежаемости $(-\infty, M_1']^-$, $[M_1', M_2']^+$, $[M_2', +\infty)^-$ для коэффициента b_i (*a*); M_1 и M_2 — точки в единичной окружности плоскости корней z_i, z_k (Re z_i — действительная часть, Im z_i — мнимая часть), которые соответствуют переходам корней характеристического полинома (9) из устойчивой области (+) в неустойчивую область (–) при изменениях коэффициента b_i (*b*)

Fig. 3. Interleaving points M_1' and M_2' on the numerical axis of the coefficient b_i along the arrow from $-\infty$ to $+\infty$, and interleaving intervals $(-\infty, M_1']^-$, $[M_1', M_2']^+$, $[M_2', +\infty)^-$ for the coefficient b_i (*a*); M_1 and M_2 points in the unit circle of plane of roots z_i, z_k (Re z_i is the actual part, Im z_i is the imaginary part), which correspond to the transitions of roots of the characteristic polynomial (9) from stable area (+) to unstable area (–) at changes of coefficient b_i (*b*)

Основные этапы развития теории грубости систем

В современной науке все больше внимания уделяется вопросам *грубости динамических систем*, и это, прежде всего, связано с возросшим интересом исследователей к объединяющим направлениям науки, к которым относится наука о саморазвивающихся системах и явлениях – синергетика. Также важным для науки является проблема исследований хаотических явлений или хаоса в синергетических системах, которые также связаны с проблемой грубости таких систем [69–71].

Синергетика все более вторгается во многие области современной науки как в естественные, так и в гуманитарные и общественные науки [72–76], при исследовании которых важное значение имеют вопросы грубости и бифуркаций.

В классической постановке вопросы *грубости* и *бифуркаций* динамических систем были поставлены великим французским ученым А. Пуанкаре [16].

Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркаций получены А.А. Андроновым и его школой [17, 18].

В теории динамических систем известны два различных подхода к проблеме грубости:
1) на основе понятия грубости по Пейксото или иначе «структурной устойчивости» [77];
2) на основе понятия грубости по Андронову–Понтрягину, когда в отличие от понятия по Пейксото требуется ε-близость исходного и возмущенного гомеоморфизмов.

В работах [19–26, 46, 68, 78] получены результаты, развивающие понятие грубости по Андронову–Понтрягину, которые составляют основу ***метода топологической грубости***, эффективно применяемого к синергетическим системам различной физической природы.

Основы метода топологической грубости приведены в работе [68].

При этом метод основан на понятии грубости по Андронову–Понтрягину, когда рассматривается исходная система *n*-го порядка

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)), \tag{10}$$

где $\mathbf{z}(t) \in R^n$ — вектор фазовых координат; $\mathbf{F}$ — *n*-мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (10) называется топологически грубой по Андронову–Понтрягину в некоторой области G, если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$, области G:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}), \tag{11}$$

являются ε-тождественными в топологическом смысле.

Системы (10) и (11) ε-тождественны, если существуют открытые области D, $\tilde{D}$ в *n*-мерном фазовом пространстве при $D \subset \tilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$:

$\exists\varepsilon, \delta > 0$, такие, что, если $\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}})\| < \delta$, $|d\mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{z}})/d\tilde{\mathbf{z}}_j| < \delta$, $i, j = \overline{1,n}$, то $|\,\|\mathbf{z}\| - \|\tilde{\mathbf{z}}\|\,| < \varepsilon$,
или

$$(\tilde{D}, (2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D, (1)), \tag{12}$$

иначе разбиение областей $\tilde{D}$ и D траекториями систем (11) и (10) ε-тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε).

Если (12) не выполняется, то система (10) негруба по Андронову–Понтрягину.

Основы теории и метода топологической грубости заложены в работе [20], где введены основные определения и доказаны базовые теоремы о необходимых и достаточных условиях грубости вблизи особых точек, об условиях существования управления, доставляющего грубость системе и условиях возникновения бифуркаций топологий в системе [68]. При этом мерой грубости служит число обусловленности C матрицы приведения к диагональному (квазидиагональному) базису матрицы системы, в особых траекториях (точках, линиях, многообразиях) системы.

Метод апробирован при исследовании многих известных синергетических систем различной физической природы таких как системы Лоренца, Рёсслера, Белоусова–Жаботинского, «хищник-жертва», цепь Чуа, динамо Рикитаке, отображения Хенона, бифуркаций Хопфа, моделях экономических систем типа Шумпетера, Калдора и др. При этом результаты метода, полученные на вышеперечисленных системах, согласуются с известными результатами других исследователей этих систем.

Система (аттрактор) Лоренца, которая наиболее исследована многими авторами в силу того, что эта система является по существу исторически первой системой (1963 г.), где подтверждена на практике справедливость гипотезы великого французского ученого А. Пуанкаре (1892 г.) о существовании хаотических движений в детерминированной системе.

Исследованиями системы Лоренца с использованием меры грубости C подтверждены основные бифуркации этой системы [22, 26], описанные в литературе и отвечающие условиям критериев, приведенных в работе [68].

Теория и метод топологической грубости систем, предполагает формализованность математической модели исследуемых систем.

В работах [26, 46], в случае слабо формализуемых и не формализуемых математическими моделями систем, предлагается применение следующего подхода, а именно ***подхода аналогий*** *теоретико-множественной топологии* и *абстрактного метода* к исследованиям таких систем.

Основные положения подхода аналогий

Пусть задано некоторое множество M_1, с которым связано множество M_2, отношения которых определяется некоторым *морфизмом* →, т. е. имеет место соотношение

$$M_1 \to M_2, \tag{13}$$

такое, что

$$\mathbf{F}(M_1) = M_2, \tag{14}$$

где **F** — *функтор*, служащий отображением между множествами.

Определение 1. Соотношение (13) определяет некоторое пространство множеств $\{M\}$, в котором определена топология этого пространства T.

Определение 2. Особыми многообразиями μ пространства $\{M\}$ назовем особые точки, особые линии и многомерные многообразия в этом пространстве, где возможны определенные особые (сингулярные) разрывы в соотношении (14), в смысле топологии T.

Определение 3. *Возмущением* множества M назовем множество $\mathbf{F}(M)$, такое что $M + \mathbf{F}(M)$ образует *возмущенное множество* в пространстве $\{M\}$.

Определение 4. Вводится метрика δ для возмущений и метрика ε для возмущенных множеств.

Определение 5. Назовем топологию пространства $\{M\}$ вблизи некоторого особого многообразия μ грубой, если при малом возмущении δ множества M, возмущенное множество $M + \mathbf{F}(M)$ будет отличатся от множества M не более чем на некоторое малое ε.

При введенных выше определениях можно воспользоваться всеми основными положениями теории и метода топологической грубости динамических систем, т. е. рассматривать вопросы максимальной грубости и минимальной негрубости и др.

Заключение

В работе приведен обзор основных этапов развития теорий чувствительности, робастности и грубости динамических систем. Дана библиография основных публикаций автора, в которых получены фундаментальные результаты в области теорий модальной чувствительности, робастности и грубости динамических систем в целом и синергетических систем в частности.

Рассмотрены методы модальной чувствительности: метод функций модальной чувствительности и метод чисел обусловленности, а также их использование для анализа параметрической чувствительности и синтеза модально-робастных систем управления.

Рассмотрены методы исследований и обеспечения робастной устойчивости интервальных динамических систем как алгебраического, так и частотного направлений робастной устойчивости. Приведены основные результаты оригинального алгебраического метода робастной устойчивости для непрерывного и дискретного времени.

Изложены положения теории и метода топологической грубости динамических систем, основанного на понятии грубости по Андронову–Понтрягину.

Предложенный выше подход аналогий может быть использован для таких слабо формализуемых и неформализуемых систем как информационные системы, социальные и политические системы. При этом основная трудность исследования таких систем будет заключаться в определении соответствующих множеств M, функторов **F**, особых многообразий μ, а также внедрения метрик δ и ε пространства $\{M\}$, что является задачами перспективы.

Литература

1. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М.: Иностранная литература, 1952. 245 с.
2. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем автоматического управления. М.: Энергия, 1969. 264 с.
3. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. М.: Советское радио, 1972. 240 с.
4. Cruz J.B., Perkins W.B. A new approach to the sensitivity problem in multivariable feedback system design // IEEE Transactions on Automatic Control. 1964. V. 9. N 3. P. 216–223. doi: 10.1109/TAC.1964.1105720
5. Кокотович П. Метод точек чувствительности в исследовании и оптимизации линейных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. № 12. С. 1670–1676.
6. Eslami M. Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1994. 600 p.

References

1. Bode H.W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. New York, D. Van Nostrand Company, 1945, 551 p.
2. Rozenvasser E.N., Iusupov R.M. *Sensitivity of Automatic Control Systems*. Moscow, Jenergija Publ., 1969, 264 c. (in Russian)
3. Tomovic R., Vucobratovic M. *General Sensitivity Theory*. North-Holland, 1972, 258 p.
4. Cruz J.B., Perkins W.B. A new approach to the sensitivity problem in multivariable feedback system design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1964, vol. 9, no. 3, pp. 216–223. doi: 10.1109/TAC.1964.1105720
5. Kokotovich P. Sensitivity points method in investigation and optimization of linear control systems. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1964, vol. 25, no. 12, pp. 1670–1676. (in Russian)
6. Eslami M. *Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1994, 600 p.

7. Оморов Р.О. Разработка и исследование фотоэлектрических следящих систем малой параметрической чувствительности: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени институт точной механики и оптики. Ленинград, 1985. 21 с.
8. Ушаков А.В., Оморов Р.О. Оценка потенциальной параметрической чувствительности желаемой динамической модели в задаче модального управления // Известия вузов. Электромеханика. 1982. № 7. С. 800–805.
9. Ушаков А.В., Оморов Р.О. Оценка параметрической чувствительности линейных объектов управления по степени их управляемости и наблюдаемости // Известия вузов. Электромеханика. 1984. № 8. С. 53–58.
10. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086–2088.
11. Харитонов В.Л. Об одном обобщении критерия устойчивости // Известия АН Казахской ССР. Серия физико-математическая. 1978. № 1. С. 53–57.
12. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. ВИНИТИ. 1991. Т. 32. С. 3–31.
13. Неймарк Ю.И. Робастная устойчивость и *D*-разбиение // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 10–18.
14. Omorov R.O. Robustness of interval dynamic systems I. Robustness in continuous linear interval dynamic systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. V. 34. N 3. P. 69–74.
15. Omorov R.O. Robustness of interval dynamical systems. II. Robustness of discrete linear interval dynamical systems. Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. V. 34. N 4. P. 1–5.
16. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / пер. с франц. под ред. А.А. Андронова. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 392 с.
17. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–250.
18. Аносов Д.В. Грубые системы // Труды Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.
19. Оморов Р.О. Оценка грубости управляемых динамических систем // Известия вузов. Электромеханика. 1990. № 7. С. 81–87.
20. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36–45.
21. Оморов Р.О. Мера грубости динамических систем и критерии возникновения хаотических колебаний и бифуркаций в синергетических системах // Синтез алгоритмов стабилизации систем: межведомственный сборник. Вып. 8. Таганрог, 1992. С. 128–134.
22. Оморов Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, 1992. 188 с.
23. Оморов Р.О. Синергетические системы: проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии. 1997. № 2. С. 26–36.
24. Оморов Р.О. Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Известия Национальной Академии наук Кыргызской Республики. 2009. № 3. С. 144–148.
25. Omorov R.O. Topological roughness of synergetic systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2012. V. 44. N 4. P. 61–70. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i4.70
26. Оморов Р.О. Теория топологической грубости систем. Бишкек: Илим, 2019. 288 с.
27. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
28. Мееров М.В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Наука, 1967. 423 с.
29. Петров Б.Н., Крутько П.Д. Применение теории чувствительности в задачах автоматического управления // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1970. № 2. С. 202–212.
30. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М.: Наука, 1980. 242 с.
31. Бермант М.А., Емельянов С.В., Петров Б.Н., Уткин В.И. Чувствительность систем автоматического управления с переменной

7. Omorov R.O. *Development and Study of Photoelectric Tracking Systems with Low Parametric Sensitivity*. Dissertation abstract for the degree of candidate of technical sciences. Leningrad, Leningrad Institute of Fine Mechanics and Optics, 1985, 21 p. (in Russian)
8. Ushakov A.V., Omorov R.O. Estimation of potential parametric sensitivity of a desired dynamic model in the task of modal control. *Russian Electromechanics*, 1982, no. 7, pp. 800–805. (in Russian)
9. Ushakov A.V., Omorov R.O. Estimation of potential parametric sensitivity of linear control objects according to the degree of their. *Russian Electromechanics*, 1984, no. 8, pp. 53–58. (in Russian)
10. Kharitonov V.L. The asymptotic stability of the equilibrium state of a family of systems of linear differential equations. *Differential Equations*, 1978, vol. 14, no. 11, pp. 2086–2088. (in Russian)
11. Kharitonov V.L. On a generalization of a stability criterion. *Izvestija AN Kazahskoj SSR. Serija fiziko-matematicheskaj*a, 1978, no. 1, pp. 53–57. (in Russian)
12. Poliak B.T., Tcypkin Ya.Z. Robust stability of linear systems. *Itogi nauki i tehniki. Tehnicheskaja kibernetika*, 1991, vol. 32, pp. 3–31. (in Russian)
13. Neimark Y.I. Robust stability and D-partition. *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no. 7, pp. 957–965.
14. Omorov R.O. Robustness of interval dynamic systems I. Robustness in continuous linear interval dynamic systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 34, no. 3, pp. 69–74.
15. Omorov R.O. Robustness of interval dynamical systems. II. Robustness of discrete linear interval dynamical systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 34, no. 4, pp. 1–5.
16. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1881-1886. (in French)
17. Andronov A.A., Pontriagin L.S. Structurally stable systems. *Doklady AN SSSR*, 1937, vol. 14, no. 5, pp. 247–250. (in Russian)
18. Anosov D.V. Structurally stable systems. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1986, vol. 169, pp. 61–95.
19. Omorov R.O. Estimation of roughness of controllable dynamic systems. *Russian Electromechanics*, 1990, no. 7, pp. 81–87. (in Russian)
20. Omorov R.O. Maximal robustness of dynamical systems. *Automation and Remote Control*, 1991, vol. 52, no. 8, pp. 1061–1068.
21. Omorov R.O. Measure of roughness of dynamic systems and criteria of emergence of chaotic fluctuations and bifurcations in synergetic systems. *Synthesis of algorithms of systems stabilization: department proceedings*. Issue 8. Taganrog, 1992, pp. 128–134. (in Russian)
22. Omorov R.O. *Dynamical System Quantitative Robustness Measures and Their Applications to Control Systems*. Dissertation for the degree of doctor of technical sciences, St. Petersburg, Saint Petersburg Institute of Fine Mechanics and Optics, 1992, 188 p. (in Russian)
23. Omorov R.O. Synergetic systems: problems of roughness, bifurcations and accidents. *Nauka i novye tehnologii*, 1997, no. 2, pp. 26–36. (in Russian)
24. Omorov R.O. Method of topological roughness: theory and appendices. I. Theory. *Izvestija Nacional'noj Akademii nauk Kyrgyzskoj Respubliki*, 2009, no. 3, pp. 144–148. (in Russian)
25. Omorov R.O. Topological roughness of synergetic systems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2012, vol. 44, no. 4, pp. 61–70. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i4.70
26. Omorov R.O. *Theory of Topological Roughness of Systems*. Bishkek, Ilim Publ., 2019, 288 p. (in Russian)
27. Rozenvasser E.N., Iusupov R.M. *Sensitivity of Control Systems.* Moscow, Nauka Publ., 1981, 464 p. (in Russian)
28. Meerov M.V. *Synthesis of Structures of Automatic Control Systems with High Precision*. Moscow, Nauka Publ., 1967, 423 p. (in Russian)
29. Petrov B.N., Krutko P.D. Sensitivity theory in automatic control. *Izvestija AN SSSR. Tehnicheskaja kibernetika*, 1970, no. 2, pp. 202–212. (in Russian)
30. Petrov B.N., Rutkovskii V.Iu., Zemliakov S.D. *Adaptive Coordinate-Parametric Control of the Nonstationary Plants*. Moscow, Nauka Publ., 1980, 242 p. (in Russian)
31. Bermant M.A., Emelianov S.V., Petrov B.N., Utkin V.I. Sensitivity of automatic control systems with variable structure. *Sensitivity of Automatic Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1968, pp. 181–191. (in Russian)
32. Utkin V.I., Emelianov S.V., Taran V.A. *Theory of Variable Structure Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1970, 592 p. (in Russian)
33. Utkin V.I. *Sliding Regimes and Their Applications in Variable-Structure Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 272 p. (in Russian)

структурой // Чувствительность автоматических систем: сборник. М.: Наука, 1968. С. 181–191.
32. Уткин В.И., Емельянов С.В., Таран В.А. Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970. 592 с.
33. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974. 272 с.
34. Kreindler E. Closed-loop sensitivity of linear optimal control systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. V. 13. N 3. P. 254–262. doi: 10.1109/TAC.1968.1098901
35. Mita T. Design of a zero-sensitive system // International Journal of Control. 1976. V. 24. N 1. P. 75–81. doi: 10.1080/00207177608932806
36. Оморов Р.О. Разработка и исследование фотоэлектрических следящих систем малой параметрической чувствительности: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени институт точной механики и оптики. Ленинград, 1985. 263 с.
37. Ушаков А.В., Оморов Р.О. Использование аппарата функций модальной чувствительности для оценки точности динамических систем. Информационное сообщение о Всесоюзном координационном совещании по проблемам адаптации и XI семинаре по адаптивным системам (Фрунзе, 16-25 апреля 1982 г.) // Автоматика и телемеханика. 1983. № 9. С. 171.
38. Баев А.П., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Оценки переходных функций линейных многомерных систем управления // Известия вузов. Электромеханика. 1989. № 1. С. 90–96.
39. Оморов Р.О., Ушаков А.В. Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Известия вузов. Электромеханика. 1991. № 1. С. 78–85.
40. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.
41. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами. Бишкек: Илим, 1991. 61 с.
42. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. Бишкек: Илим, 1991. 59 с.
43. Григорьев В.В., Мансурова О.К., Ушаков А.В. Синтез и анализ многомерных систем с использованием модального управления // Оптимальные и адаптивные системы: сборник. Фрунзе, 1979. С. 62–68.
44. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.
45. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2002. 232 с.
46. Оморов Р.О. Чувствительность, робастность и грубость динамических систем. М.: ЛЕНАНД, 2021. 304 с.
47. Ушаков А.В. Условия нулевой параметрической чувствительности в задаче слежения // Автоматика и телемеханика. 1981. № 9. С. 30–37.
48. Акунов Т.А., Ушаков А.В. Анализ чувствительности эллипсоидных оценок многомерных процессов управления // Известия вузов. Приборостроение. 1991. Т. 34. № 8. С. 21–27.
49. Акунов Т.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Использование системных грамианов в задачах параметрической инвариантности непрерывных систем // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2005. Т. 5. № 3. С. 39–43.
50. Dorato P.D. A historical review of robust control // IEEE Control Systems Magazine. 1987. V. 7. N 2. P. 44–47. doi: 10.1109/MCS.1987.1105273
51. Джури Э.И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 3–28.
52. Дискуссия по проблеме робастности в системах управления // Автоматика и телемеханика. 1992. № 1. С. 165–176.
53. Никифоров В.О. Робастное управление линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 87–99.
54. Пелевин А.Е. Синтез робастного закона управления при неопределенностях параметров модели объекта // Гироскопия и навигация. 1999. № 2(25). С. 63–74.
55. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 1. С. 3–23.

34. Kreindler E. Closed-loop sensitivity of linear optimal control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, vol. 13, no. 3, pp. 254–262. doi: 10.1109/TAC.1968.1098901
35. Mita T. Design of a zero-sensitive system. *International Journal of Control*, 1976, vol. 24, no. 1, pp. 75–81. doi: 10.1080/00207177608932806
36. Omorov R.O. *Development and Study of Photoelectric Tracking Systems with Low Parametric Sensitivity*. Dissertation for the degree of candidate of technical sciences. Leningrad, Leningrad Institute of Fine Mechanics and Optics, 1985, 263 p. (in Russian)
37. Ushakov A.V., Omorov R.O. Application of modal sensitivity to estimating dynamic systems precision. A report on the All-Union coordination meeting dedicated to adaptation problems and 11th seminar on adaptive systems (Frunze. April 16-25, 1982). *Avtomatika i telemehanika*, 1983, no. 9, pp. 171. (in Russian)
38. Baev A.P., Omorov R.O., Ushakov A.V. Estimates of transition functions in linear multidimensional control systems. *Russian Electromechanics*, 1989, no. 1, pp. 90–96. (in Russian)
39. Omorov R.O., Ushakov A.V. Robustness estimates in control and observation tasks. *Russian Electromechanics*, 1991, no. 1, pp. 78–85. (in Russian)
40. Kuzovkov N.T. *Modal Control and Observers*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 184 p. (in Russian)
41. Akunov T.A., Alisherov S., Omorov R.O., Ushakov A.V. *Matrix Equations in Control and Continuous Monitoring Objects*. Bishkek, Ilim Publ., 1991, 61 p. (in Russian)
42. Akunov T.A., Alisherov S., Omorov R.O., Ushakov A.V. *Modal Estimations of Quality of Processes in Linear Multivarible Systems*. Bishkek, Ilim Publ., 1991, 59 p. (in Russian)
43. Grigorev V.V., Mansurova O.K., Ushakov A.V. Synthesis and analysis of multidimentional systems by modal control. *Optimal and Adaptive Systems*. Frunze, 1979, pp. 62–68. (in Russian)
44. Grigorev V.V., Drozdov V.N., Lavrentev V.V., Ushakov A.V. *Synthesis of Discrete Controllers Using Computers*. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1983, 245 p. (in Russian)
45. Nikiforov V.O., Ushakov A.V. *Control in the Presence of Uncertainties: Sensitivity, Adaptation and Robustness*. St. Petersburg, ITMO, 2002, 232 p. (in Russian)
46. Omorov R.O. *Sensitivity, Robustness and Roughness of Dynamic Systems*. Moscow, LENAND Publ., 2021, 304 p. (in Russian)
47. Ushakov A.V. Conditions of zero parametric sensitivity in the tracking problem. *Automation and Remote Control*, 1981, vol. 42, no. 9, pp. 1157–1163.
48. Akunov T.A., Ushakov A.V. Sensitivity analysis of ellipsoidal quality estimates of multidimensional control processes. *Journal of Instrument Engineering*, 1991, vol. 34, no. 8, pp. 21–27. (in Russian)
49. Akunov T.A., Slita O.V., Ushakov A.V. Gramians in parametric invariance of continuous systems. *Scientific and Technical Bulletin of St. Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2005, vol. 5, no. 3, pp. 39–43. (in Russian)
50. Dorato P.D. A historical review of robust control. *IEEE Control Systems Magazine*, 1987, vol. 7, no. 2, pp. 44–47. doi: 10.1109/MCS.1987.1105273
51. Jury E.I. Robustness of a discrete system. *Automation and Remote Control*, 1990, vol. 51, no. 5, pp. 571–592.
52. Discussion on robustness problem in control systems. *Avtomatika i Telemkhanika*, 1992, no. 1, pp. 165–176. (in Russian)
53. Nikiforov V.O. Robust output control for a linear object. *Automation and Remote Control*, 1998, vol. 59, no. 9, pp. 1274–1283.
54. Pelevin A.Ye. Robust control law synthesis under uncertainty of model parameters. *Journal "Giroskopiya i Navigatsiya"*, 1999, no. 2(25), pp. 63–74. (in Russian)
55. Gusev Yu.M., Yefanov V.N., Krymskiy V.G., Rutkovskiy V.Yu. Analysis and synthesis of linear interval dynamic systems (the state of the problem). I. Analysis which uses interval characteristic polynomials. *Soviet journal of computer and systems sciences*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 84–103.
56. Gusev Yu.M., Yefanov V.N., Krymskiy V.G., Rutkovskiy V.Yu Analysis and synthesis of linear interval dynamical systems (the state of the problem). II. Analysis of the stability of interval matrices and synthesis of robust regulators. *Soviet journal of computer and systems sciences*, 1992, vol. 30, no. 2, pp. 26–52.
57. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Superstable linear control systems. I. Analysis. *Automation and Remote Control*, 2002, vol. 63, no. 8, pp. 1239–1254. doi: 10.1023/A:1019823208592

56. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II. Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 2. С. 3–30.
57. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. С. 37–53.
58. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова думка, 2006. 264 с.
59. Barmish B.R., Hollot C.V. Counter-example to a recent result on the stability of interval matrices by S. Bialas // International Journal of Control. 1984. V. 39. N 5. P. 1103–1104. doi: 10.1080/00207178408933235
60. Barmish B.R., Fu M., Saleh S. Stability of a polytope of matrices: Counterexamples // IEEE Transactions on Automatic Control. 1988. V. 33. N 6. P. 569–572. doi: 10.1109/9.1254
61. Bialas S. A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices // International Journal of Control. 1983. V. 37. N 4. P. 717–722. doi: 10.1080/00207178308933004
62. Kraus F.J., Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. On the robustness of low-order Schur polynomials // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1988. V. 35. N 5. P. 570–577. doi: 10.1109/31.1786
63. Mansour M., Kraus F.J. On Robust Stability of Schur Polynomials: Report N 87-05, Inst. Autom. Cont. Ind. Electronics, Swiss, Fed. Inst. Tech. (ETH). Züric, 1987. 34 p.
64. Оморов Р.О. Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 3. С. 364–370. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-364-370
65. Оморов Р.О. О дискретном аналоге теоремы Харитонова // Наука и новые технологии. 2002. № 3. С. 5–10.
66. Оморов Р.О. Робастная устойчивость интервальных динамических систем. Бишкек: Илим, 2018. 104 с.
67. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем // Математическая теория управления и ее приложения (МТУИП-2020): материалы конференции, Санкт-Петербург, 7-8 октября 2020 г. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2020. С. 333–335.
68. Оморов Р.О. Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к синергетическим системам // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 2. С. 257–262. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262
69. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / пер. с англ. М.: Мир, 1985. 423 с.
70. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 342 с.
71. Странные аттракторы: Сб. статей / пер. с англ. под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 253 с.
72. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / пер. с англ. М.: Мир, 1999. 335 с.
73. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. 2-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 288 с.
74. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В. Тунис 2011-2014. Бифуркация, революция и управляемая стабилизация // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 4. С. 92–103. doi: 10.21638/11701/spbu10.2016.409
75. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 3–45.
76. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. 2-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 240 с.
77. Peixoto M.M. On structural stability // Annals of Mathematics. 1959. V. 69. N 1. P. 199–222. doi: 10.2307/1970100
78. Оморов Р.О. Топологическая грубость и бифуркации синергетических систем // Математическая теория управления и ее приложения (МТУИП-2020): материалы конференции, Санкт-Петербург, 7-8 октября 2020 г. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2020. С. 28–30.

58. Kuntsevich V.M. *Management under Conditions of Uncertainty: Guaranteed Results in Management and Identification Issues*. Kiev, Naukova dumka Publ., 2006, 264 p. (in Russian)
59. Barmish B.R., Hollot C.V. Counter-example to a recent result on the stability of interval matrices by S. Bialas. *International Journal of Control*, 1984, vol. 39, no. 5, pp. 1103–1104. doi: 10.1080/00207178408933235
60. Barmish B.R., Fu M., Saleh S. Stability of a polytope of matrices: Counterexamples. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, vol. 33, no. 6, pp. 569–572. doi: 10.1109/9.1254
61. Bialas S. A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices. *International Journal of Control*, 1983, vol. 37, no. 4, pp. 717–722. doi: 10.1080/00207178308933004
62. Kraus F.J., Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. On the robustness of low-order Schur polynomials. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, vol. 35, no. 5, pp. 570–577. doi: 10.1109/31.1786
63. Mansour M., Kraus F.J. *On Robust Stability of Schur Polynomials*. Report N 87-05, Inst. Autom. Cont. Ind. Electronics, Swiss, Fed. Inst. Tech. (ETH), Züric, 1987, 34 p.
64. Omorov R.O. Robustness research of interval dynamic systems by algebraic method. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 3, pp. 364–370. (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-3-364-370
65. Omorov R.O. On discrete analogue of Kharitonov's theorem. *Science and New Technologies*, 2002, no. 3, pp. 5–10. (in Russian)
66. Omorov R.O. *Robust Stability of Interval Dynamic Systems*. Bishkek, Ilim Publ., 2018, 104 p. (in Russian)
67. Omorov R.O. Robustness of interval dynamic systems. *Proc. of the Conference "Mathematical Control Theory and Its Applications"*, St. Petersburg, October 7-8, 2020. St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor, 2020, pp. 333–335. (in Russian)
68. Omorov R.O. Method of topological roughness of dynamic systems: applications to synergetic systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 2, pp. 257–262. (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262
69. Haken H. *Advanced Synergetics*. Berlin, Springer, 1983.
70. Nicolis G., Prigogine I. *Exploring Complexity: An Introduction*. W.H. Freeman Publ., 1989, 313 p.
71. *Strange attractors*. Moscow, Mir Publ., 1981, 253 p. (in Russian)
72. Zhang W.-B. *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics*. Springer-Verlag, 1991, 246 p.
73. Kapitca S.P., Kurdiumov S.P., Malinetckii G.G. *Synergetics and Future Forecasts*. Moscow, URSS Publ., 2001, 288 p. (in Russian)
74. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kudryashova E.V. Tunisia 2011-2014. Bifurcation, revolution, and controlled stabilization. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika informatika protsessy upravleniya*, 2016, no. 4, pp. 92–103. (in Russian). doi: 10.21638/11701/spbu10.2016.409
75. Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Control of chaos: methods and applications. I. Methods. *Automation and Remote Control*, 2003, vol. 64, no. 5, pp. 673–713. doi: 10.1023/A:1023684619933
76. Kolesnikov A.A. *Synergetic Control Methods for Complex Systems: System Synthesis Theory*. Moscow, LIBROKOM Publ., 2012, 240 p. (in Russian)
77. Peixoto M.M. On structural stability. *Annals of Mathematics*, 1959, vol. 69, no. 1, pp. 199–222. doi: 10.2307/1970100
78. Omorov R.O. Topological roughness and bifurcations of synergetic systems. *Proc. of the Conference "Mathematical Control Theory and Its Applications"*, St. Petersburg, October 7-8, 2020. St. Petersburg, Concern CSRI Elektropribor, 2020, pp. 28–30. (in Russian)

Автор

Оморов Роман Оморович — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики, заведующий лабораторией «Синергетики и хаоса динамических систем», Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика, SC 6602708366, https://orcid.org/0000-0003-3555-1323, romano_ip@list.ru

Author

Roman O. Omorov — D.Sc., Professor, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Head of the Laboratory for the Synergetics and Chaos of Dynamic Systems, Institute of Machine Science and Automation of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, SC 6602708366, https://orcid.org/0000-0003-3555-1323, romano_ip@list.ru

Статья поступила в редакцию 17.01.2021
Одобрена после рецензирования 12.02.2021
Принята к печати 05.04.2021

Received 17.01.2021
Approved after reviewing 12.02.2021
Accepted 05.04.2021

Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»