

doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-4-490-498  
 УДК 004.942

## Исследование устойчивости информационно-телекоммуникационных сетей в условиях стохастической перколяции узлов

Федор Леонидович Шуваев<sup>1</sup>✉, Кирилл Игоревич Витензон<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация

<sup>1</sup> [cadetfed@mail.ru](mailto:cadetfed@mail.ru)✉, <http://orcid.org/0000-0001-7502-9455>

<sup>2</sup> [witenzon\\_kirill@mail.ru](mailto:witenzon_kirill@mail.ru), <http://orcid.org/0000-0001-5315-7843>

### Аннотация

**Предмет исследования.** Глубокие исследования топологических свойств информационно-телекоммуникационных сетей способствуют пониманию их функциональных возможностей, в том числе устойчивости. Изучение устойчивости сложных сетей к сбоям в работе при выходе из строя их компонентов осуществляется на основе моделирования путем последовательного удаления узлов или ребер сети (перколяции). В работе представлен сравнительный анализ последовательного и стохастического вариантов перколяции узлов сети, получение статистических оценок комплексного двухкритериального коэффициента устойчивости сети. **Метод.** В исследовании применены методы расчета среднего расстояния пути, построенные на теории графов. При статистическом анализе устойчивости сети использованы дисперсионный анализ и попарные сравнения по критерию Тьюки, основанные на положениях теории математической статистики. Имитационное моделирование выполнено с использованием моделей случайных графов Барабаши–Альберта и Эрдеша–Реньи. **Основные результаты.** Показано отличие метода стохастической перколяции от последовательной перколяции. Статистический анализ доказал влияние фактора изменения структуры сетей на их устойчивость за счет стохастической перколяции. Показана динамика снижения устойчивости сети при стохастической перколяции для различных типов сетей. Выявлено, что в отдельных случаях, например в сетях с высокой плотностью, наиболее предпочтителен метод стохастической перколяции. **Практическая значимость.** Исследование определило возможные варианты оценивания устойчивости сетей без наличия и с наличием априорных знаний о типе соединений между узлами. В первом случае, зная количество узлов сети, можно рассчитать предельные значения устойчивости при случайном удалении узлов. Второй вариант может применяться для расчета устойчивости сетей, подверженных случайным отказам узлов, например, при диагностировании технических систем.

### Ключевые слова

устойчивость, сеть, дисперсионный анализ, мера центральности, критерий Тьюки, перколяция

**Ссылка для цитирования:** Шуваев Ф.Л., Витензон К.И. Исследование устойчивости информационно-телекоммуникационных сетей в условиях стохастической перколяции узлов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21, № 4. С. 490–498. doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-4-490-498

## A study of the stability of information and telecommunication networks under conditions of stochastic percolation of nodes

Fedor L. Shuvaev<sup>1</sup>✉, Kirill I. Vitenzon<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation

<sup>1</sup> [cadetfed@mail.ru](mailto:cadetfed@mail.ru)✉, <http://orcid.org/0000-0001-7502-9455>

<sup>2</sup> [witenzon\\_kirill@mail.ru](mailto:witenzon_kirill@mail.ru), <http://orcid.org/0000-0001-5315-7843>

### Abstract

In-depth studies of the topological properties of information and telecommunication networks contribute to the understanding of their functional capabilities, including stability. The study of the stability of complex networks to failures in operation when their components fail is based on modeling by sequentially removing nodes or edges of the

© Шуваев Ф.Л., Витензон К.И., 2021

network (percolation). The paper presents a comparative analysis of sequential and stochastic variants of percolation of network nodes and statistical estimates of the complex two-criterion network stability coefficient. During the study, methods for calculating the average path length based on graph theory were used. In the statistical analysis of the network stability, we applied the analysis of variance and pairwise comparisons according to the Tukey criterion, based on the provisions of the theory of mathematical statistics. The simulation is performed using the Barabashi–Albert and Erdős–Rényi random graph models. The difference between the method of stochastic percolation and sequential percolation is shown. The performed statistical analysis proved the influence of the factor changing the structure of networks on their stability due to stochastic percolation. The dynamics of network stability reduction under stochastic percolation for different types of networks is shown. It is revealed that in some cases, for example, in networks with high density, the stochastic percolation method is the most preferable one. The study shows the possible options for assessing the stability of networks without a priori knowledge about the type of connections between nodes and with a priori knowledge about the type of connections between nodes. In the former case, knowing the number of network nodes, one can calculate the limit values of stability, in the same way as if the nodes were deleted accidentally. The latter option can be used to calculate the stability of networks that are subject to random node failures, for example, when diagnosing technical systems.

#### Keywords

stability, network, analysis of variance, centrality measure, Tukey criterion, percolation

**For citation:** Shuvaev F.L., Vitenzon K.I. A study of the stability of information and telecommunication networks under conditions of stochastic percolation of nodes. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 490–498 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-4-490-498

### Введение

Исследованию сетей разнообразной природы, таких как сети цитирования, социальные сети или информационно-телекоммуникационные сети (ИТКС), уделяется внимание в различных областях науки: физике, биологии, информатике и математике. Глубокие исследования топологических свойств таких сетей способствуют пониманию их функционала и других неотъемлемых черт, например устойчивости. Изучение устойчивости сложных сетей к сбоям в работе при выходе из строя их компонентов осуществляется на основе моделирования путем последовательного удаления узлов или ребер сети и является важным направлением в теории графов. В ряде исследований рассмотрены вопросы выбора значимых для устойчивости сети элементов, подлежащих первоочередному удалению [1–8]. В исследовании [1] проведен анализ подходов выбора значимых элементов, основанный на расчете мер центральности узлов. Определены меры центральности, которые позволяют выбирать узлы, наиболее влияющие на устойчивость сети. Но не всегда существуют априорные данные, позволяющие рассчитать центральность узлов сети. Для такой ситуации выбран вариант удаления узлов — стохастический [9–11]. Особенность такого подхода — узлы не ранжируются в зависимости от их важности, а удаляются случайно. Этот вариант можно использовать в моделировании ситуаций выхода из строя узлов различных сложных технических систем для оценивания их устойчивости.

Таким образом, цель исследования заключается в сравнительном анализе последовательного и стохастического вариантов перколяции узлов сети. При этом решаются две последовательные задачи. На основе имитационного моделирования получают статистические оценки комплексного двухкритериального коэффициента устойчивости сети (КДКУС) [1] для различных вариантов перколяции. Далее на базе однофакторного дисперсионного анализа и процедуры множественных сравнений по критерию Тьюки исследуется влияние фактора изменения структуры сети на ее устойчивость.

### Исходные данные для моделирования

Исходными данными для моделирования выбраны сети, представленные в виде графа:  $G = (V, E)$ , где  $V$  — вершины графа, а  $E$  — ребра. Предположим, что рассматриваемый граф является ненаправленным и невзвешенным (у ребер отсутствует вес). Характеристики сетей представлены в табл. 1. Дополнительные параметры для сетей № 1–3 — кортеж распределения вероятностей образования вершин  $p$  [1, 3].

Исследования выполнены на базе моделей:

- Барабаша–Альберта (БА) с задаваемыми параметрами;
- случайного графа Эрдеша–Реньи (ЭР);
- реальных сетей [12–18].

Выбор моделей БА (сети № 1–3) обусловлен их близостью к реальным сетям и возможностью их генерирования в неограниченном количестве для проведения эксперимента.

Таблица 1. Характеристики исследуемых сетей

Table 1. Characteristics of the studied networks

Номер сети	Число вершин	Число ребер	Дополнительные параметры
1	40	89	$p = \{0; 0,5; 0,5\}$
2	40	50	$p = \{0; 0,25; 0,25; 0,5\}$
3	40	79	$p = \{0; 0,4; 0,4; 0,2\}$
4	167	5784	—
5	212	244	—
6	92	477	—
7	40	150	—
8	40	300	—
9	40	450	—
10	40	600	—
11	40	700	—
12	40	760	—

Выбор моделей ЭР (сети № 7–12) обусловлен необходимостью исследования устойчивости сетей высокой плотности.

Выбор реальных сетей обусловлен исследованиями, проведенными в работах [1, 3], и основывается на желании учесть сети различной природы, а именно: сеть № 4 ИТКС — в датацентре почтового сервиса; сеть № 5 — ИТКС торгового терминала; сеть № 6 — ИТКС одного из университетов России. Реальные сети № 4–5 частично выбраны из пакета «нетворкдата» (“networkdata”), являющегося самым крупным набором сетевых данных для языка статистического моделирования R [19–21], сеть № 6 — из реальной жизни.

**Этапы анализа устойчивости при стохастической перколяции узлов**

Для проведения анализа динамики снижения устойчивости ИТКС разработан оригинальный подход. Он представлен в виде структурной схемы на рис. 1 и состоит из вспомогательного этапа (1) и двух основных (2) и (3).

**Моделирование графов (этап 1).** На вспомогательном этапе осуществляется моделирование графов, представленных в табл. 1 (сети № 1–3 и № 7–12).

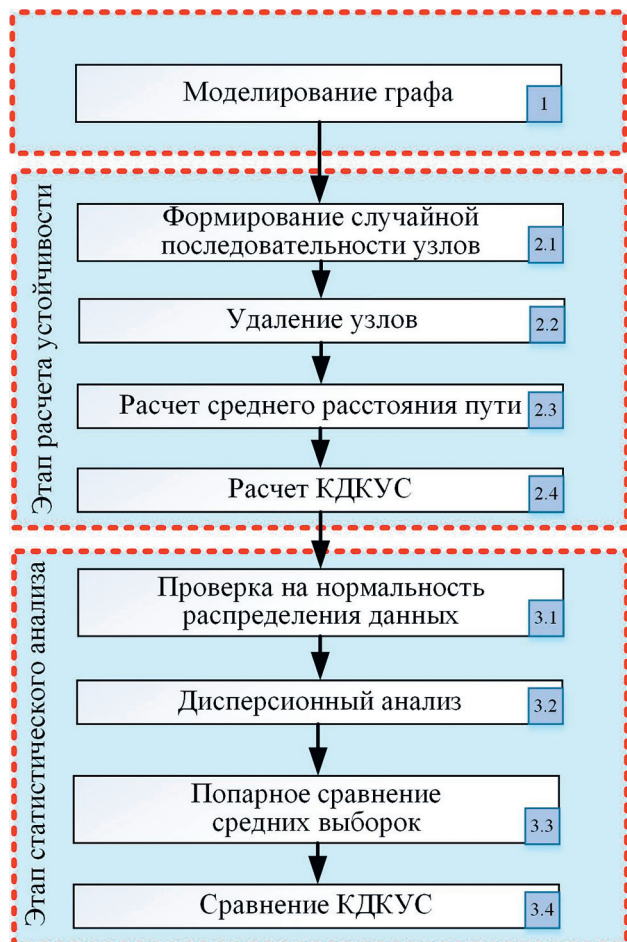


Рис. 1. Структурная схема анализа устойчивости сетей при стохастической перколяции узлов

Fig. 1. Structural diagram of the analysis of the stability of networks in case of random removal of nodes

**Расчет устойчивости (этап 2).** Расчет значения КДКУС [1] представляет последовательность действий по этапам:

- формирование случайной последовательности, состоящей из номеров узлов анализируемой сети. Последовательность формируется без замен номеров, т. е. все они встречаются в последовательности один раз (этап 2.1);
  - удаление первого узла в стохастической последовательности (этап 2.2);
  - расчет среднего расстояния пути  $\bar{d}$  для получившейся после удаления сети (этап 2.3);
  - удаление в стохастической последовательности узла, следующего после удаленного на этапе 2.2 (этап 2.4);
- Повторение этапов 2.1–2.4 до тех пор, пока  $\bar{d} = 1$ , т. е. сеть не будет полностью неустойчива.

Расчет КДКУС для полученной зависимости  $\bar{d}$  от количества удаленных узлов, включает в себя:

- расчет скорости снижения устойчивости сети  $\frac{n_{\bar{d} \in 1}}{n_o}$  — отношение узлов  $n_{\bar{d} \in 1}$ , при которых среднее расстояние сети равно 1 (сеть полностью неустойчива при  $\bar{d} = 1$ ) к общему количеству узлов в сети  $n_o$ ;
- расчет эффективности устойчивости сети  $Ef$  — расчет площади под кривой на основе нахождения интеграла криволинейной трапеции  $Ef = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx$ , где  $f(x)$  — функция, полученная путем удаления узлов сети.

Тогда значение КДКУС принимает следующий вид:

$$КДКУС = \sqrt{\frac{\frac{n_{\bar{d} \in 1}}{n_o} \times Ef}{\frac{n_{\bar{d} \in 1}}{n_o} + Ef}}$$

Чем ниже КДКУС, тем менее устойчива сеть. Наилучшей (в смысле снижения устойчивости сети) считается сеть, у которой КДКУС имеет минимальное значение.

Этап 2 повторяется необходимое количество раз, для обеспечения статистической устойчивости результатов наблюдений. В данном исследовании для каждой анализируемой сети этап 2 повторялся 1000 раз.

**Статистический анализ (этап 3).** Включает в себя этапы:

- выдвигается допущение, при условии выполнения которого результаты дисперсионного анализа можно считать достоверными, а именно, проверяется нормальность распределения совокупности результатов наблюдений (значений КДКУС) на основе критерия Колмогорова–Смирнова (этап 3.1);
- проводится статистическое исследование существенности влияния фактора изменения структуры сети на ее устойчивость. Данное исследование базируется на базе однофакторного дисперсионного анализа (ОДА) [22, 23]. Сущность дисперсионного анализа состоит в разложении по специальным пра-

вилам дисперсии результата наблюдения на независимые слагаемые, каждое из которых характеризует влияние того или иного фактора на результат наблюдения. Последующее сравнение этих слагаемых позволяет оценить существенность влияния факторов на результат наблюдений (этап 3.2).

Пусть, например, на результат наблюдения  $y$  влияют два фактора  $x_1$  и  $x_2$ . Среднее значение стохастической величины  $\hat{y}$  известно и равно  $M_{\hat{y}}$ . Допустим, что отклонение  $\hat{y}$  от  $M_{\hat{y}}$  за счет действия факторов можно представить в виде:

$$\hat{y} - M_{\hat{y}} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma},$$

где  $\hat{\alpha}$  — отклонение, вызываемое фактором  $x_1$ ;  $\hat{\beta}$  — отклонение, вызываемое фактором  $x_2$ ;  $\hat{\gamma}$  — отклонение, вызываемое другими различными неучтенными факторами.

Предположим, что  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  являются независимыми случайными величинами и имеют дисперсии  $D_{\hat{\alpha}}$ ,  $D_{\hat{\beta}}$  и  $D_{\hat{\gamma}}$  соответственно. Основным положением ОДА является то, что дисперсия  $D_{\hat{\gamma}}$  представима в виде суммы дисперсий отклонений, обусловленных действием исследуемых факторов:

$$D_{\hat{\gamma}} = D_{\hat{\alpha}} + D_{\hat{\beta}} + D_{\hat{\gamma}}.$$

Тогда, сопоставляя  $D_{\hat{\alpha}}$  или  $D_{\hat{\beta}}$  с  $D_{\hat{\gamma}}$ , можно установить степень влияния фактора  $x_1$  или  $x_2$  на результат  $y$  по сравнению с неучтенными факторами, т. е. оценить существенность влияния данных факторов, а сравнивая  $D_{\hat{\alpha}}$  и  $D_{\hat{\beta}}$  между собой, можно оценить степень влияния каждого из факторов  $x_1$  или  $x_2$  на результат  $y$ :

— результаты ОДА показывают значимые или незначимые вносимые фактором изменения в результаты наблюдений, но из этого нельзя понять, какие именно факторы различаются между собой. Для решения этой проблемы выполняются множественные сравнения по критерию Тьюки. Этот критерий используется для проверки нулевой гипотезы  $H_0: M_{\hat{y}A} = M_{\hat{y}B}$  против альтернативной гипотезы  $H_1: M_{\hat{y}A} \neq M_{\hat{y}B}$ , где

индексы  $A$  и  $B$  обозначают любые две сравниваемые группы. При наличии  $m$  групп возможно выполнить  $m(m-1)/2$  попарных сравнений. Критерий Тьюки представляет собой модифицированный критерий Стьюдента<sup>1</sup> (этап 3.3);

— выполняется сравнение КДКУС, полученного на основе последовательного удаления узлов сети [1], и математического ожидания КДКУС, полученного на основе случайного удаления узлов. В данном исследовании последовательно удаляются узлы, важность которых определена на основе измерения центральности по степени (этап 3.4).

### Дисперсионный анализ устойчивости информационно-телекоммуникационных сетей при стохастической перколяции узлов

**Сети Барабаш–Альберта (№ 1–3).** Проведем статистический анализ устойчивости сетей № 1–3, на основе представленной на рис. 1 схемы. Сформируем по 1000 случайных последовательностей узлов анализируемых сетей (этап 2.1 на рис. 1), построенных по параметрам, представленным в табл. 1, и рассчитаем для каждой КДКУС.

Результаты ОДА для 9 полученных выборок КДКУС представлены на рис. 2, *a*, множественных сравнений по критерию Тьюки — на рис. 2, *b*. Вертикальные линии со штрихами на рис. 2, *a* означают внутригрупповые дисперсии КДКУС, точки —  $M_{\hat{y}}$ . Горизонтальные линии на рис. 2, *b* означают дисперсии разницы между КДКУС анализируемых пар моделей, точки — математические ожидания разницы между КДКУС.

Из рис. 2, *a* видно, что дисперсии рассчитанных КДКУС для трех групп моделей имеют различные значения.

<sup>1</sup> [Электронный ресурс]. Режим доступа: [https://r-analytics.blogspot.com/2013/10/blog-post\\_19.html](https://r-analytics.blogspot.com/2013/10/blog-post_19.html), свободный. Яз. рус. (дата обращения: 01.03.2021).

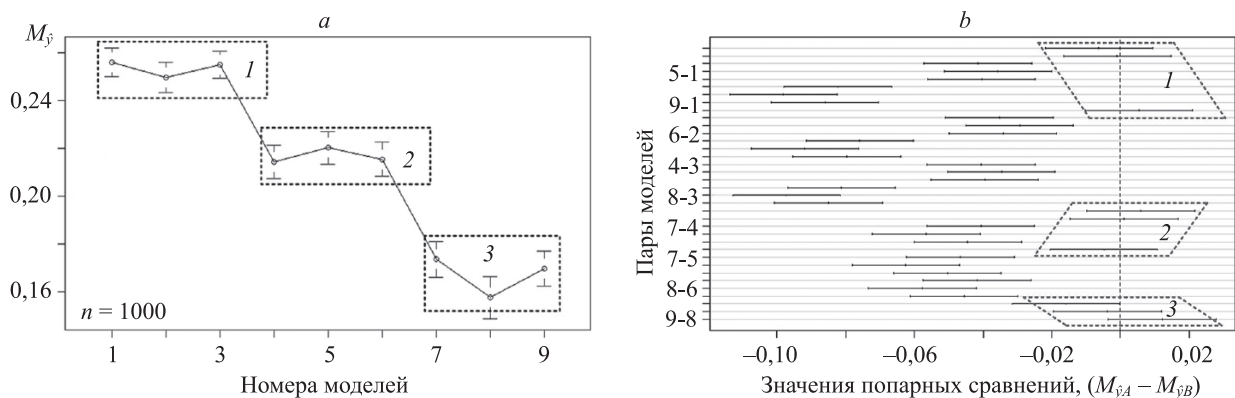


Рис. 2. Результаты для моделей Барабаш–Альберта: однофакторного дисперсионного анализа (*a*); множественных сравнений по критерию Тьюки (*b*).

Группы, построенные по параметрам сетей: 1 — № 1; 2 — № 2; 3 — № 3

Fig. 2. Results for the Barabasi–Albert models: one-way analysis of variance (*a*); multiple comparisons by Tukey’s test (*b*).

Groups built by network parameters: 1 — No. 1; 2 — No. 2; 3 — No. 3

При попарном сравнении выборок КДКУС по критерию Тьюки для пар моделей (рис. 2, *b*) наблюдаются незначимые различия между группами однотипных моделей сетей. Таким образом, статистически доказано влияние фактора изменения структуры сети на ее устойчивость.

**Сети Эрдеша–Реньи (№ 7–12).** Сформируем по 1000 случайных последовательностей узлов анализируемых сетей № 7–12 (этап 2.1 на рис. 1), получаемых на основе модели ЭР. Для каждой рассчитаем КДКУС, проведем ОДА и множественные сравнения на основе критерия Тьюки для полученных шести массивов данных.

На рис. 3, *a* представлены результаты ОДА, на рис. 3, *b* — расчета критерия Тьюки для сетей ЭР. На рис. 3, *b* видны межгрупповые различия между моделями ЭР. Критерий Тьюки показывает незначимые различия (отмечены пунктирной линией) между парой моделей ЭР № 9 и 10, имеющих по 450 и 600 ребер соответственно.

Таким образом, существуют такие комбинации моделей ЭР, имеющие схожие свойства устойчивости, несмотря на разное количество ребер, используемых при их формировании, а в остальном подтверждается влияние фактора изменения структуры сети на ее устойчивость.

**Сравнительный анализ устойчивости информационно-телекоммуникационных сетей при различных вариантах перколяции узлов**

Как было показано в исследовании [1] оптимальной метрикой устойчивости сети является среднее расстояние пути графа  $\bar{d}$ . Помимо этого, в исследовании [1] показано, что при последовательном удалении ключевых элементов наиболее эффективна перколяция узлов, важность которых выражена центральностью по степени. На рис. 4 и 5 красная непрерывная линия — значения  $\bar{d}$  при последовательном удалении узлов, ранжированных по важности, выраженных мерой центральности по степени, а черными пунктирными линиями — по 10 (чтобы не загромождать график) значений  $\bar{d}$  при стохастическом удалении узлов.

Исходя из рис. 4 видно, что при последовательном удалении ранжированных по важности узлов в сетях № 1–3 граф приходит в состояние полностью разрушенного ( $\bar{d} = 1$ ) значительно быстрее, чем при стохастическом удалении. Это обусловлено тем, что модели БА имеют высокую централизацию по степени, в них более мелкие узлы формируются вокруг главных узлов – хабов.

Реальные сети № 4 и 6 показывают скачкообразное увеличение  $\bar{d}$ , что говорит о том, они распадаются на более мелкие графы, в которых значение  $\bar{d}$  выше, чем если его измерять для исходного графа. Реальная сеть № 5 показывает динамику, подобную с моделями БА, что говорит о их схожей структуре.

На рис. 5 представлены значения  $\bar{d}$  для моделей ЭР сетей № 7–12 в табл. 1. С увеличением количества ребер увеличивается устойчивость сети к удалению узлов, ранжированных по важности, чем больше плотность графа (увеличивается количество ребер), тем выше его устойчивость и тем эффективнее для снижения устойчивости таких сетей использование стохастической перколяции.

В табл. 2 сведены результаты измерений КДКУС для последовательной и стохастической перколяции. В графе измерений КДКУС для стохастической перколяции приведено математическое ожидание для 10 000 измерений по каждой анализируемой сети. В графе «разница значений» приводится результат вычитания значений последовательной перколяции из значений стохастической.

Из табл. 2 видно, что наибольшая разница между КДКУС в группе сетей № 1–5, что свидетельствует о том, что они подвержены разрушению при последовательной перколяции узлов. В группе сетей № 6–12 видно снижение эффективности подхода последовательной перколяции.

В группе сетей № 10–12 снижение устойчивости за счет стохастической перколяции эффективнее, чем последовательной. Этот факт объясняется тем, что сети № 10–12 имеют высокое количество ребер, за счет этого сеть обладает высокой плотностью, что повышает устойчивость.

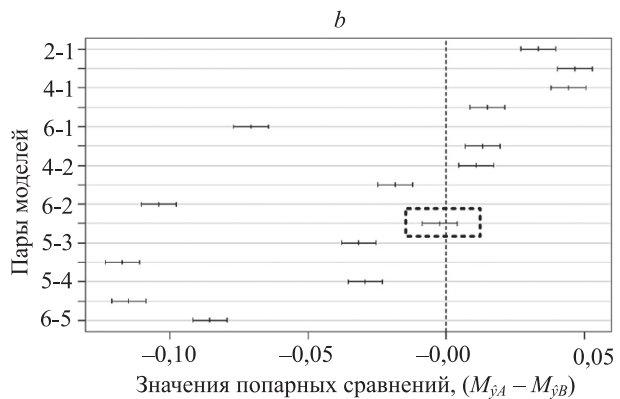
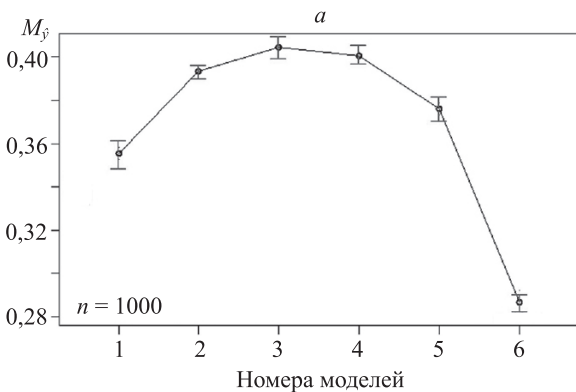


Рис. 3. Результаты для моделей Эрдеша–Реньи: дисперсионного анализа (*a*); множественных сравнений по критерию Тьюки (*b*)  
 Fig. 3. Results for the Erdős–Rényi models: analysis of variance (*a*); multiple comparisons by Tukey’s test (*b*)

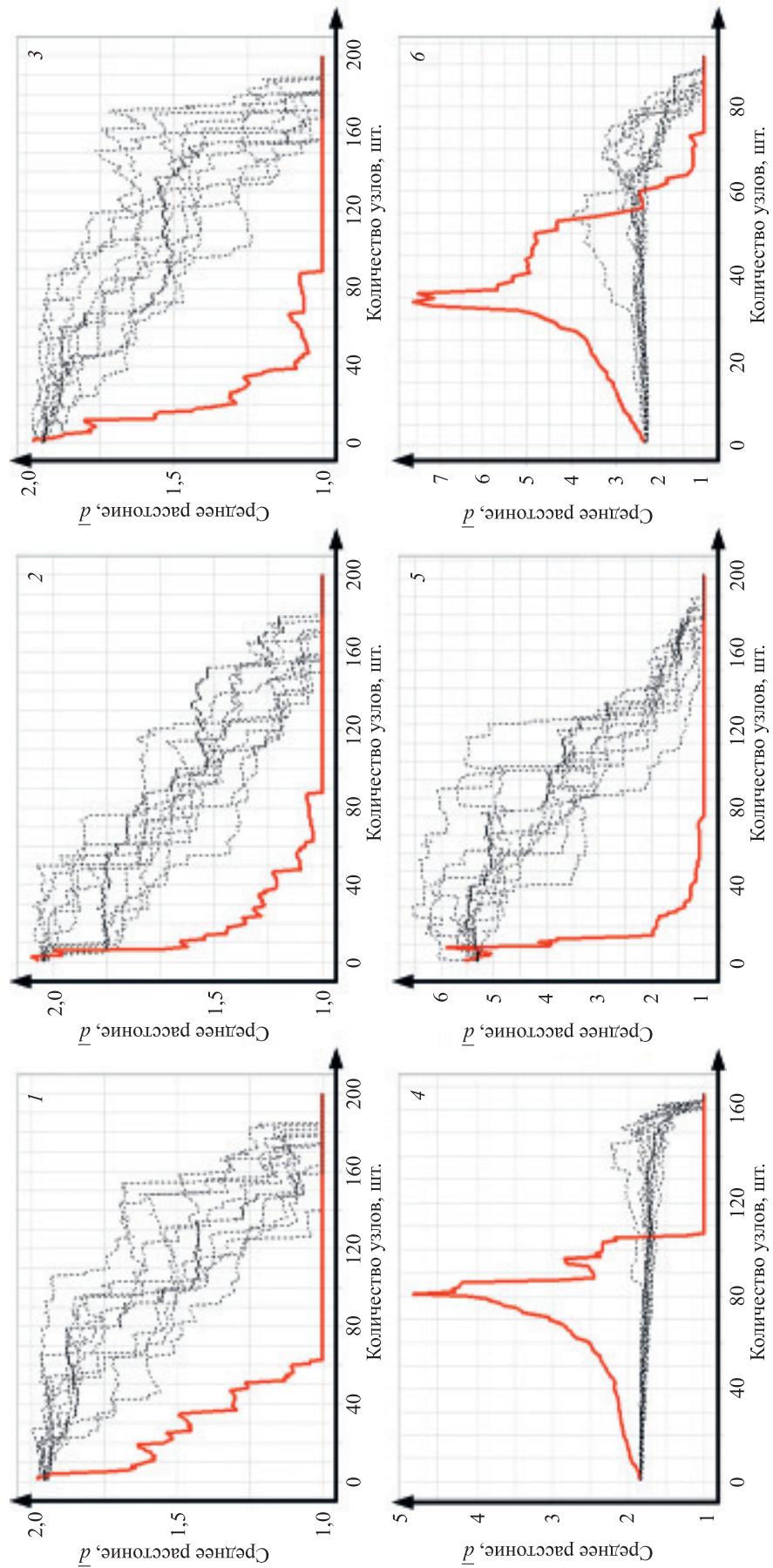


Рис. 4. Снижение значения среднего расстояния пути графа при стохастической перколяции узлов в сетях № 1–6  
 Fig. 4. Decrease in the value of the average path length at random removal of nodes in networks 1–6

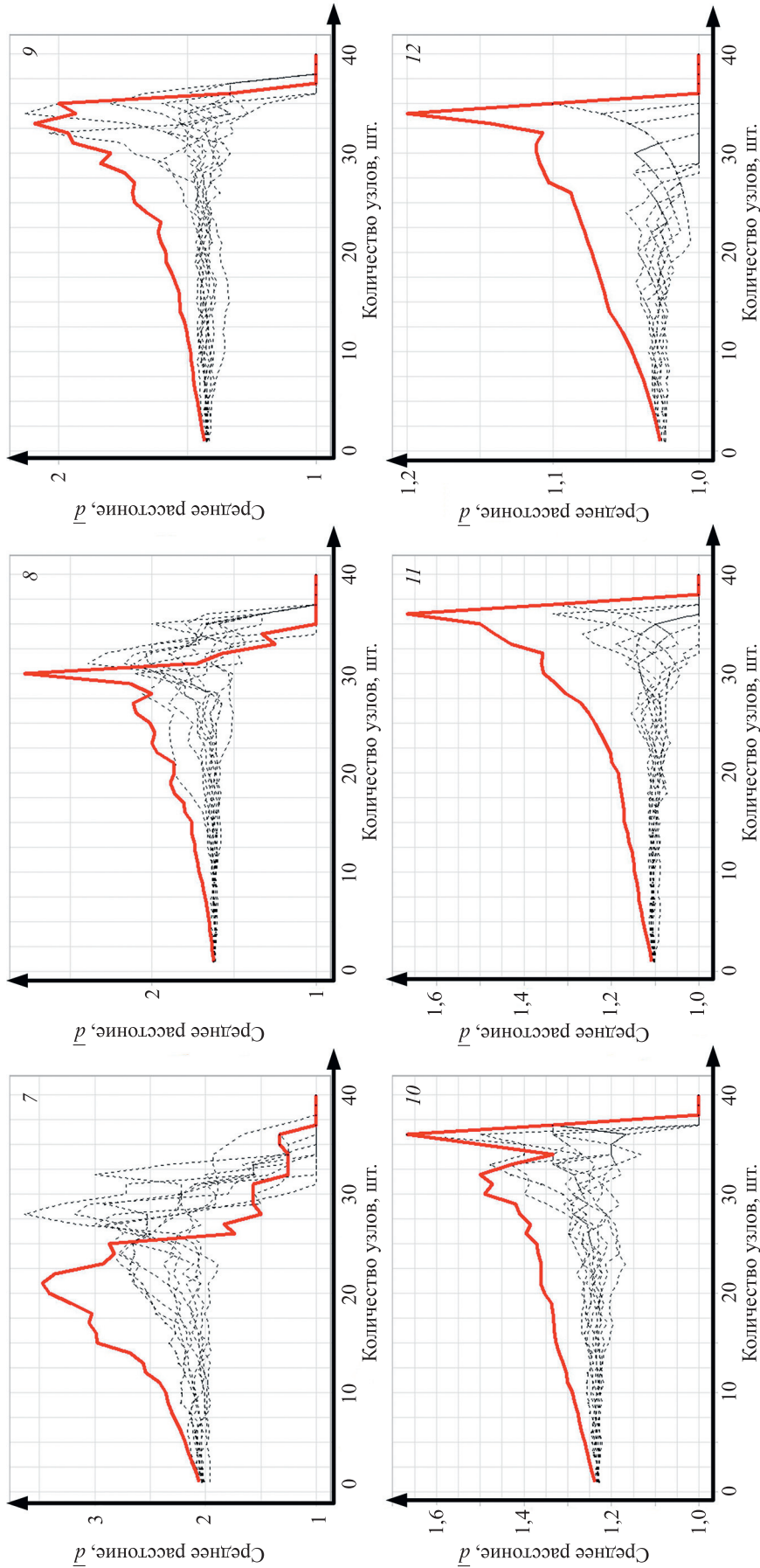


Рис. 5. Снижение значения среднего расстояния пути графа при стохастической перколяции узлов в сетях № 7–12  
 Fig. 5. Decrease in the value of the average path length at random removal of nodes in networks 7–12

Таблица 2. Значения комплексного двухкритериального коэффициента устойчивости для исследуемых сетей при последовательной и стохастической перколяции

Table 2. The values of the complex two-criterion stability coefficient for the networks under study under sequential and random percolation

Номер сети	Способ перколяции		Разница значений
	Последовательная	Стохастическая	
1	0,74	1,15	0,41
2	0,63	1,19	0,56
3	0,64	1,20	0,56
4	1,12	1,38	0,26
5	0,86	1,32	0,46
6	1,26	1,35	0,09
7	1,24	1,30	0,06
8	1,34	1,33	0,01
9	1,30	1,34	0,04
10	1,36	1,34	-0,02
11	1,34	1,32	-0,02
12	1,34	1,25	-0,09

### Заключение

Полученные результаты свидетельствуют о том, что существуют сети такой структуры, устойчивость которых снижается быстрее при стохастической перколяции, чем при последовательной. Это сети с высокой плотностью, например, построенные на базе моделей Эрдеша–Реньи. Кроме того, установлено, что в моделях сетей Барабаши–Альберта, приближенных по своим свойствам к реальным, устойчивость снижается быстрее при последовательной перколяции. Снижение устойчивости в среднем, при стохастической перколя-

ции в реальных информационно-телекоммуникационных сетях, немного ниже, чем при последовательной перколяции.

Статистический анализ на базе однофакторного дисперсионного анализа и множественных сравнений показал, что изменения, вносимые в структуру модели, имеют влияние на устойчивость сети. Рассмотренный подход к анализу устойчивости сетей при стохастической перколяции может применяться в моделировании отказов в сложных технических системах, информационно-телекоммуникационных сетях и объектах инфраструктуры, представленных в виде графа.

### Литература

- Семенов К.В., Шуваев Ф.Л., Витензон К.И. Анализ способов снижения устойчивости сетей на основе последовательного удаления ключевых элементов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21. № 2. С. 241–248. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2021-21-2-241-248>
- Singer Y. Dynamic measure of network robustness // Proc. IEEE 24<sup>th</sup> Convention of Electrical & Electronics Engineers in Israel. 2006. P. 366–370. <https://doi.org/10.1109/EEEI.2006.321105>
- Еремеев И.Ю., Татарка М.В., Шуваев Ф.Л., Цыганов А.С. Анализ мер центральности узлов сетей на основе метода главных компонент // Информатика и автоматизация. 2020. Т. 19. № 6. С. 1307–1331. <https://doi.org/10.15622/ia.2020.19.6>
- Zhou M., Liu J., Wang S., He S. A comparative study of robustness measures for cancer signaling networks // Big Data and Information Analytics. 2017. V. 2. N 1. P. 87–96. <https://doi.org/10.3934/bdia.2017011>
- Liu J., Zhou M., Wang S., Penghui L. A comparative study of network robustness measures // Frontiers of Computer Science. 2017. V. 11. N 4. P. 568–584. <https://doi.org/10.1007/s11704-016-6108-z>
- Holme P., Kim B.J., Yoon C.N., Han S.K. Attack vulnerability of complex networks // Physical Review E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2002. V. 65. N 5. P. 056109. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.056109>
- Lu Z.M., Li X.F. Attack vulnerability of network controllability // PLoS One. 2016. V. 11. N 9. P. e0162289. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0162289>

### References

- Semenov K., Shuvaev F., Vitenzon K. An analysis of the ways to reduce the vulnerability of networks based on the sequential removal of key elements. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, vol. 21, № 2, pp. 241–248. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2021-21-2-241-248>.
- Singer Y. Dynamic measure of network robustness. *Proc. IEEE 24<sup>th</sup> Convention of Electrical & Electronics Engineers in Israel*, 2006, pp. 366–370. <https://doi.org/10.1109/EEEI.2006.321105>
- Eremeev I., Tatarka M., Shuvaev F., Tsyganov A. Comparative analysis of centrality measures of network nodes based on principal component analysis. *Informatics and Automation*, 2020, vol. 19, no. 6, pp. 1307–1331. (in Russian). <https://doi.org/10.15622/ia.2020.19.6>.
- Zhou M., Liu J., Wang S., He S. A comparative study of robustness measures for cancer signaling networks. *Big Data and Information Analytics*, 2017, vol. 2, no. 1, pp. 87–96. <https://doi.org/10.3934/bdia.2017011>
- Liu J., Zhou M., Wang S., Penghui L. A comparative study of network robustness measures. *Frontiers of Computer Science*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 568–584. <https://doi.org/10.1007/s11704-016-6108-z>
- Holme P., Kim B.J., Yoon C.N., Han S.K. Attack vulnerability of complex networks. *Physical Review E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2002, vol. 65, no. 5, pp. 056109. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.056109>
- Lu Z.M., Li X.F. Attack vulnerability of network controllability. *PLoS One*, 2016, vol. 11, no. 9, pp. e0162289. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0162289>



8. Dong S.J., Mostafazi A., Wang H.Z., Gao J.X., Li X.P. Measuring the topological robustness of transportation networks to disaster-induced failures: a percolation approach // *Journal of Infrastructure Systems*. 2020. V. 26. N 2. P. 04020009. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)IS.1943-555X.0000533](https://doi.org/10.1061/(ASCE)IS.1943-555X.0000533)
9. Takabe S., Hukushima K. Minimum vertex cover problems on random hypergraphs: Replica symmetric solution and a leaf removal algorithm // *Physical Review E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2014. V. 89. N 6. P. 062139. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.062139>
10. Grilo M., Fadigas I., Miranda J., Cunha M., Monteiro R., Pereira H. Robustness in semantic networks based on cliques // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2017. V. 472. P. 94–102. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.12.087>
11. Watson C.G. Brain Graph. User Guide [Электронный ресурс]. URL: [https://cwatson.github.io/files/brainGraph\\_UserGuide.pdf](https://cwatson.github.io/files/brainGraph_UserGuide.pdf), свободный. Яз. англ. (дата обращения: 04.03.2021).
12. Barabási A.-L. *Network Science*. Glasgow: Cambridge University Press, 2016. 456 p.
13. Шуваев Ф.Л., Татарка М.В. Анализ математических моделей случайных графов, применяемых в имитационном моделировании информационно-коммуникационных сетей // *Вестник Санкт-Петербургского университета ГПСМЧС России*. 2020. № 2. С. 67–77.
14. Newman M.E.J. *Networks an introduction*. N.Y.: Oxford University Press Inc., 2010, 1042 p.
15. Hartmann A., Mézard M. Distribution of diameters for Erdős-Rényi random graphs // *Physical Review E*. 2018. V. 97. N 3. P. 032128. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.032128>
16. Chen P.-Y., Choudhury S., Hero A. Multi-centrality graph spectral decompositions and their application to cyber intrusion detection // *Proc. 41st IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. 2016. P. 4553–4557. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2016.7472539>
17. Шуваев Ф.Л., Татарка М.В. Анализ динамики мер центральности математических моделей случайных графов // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2020. Т. 20. № 2. С. 249–256. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-2-249-256>
18. Gibson H., Vickers P. Using adjacency matrices to lay out larger small-world networks // *Applied Soft Computing*. 2016. V. 42. P. 80–92. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2016.01.036>
19. Csardi G., Nepusz T. The IGRAPH software package for complex network research // *InterJournal, Complex Systems*. 2006. V. 1695.
20. Butts C.T., Hunter D., Handcock M., Bender-deMoll S., Horner J., Wang L., Krivitsky P.N., Knapp B., Bojanowski M., Klumb C. *Classes for Relation Data* [Электронный ресурс]. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/network/network.pdf>, свободный. Яз. англ. (дата обращения: 03.03.2021).
21. Schoch D. *RDocumentation* [Электронный ресурс]. URL: <https://rdocumentation.org/packages/networkdata>, свободный. Яз. англ. (дата обращения: 03.03.2021).
22. Юсупов Р.М., Петухов Г.Б., Сидоров В.Н., Городецкий В.И., Марков В.М. Статистические методы обработки результатов наблюдений: монография. М.: МО СССР, 1984. 563 с.
23. Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*. М.: Физматлит, 2012. 813 с.
8. Dong S.J., Mostafazi A., Wang H.Z., Gao J.X., Li X.P. Measuring the topological robustness of transportation networks to disaster-induced failures: a percolation approach. *Journal of Infrastructure Systems*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 04020009. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)IS.1943-555X.0000533](https://doi.org/10.1061/(ASCE)IS.1943-555X.0000533)
9. Takabe S., Hukushima K. Minimum vertex cover problems on random hypergraphs: Replica symmetric solution and a leaf removal algorithm. *Physical Review E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2014, vol. 89, no. 6, pp. 062139. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.062139>
10. Grilo M., Fadigas I., Miranda J., Cunha M., Monteiro R., Pereira H. Robustness in semantic networks based on cliques. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017, vol. 472, pp. 94–102. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.12.087>
11. Watson C.G. *Brain Graph. User Guide*. Available at: [https://cwatson.github.io/files/brainGraph\\_UserGuide.pdf](https://cwatson.github.io/files/brainGraph_UserGuide.pdf) (accessed: 04.03.2021).
12. Barabási A.-L. *Network Science*. Glasgow, Cambridge University Press, 2016, 456 p.
13. Shuvaev F.L., Tatarka M.V. Analysis of mathematical models of random graphs used in simulation of information and communication networks. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta GPS MChS Rossi*, 2020, no. 2, pp. 67–77. (in Russian)
14. Newman M.E.J. *Networks an introduction*. N.Y.: Oxford University Press Inc., 2010, 1042 p.
15. Hartmann A., Mézard M. Distribution of diameters for Erdős-Rényi random graphs. *Physical Review E*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 032128. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.032128>
16. Chen P.-Y., Choudhury S., Hero A. Multi-centrality graph spectral decompositions and their application to cyber intrusion detection. *Proc. 41st IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2016, pp. 4553–4557. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2016.7472539>
17. Shuvaev F.L., Tatarka M.V. Dynamics of centrality measures of random graph mathematical models. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 2, pp. 249–256. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-2-249-256>
18. Gibson H., Vickers P. Using adjacency matrices to lay out larger small-world networks. *Applied Soft Computing*, 2016, vol. 42, pp. 80–92. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2016.01.036>
19. Csardi G., Nepusz T. The IGRAPH software package for complex network research. *InterJournal, Complex Systems*, 2006, vol. 1695.
20. Butts C.T., Hunter D., Handcock M., Bender-deMoll S., Horner J., Wang L., Krivitsky P.N., Knapp B., Bojanowski M., Klumb C. *Classes for Relation Data*. Available at: <https://cran.r-project.org/web/packages/network/network.pdf> (accessed: 03.03.2021).
21. Schoch D. *RDocumentation*. Available at: <https://rdocumentation.org/packages/networkdata> (accessed: 03.03.2021).
22. Jusupov R.M., Petuhov G.B., Sidorov V.N., Gorodeckij V.I., Markov V.M. *Statistical Methods for Processing Observation Results*. Moscow, USSR Ministry of Defense Publ., 1984, 786 p. (in Russian)
23. Kobzar' A. *Applied Mathematical Statistics*. Moscow: Fizmatlit Publ., 2012, 813 p. (in Russian).

## Авторы

**Шуваев Федор Леонидович** — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, [sc 572205744947](https://orcid.org/0000-0001-7502-9455), <http://orcid.org/0000-0001-7502-9455>, [cadetfed@mail.ru](mailto:cadetfed@mail.ru)

**Витензон Кирилл Игоревич** — адъюнкт, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, [sc 57223297424](https://orcid.org/0000-0001-5315-7843), <http://orcid.org/0000-0001-5315-7843>, [witenzon\\_kirill@mail.ru](mailto:witenzon_kirill@mail.ru)

## Authors

**Fedor L. Shuvaev** — PhD, Senior Researcher, Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, [sc 572205744947](https://orcid.org/0000-0001-7502-9455), <http://orcid.org/0000-0001-7502-9455>, [cadetfed@mail.ru](mailto:cadetfed@mail.ru)

**Kirill I. Vitenzon** — PhD Student, Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, [sc 57223297424](https://orcid.org/0000-0001-5315-7843), <http://orcid.org/0000-0001-5315-7843>, [witenzon\\_kirill@mail.ru](mailto:witenzon_kirill@mail.ru)

Статья поступила в редакцию 16.04.2021  
Одобрена после рецензирования 31.05.2021  
Принята к печати 16.07.2021

Received 16.04.2021  
Approved after reviewing 31.05.2021  
Accepted 16.07.2021



Работа доступна по лицензии  
Creative Commons  
«Attribution-NonCommercial»