

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MODELING AND SIMULATION

doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-4-578-591

УДК 532.529

Решение задач сверх- и гиперзвуковой газовой динамики с использованием модели высокотемпературного воздуха

Константин Николаевич Волков¹, Юрий Владимирович Добров²,
 Антон Геннадьевич Карпенко³, Михаил Сергеевич Яковчук⁴

^{1,2,3,4} Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация

¹ k.volkov@kingston.ac.uk, <http://orcid.org/0000-0001-6055-2323>

² youdobrov@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0002-2552-1879>

³ aspera.2003.ru@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0002-1250-9766>

⁴ mihailyakovchuk@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0002-9770-0841>

Аннотация

Предмет исследования. В работе рассмотрено решение ряда задач сверх- и гиперзвуковой газовой динамики при использовании модели, которая учитывает диссоциацию и ионизацию воздуха. Приведены результаты верификации и валидации разработанного численного метода при использовании разностных схем (Рое, Русанова, AUSM) для дискретизации конвективных потоков. **Метод.** Формулировка математической модели для высокотемпературного воздуха использует наличие равновесных химических реакций диссоциации и ионизации. С этой целью при высоких скоростях набегающего потока применена модель Крайко, содержащая равновесные химические реакции в воздухе при высоких температурах. Для дискретизации основных уравнений использован метод конечных объемов на неструктурированной сетке. Одна из особенностей построенной математической модели состоит в реализации эффективного перехода между физическими и консервативными переменными. Приведены соотношения, при помощи которых осуществлен переход от консервативных переменных к физическим и обратно при использовании модели высокотемпературного воздуха. Для обеспечения устойчивости численных расчетов введена энтропийная поправка. Убывание энтропии в решении гиперболических уравнений исключено при помощи введения искусственной вязкости по Нейману, а также применения метода Годунова с точным решением задачи Римана и методов, основанных на приближенном решении задачи о распаде произвольного разрыва. **Основные результаты.** Получено численное решение ряда задач сверхзвуковой газовой динамики (сверхзвуковые течения в канале с прямой ступенькой и около сферы) с учетом высокотемпературных эффектов. Обсуждены критерии точности численных расчетов, связанные с расположением ударно-волновых структур, и выполнено сравнение полученных результатов с данными, имеющимися в публикациях, а также с расчетами по модели совершенного газа. Проведено сопоставление результатов численных расчетов с имеющимися экспериментальными данными. Расчеты получены в рамках невязкой модели, с учетом влияния вязкости и ее зависимости от температуры, а также модели турбулентного течения. На основе результатов численного моделирования рассмотрено влияние вязких эффектов на характеристики потока в канале с прямой ступенькой и обтекание сферы гиперзвуковым потоком. Отмечено влияние различных численных факторов на форму головного скачка уплотнения и наличие флуктуаций решения за скачком уплотнения. **Практическая значимость.** В рамках работы подготовлен расчетный модуль для коммерческого пакета AnsysFluent, реализованный при помощи средств пользовательского программирования. Модуль расширяет стандартные возможности коммерческого программного обеспечения, ориентированного на решение задач вычислительной газовой динамики, и для решения задач гиперзвуковой аэродинамики. Разработанные средства численного моделирования могут быть полезны при проектировании и оптимизации гиперзвуковых летательных аппаратов.

Ключевые слова

математическое моделирование, аэродинамика, сверхзвуковое течение, ударная волна, реальный газ, канал

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта 19-71-10019.

© Волков К.Н., Добров Ю.В., Карпенко А.Г., Яковчук М.С., 2021

Ссылка для цитирования: Волков К.Н., Добров Ю.В., Карпенко А.Г., Яковчук М.С. Решение задач сверх- и гиперзвуковой газовой динамики с использованием модели высокотемпературного воздуха // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21, № 4. С. 578–591. doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-4-578-591

Solution of super- and hypersonic gas dynamic problems with a model of high-temperature air

Konstantin N. Volkov¹, Yuriy V. Dobrov², Anton G. Karpenko³, Mikhail S. Yakovchuk⁴

^{1,2,3,4} Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation

¹ k.volkov@kingston.ac.uk, <http://orcid.org/0000-0001-6055-2323>

² youdobrov@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0002-2552-1879>

³ aspera.2003.ru@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0002-1250-9766>

⁴ mihailyakovchuk@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0002-9770-0841>

Abstract

The study considers the solution of a number of problems of supersonic and hypersonic gas dynamics using a model that takes into account the dissociation and ionization of air. The results of verification and validation of the developed numerical method using various difference schemes (the Roe scheme, Rusanov scheme, AUSM scheme) for discretizing convective flows are presented. The formulation of the mathematical model for high-temperature air uses the presence of equilibrium chemical reactions of dissociation and ionization. For this purpose, at high incoming flow velocities, the Kraiko model is applied, which includes equilibrium chemical reactions in air at high temperatures. To discretize the basic equations, the finite volume method on an unstructured grid is applied. One of the features of the constructed mathematical model is the implementation of the transition between physical and conservative variables. Relationships are given, with the help of which the transition from conservative variables to physical ones and vice versa is carried out when using the high-temperature air model. To ensure the stability of numerical calculations, an entropy correction is introduced. The decrease in entropy in the solution of hyperbolic equations is excluded by introducing an artificial viscosity according to Neumann, as well as by using the Godunov method with an exact solution of the Riemann problem and methods based on the approximate solution of the problem of the decay of an arbitrary discontinuity. A number of problems of supersonic gas dynamics (supersonic flow in a channel with a straight step and supersonic flow around a sphere) are numerically solved taking into account high-temperature effects. The criteria for the accuracy of numerical calculations related to the location of shock-wave structures are discussed. The calculated shock-wave structure of the flow is compared with the data available in the literature, as well as with calculations using the perfect gas model. Some results of numerical calculations are compared with the available experimental data. The shock-wave flow patterns obtained in the framework of the inviscid model, which takes into account the effect of viscosity and its dependence on temperature, and the turbulent flow model are compared. On the basis of numerical simulation data, the influence of viscous effects on the flow characteristics in a channel with a straight step and hypersonic flow around a sphere is considered. The influence of various numerical factors on the shape of the bow shock and the presence of fluctuations in the solution behind the shock is emphasized. As part of the work, a computational module was prepared for the commercial package Ansys Fluent, implemented with the help of user programming tools. The prepared module expands the standard capabilities of commercial software focused on solving computational gas dynamics problems, and is available to Ansys Fluent users for solving hypersonic aerodynamics problems. The developed means of numerical simulation can be useful in the design and optimization of hypersonic aircraft.

Keywords

mathematical modeling, aerodynamics, supersonic flow, shock wave, real gas, channel

Acknowledgements

The study was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-10019).

For citation: Volkov K.N., Dobrov Yu.V., Karpenko A.G., Yakovchuk M.S. Solution of super- and hypersonic gas dynamic problems with a model of high-temperature air. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 578–591 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-4-578-591

Введение

В отличие от дозвуковых течений, сверхзвуковые потоки характеризуются наличием крутых градиентов и разрывов искомых газодинамических параметров. Для точного расчета сверхзвуковых течений с воспроизведением реальных физических процессов требуется применение методов высокого порядка точности, либо минимизирующих численную вязкость до значений, меньших физической вязкости, либо не обладающих численной диссипацией [1]. Использование схем низкого порядка приводит к тому, что картина течения, формирующаяся под действием численных эффектов, оказывается сглаженной и отличается от реальной

структуры течения [2]. С точки зрения вычислительной практики, представляет интерес точность разрешения с помощью выбранного численного метода сложных газодинамических структур, возникающих в результате взаимодействия сверхзвукового потока с телом заданной формы, нестационарное взаимодействие волн разрежения и сжатия, а также взаимодействие маховских дисков, возникающих при нерегулярном взаимодействии ударных волн между собой и со стенками.

При движении высокоинтенсивной ударной волны температура и давление газа за ее фронтом возрастают, и модель совершенного газа не обеспечивает требуемой точности численного решения, поскольку молекулярную массу и теплоемкость нельзя считать

независимыми от давления и постоянными от температуры [3]. При этом необходимо учитывать процессы диссоциации и ионизации, происходящие в газовой среде. На практике применяются модели, учитывающие высокотемпературные процессы в газах, а также аналитические зависимости и интерполяции табличных значений. С вычислительной точки зрения довольно интересной и удачной является модель, предложенная в работе [4] для воздуха и содержащая реакции между 13 компонентами (модель Крайко). Основное достоинство данной модели — учет диссоциации и ионизации воздуха при высоких температурах. В диапазоне температур до 20 000 К и давлений 10^2 – 10^8 Па погрешность модели не превосходит ± 2 %, и занимает полосу ± 1 %. Модель Крайко успешно используется для моделирования обтекания гиперзвуковых летательных аппаратов (волнолетов) и демонстрирует способ ускорения газодинамических расчетов на параллельных вычислительных системах, включая графические процессоры общего назначения [5].

При получении решений уравнений Эйлера или Навье–Стокса, которые при сверхзвуковых скоростях течения имеют гиперболический тип, важным является выполнение условия неубывания энтропии [6], в этом случае выполнение законов сохранения оказывается недостаточным. В рамках численного решения уравнений газовой динамики проблема энтропии решается при помощи введения искусственной вязкости (такой подход был предложен Дж. фон Нейманом). Проявление искусственной вязкости сказывается на размазывании газодинамических разрывов на несколько ячеек расчетной сетки.

Постановка задачи

Для численного интегрирования уравнений газовой динамики широко применяется метод Годунова, основанный на точном решении задачи о распаде произвольного разрыва и обеспечивающий получение монотонного численного решения задачи. В методе Годунова роль искусственной вязкости выполняет схемная вязкость. Метод имеет первый порядок точности и обладает минимальной схемной вязкостью, обеспечивая сквозной расчет течений с газодинамическими разрывами. В связи с трудоемкостью точного решения задачи Римана или ее невозможностью, применяются приближенные методы решения задачи о распаде произвольного разрыва. К этому классу, в частности, относится метод Рое [7].

Схема Рое использует осреднение параметров на гранях контрольного объема, где поток соответствует линеаризованному решению задачи о распаде разрыва в конфигурации с двумя ударными волнами и выполнением соотношений на одиночных разрывах. Схема хорошо зарекомендовала себя при расчете течений с ударными волнами и контактными разрывами, однако имеет известные энтропийные проблемы (появление нефизических скачков) в расчете зон разрежения при смене знака характеристик. Для устранения этого недостатка разработаны различные процедуры энтропийной коррекции, связанные с добавлением диссипации [6].

Для расчета двумерных течений эффективной конечно-разностной схемы с введением явной искусственной вязкости используется схема Русанова [8]. Метод Русанова основан на двухволновой схеме с учетом разрывов типа левой и правой ударных волн без рассмотрения контактного разрыва. В основе схемы лежит введение членов с искусственной диффузией общего вида, причем берутся разности вперед по времени и центральные разности по пространственным переменным. В схеме Русанова применяется локальный максимум по параметрам в соседних ячейках сетки. Таким образом, в схему вводится искусственные вязкость, теплопроводность и диффузия массы.

Основная идея семейства схем AUSM (Advection Upstream Splitting Method) заключается в представлении конвективной и акустической волн как двух физически различных процессов [9]. Невязкий поток в схеме AUSM расщепляется на конвективный поток и поток с давлением. Схема показывает высокие показатели точности при моделировании течений с сильными ударными волнами.

Схемы ENO/WENO (Essentially Non-Oscillatory, Weighted Essentially Non-Oscillatory) типа обладают точностью и способностью к разрешению узких областей с большими градиентами искомым функций при решении широкого круга задач сверхзвуковой газовой динамики. Схемы характеризуются сложностью реализации на неструктурированных сетках и повышенными требованиями к вычислительным ресурсам [10, 11].

Модели высокотемпературного воздуха реализованы в отечественном пакете вычислительной газовой динамики и теплообмена Логос [12, 13].

В настоящей работе приведены результаты расчетов ряда сверхзвуковых течений, которые находят широкое применение в вычислительной практике для тестирования разработанных средств численного моделирования. Для дискретизации конвективных потоков применяются различные конечно-разностные схемы, выбор которых обуславливается их наличием в коммерческом программном обеспечении Ansys Fluent. Численные расчеты выполнены на основе разработанной вычислительной процедуры. Подготовлен расчетный модуль, реализованный при помощи средств пользовательского программирования и расширяющий возможности коммерческого программного обеспечения. Результаты расчетов, полученные в рамках модели совершенного газа и модели высокотемпературного воздуха, сравниваются между собой и с данными, имеющимися в научных публикациях.

Основные уравнения

Нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается системой уравнений, которая в интегральной форме записывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \mathbf{U} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1)$$

где t — время; \mathbf{U} — вектор-столбец консервативных переменных в точке \mathbf{x} в момент времени t ; \mathbf{F} — тензорное поле потока; V — некоторый замкнутый объем газа с

границей ∂V ; $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ — вектор элементарной площади dS к границе объема ∂V с внешней нормалью \mathbf{n} . Вектор-столбец консервативных переменных и тензорное поле потока имеют вид

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \\ (\rho e + p) \mathbf{v} - \mathbf{v} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{q} \end{pmatrix},$$

где ρ — плотность; p — давление; e — полная энергия единицы массы; \mathbf{v} — вектор скорости с компонентами v_x , v_y и v_z в координатных направлениях x , y и z ; $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений; \mathbf{I} — единичный тензор; \mathbf{q} — вектор теплового потока. Полная энергия единицы массы равняется сумме внутренней энергии ε , обусловленной термодинамическими процессами (включает в себя энергии поступательного движения, вращательного, колебательного и электронного возбуждения атомных и молекулярных компонент газовой смеси), и кинетической энергии:

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2.$$

Компоненты тензора вязких напряжений имеют вид

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right),$$

где μ и λ — вязкость и теплопроводность. Под δ_{ij} понимается символ Кронекера.

Вектор потока тепла выражается через закон Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T,$$

где T — температура.

При решении задачи взаимодействия высокотемпературного воздуха с поверхностью тела необходимы такие характеристики среды как вязкость и теплопроводность. Для термически совершенного газа вязкость и теплопроводность практически не зависят от давления и являются функциями только температуры. В высокотемпературном воздухе, когда становятся заметными процессы диссоциации и ионизации, зависимости этих характеристик от параметров среды усложняются, в частности, начинает играть роль зависимость от давления (как следствие изменения молекулярного состава). Динамическая вязкость и теплопроводность рассчитываются по формулам Сазерленда:

$$\mu = \mu_0 \frac{C + T_0}{C + T} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2}, \quad \lambda = \lambda_0 \frac{C + T_0}{C + T} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2}.$$

Для воздуха принимается, что $\mu_0 = 1,7894 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) и $\lambda_0 = 0,0242$ Вт/(м·К) при $T_0 = 273$ К, $C = 110,4$ К.

Уравнение (1) дополняется уравнением состояния идеального газа:

$$p = \rho \frac{R_0}{M_\Sigma(p, T)} T,$$

где R_0 — универсальная газовая постоянная; M_Σ — молекулярный вес газа, который в общем случае зависит от давления и температуры. Вводя энтальпию $h = \varepsilon + p/\rho$, запишем выражение для полной энергии единицы массы:

$$e = h + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 - \frac{p}{\rho}.$$

Допуская, что имеется равновесие по всем внутренним степеням свободы частиц с энергией поступательного движения, введем теплоемкость газа, рассчитанную в приближении равновесной заселенности внутренних энергетических состояний

$$h = h_0 + \int_{T_0}^T c_p dT,$$

где h_0 — энтальпия образования вещества при $T = T_0$.

В случае совершенного газа молекулярный вес M_Σ , газовая постоянная $R = R_0/M_\Sigma$, теплоемкость при постоянном давлении c_p и теплоемкость при постоянном объеме c_v являются постоянными. При этом справедливо соотношение Майера ($c_p - c_v = R$). Показатель адиабаты рассчитывается из соотношения $\gamma = c_p/c_v$, а для нахождения энтальпии и внутренней энергии применяются соотношения $h = c_p T$ и $\varepsilon = c_v T$.

Метод конечных объемов

Для численного решения уравнений газовой динамики (1) используется метод конечных объемов, реализованный на неструктурированных сетках, ячейки которых состоят из многогранников произвольной формы. Расчетная область разделяется на множество контрольных объемов. Предполагается, что сеточная величина, определенная в центре контрольного объема V_i , представляет собой средне-интегральное значение соответствующей непрерывно распределенной величины

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \mathbf{U} dV.$$

Вычисляя интеграл по границе контрольного объема i как сумму произведений значений вектора потока $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ в центрах граней j контрольного объема на площади граней S_{ij} , уравнение (1) можно переписать в следующем полудискретном виде

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} + \frac{1}{V_i} \sum_j \mathbf{F}_{ij} S_{ij} = 0, \quad (2)$$

где V_i — объем контрольного объема i ; \mathbf{F}_{ij} — вектор потока из ячейки i в ячейку j в центре грани контрольного объема; S_{ij} — площадь грани j контрольного объема i . Под N_i понимается общее число контрольных объемов.

Для дискретизации производной по времени в уравнении (2) используется явная схема Рунге–Кутты третьего порядка. Для вычисления конвективных потоков на грани контрольного объема применяются различные подходы. При этом используются стандартные схемы расчета потоков, например, схема Рое, реализованная во многих коммерческих пакетах газовой динамики. Для дискретизации конвективных потоков применяются также схема Годунова и схема Русанова. Второй порядок аппроксимации по пространству достигается с помощью интерполяции из центра ячеек на грань конечного объема с функцией ограничения градиента решения для обеспечения монотонности схемы. Вязкая

часть потока аппроксимируется по явной схеме. Учет вязких потоков вызван тем, что в расчетах невязких течений образуются нефизические численные аномалии при обтекании гиперзвуковым потоком затупленных тел.

При применении схемы конечных объемов (2) потоки вычисляются в направлении нормали к границе. В схеме Рунге поток на грани контрольного объема определяется соотношением

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)] - \frac{1}{2}|A|(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L),$$

где $|A| = R|\Lambda|L$. Под $\Lambda = \text{diag}\{v_n - a, v_n, v_n + a\}$ понимается диагональная матрица, элементами которой являются собственные числа якобиана; \mathbf{U}_R и \mathbf{U}_L — вектора, составленные из правых и левых собственных чисел якобиана; v_n — скорость по нормали к грани контрольного объема; a — скорость звука.

Для приближенного учета сложных физико-химических процессов в реальных газах разработана методология эффективного показателя адиабаты, позволяющая проводить декомпозицию полной задачи моделирования высокоскоростных течений газа на отдельные подзадачи. Это обеспечивает создание универсального вычислительного комплекса, структурированного на ряд автономных сегментов, с возможностью независимой модификации их функционального наполнения, усовершенствование алгоритмов и компьютерной реализации.

Существующие численные методы расчета уравнений движения газа (1) разрабатывались для совершенного газа. Для обобщения этих подходов на течения химически реагирующего равновесного газа вводится эффективный показатель адиабаты, позволяющий вычислить скорость звука по формуле совершенного газа

$$a^2 = \gamma^* \frac{p}{\rho}$$

Между эффективным показателем адиабаты γ^* и отношением удельных теплоемкостей $\gamma = c_p/c_v$ имеется связь

$$\gamma^* = \gamma \frac{\rho}{\rho p_p}$$

Нижний индекс p обозначает дифференцирование по давлению. При расчете скорости звука предполагается, что процессы распространения слабых возмущений являются изэнтропийными ($ds = 0$)

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{const}} = \left(\rho_p + \rho_T \frac{dT}{dp} \right)^{-1}$$

При термодинамическом равновесии справедливо равенство $Tds = dh - dp/\rho$. Поскольку $dh = h_p dp + h_T dT$, то при $ds = 0$ можно получить, что

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1 - \rho h_p}{\rho h_T}$$

Теплоемкость при постоянном давлении вычисляется при помощи численного дифференцирования (центрально-разностная дискретизация второго порядка)

$$c_p(p, T) = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{h(p, T + \Delta T) - h(p, T - \Delta T)}{2\Delta T},$$

где $\Delta T = 0,01T$.

Убывание энтропии в решении гиперболических уравнений исключается введением искусственной вязкости по Нейману, применением метода Годунова с точным или приближенным решением задачи Римана.

Для расчетов гиперзвукового течения высокотемпературного воздуха около сферы применяются графические процессоры общего назначения. Для проведения расчетов модельных задач гиперзвукового течения газа используются ресурсы гибридной вычислительной системы, состоящей из 5 вычислительных узлов на базе центральных процессоров IBM POWER8 и сопроцессоров NVIDIA Tesla P100. Решение задачи на вычислительных системах с традиционной архитектурой представляется оправданным лишь при необходимости использования более подробных расчетных сеток и моделей, не помещающихся в память графического сопроцессора. Организация расчетов таких больших задач на гибридных архитектурах требует дальнейшего совершенствования, применяемого для этого программного обеспечения.

Преобразование переменных

Течение газа описывается уравнениями Эйлера и в двумерном случае определяется четырьмя независимыми переменными

$$\mathbf{U} = \{\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho e\},$$

где ρ — плотность; $\rho u_x, \rho u_y$ — проекции импульса на оси x и y ; $\rho e = \rho[\varepsilon + (u_x^2 + u_y^2)/2]$ — полная энергия.

Кроме набора консервативных переменных, используются другие наборы переменных. В качестве такого набора выступают физические переменные

$$\mathbf{Q} = \{\rho, u_x, u_y, p\},$$

где u_x, u_y — проекции скорости на оси x, y ; p — давление.

Физические переменные допускают выражение через консервативные и наоборот. В то время как прямое преобразование операций не составляет большого труда, обратный переход требует решения системы уравнений.

Исходная система уравнений состоит из выражения для полной энергии и уравнения состояния

$$\begin{cases} \rho e = \rho \varepsilon(p, T) + \rho \frac{v^2}{2} \\ p = \rho \frac{R_0}{M_\Sigma(p, T)} T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(p, T) = \frac{(\rho e)}{\rho} - \frac{v^2}{2} \\ \rho M_\Sigma(p, T) - \rho R_0 T = 0 \end{cases}$$

Неизвестными являются $p, T, \varepsilon = h - p/\rho$. Данная система уравнений — нелинейна. Для ее решения используется метод Ньютона, в котором значения переменных на новой итерации находятся из соотношений

$$p^{n+1} = p^n + \Delta p, \quad T^{n+1} = T^n + \Delta T,$$

где $\Delta p, \Delta T$ — приращения неизвестных функций. Индекс n обозначает номер итерации.

Произведем линеаризацию системы, разложив функции ε и M_Σ в ряд Тейлора, оставив только члены первого порядка

$$\varepsilon^{n+1}(p, T) = \varepsilon^n + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \Delta T;$$

$$M_\Sigma^{n+1}(p, T) = M_\Sigma^n + \frac{\partial M_\Sigma^n}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial M_\Sigma^n}{\partial T} \Delta T.$$

Подставляя выражения для давления и температуры в систему уравнений и отбрасывая члены второго порядка и выше, получим

$$\frac{\partial \varepsilon^n}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial T} \Delta T = \frac{(\rho e)}{\rho} - \frac{v^2}{2} - \varepsilon^n;$$

$$\left(M_\Sigma^n + p^n \frac{\partial M_\Sigma^n}{\partial p} \right) \Delta p + \left(p^n \frac{\partial M_\Sigma^n}{\partial T} - \rho R_0 \right) \Delta T = \rho R_0 T^n - p^n M_\Sigma^n.$$

Решая систему линейных уравнений, получим приращения искомых функций Δp и ΔT . Итерационный процесс заканчивается, когда приращения Δp и ΔT удовлетворяют заданному условию точности. В качестве начального приближения берется решение с предыдущей итерации.

Производные от функций ε и M_Σ вычисляются при помощи центральных разностных формул 2-го порядка точности

$$\frac{\partial \varepsilon^n}{\partial p} = \frac{\varepsilon(p^n + \delta_p, T^n) - \varepsilon(p^n - \delta_p, T^n)}{2\delta_p};$$

$$\frac{\partial \varepsilon^n}{\partial T} = \frac{\varepsilon(p^n, T^n + \delta_T) - \varepsilon(p^n, T^n - \delta_T)}{2\delta_T};$$

$$\frac{\partial M_\Sigma^n}{\partial p} = \frac{M_\Sigma(p^n + \delta_p, T^n) - M_\Sigma(p^n - \delta_p, T^n)}{2\delta_p};$$

$$\frac{\partial M_\Sigma^n}{\partial T} = \frac{M_\Sigma(p^n, T^n + \delta_T) - M_\Sigma(p^n, T^n - \delta_T)}{2\delta_T}.$$

Здесь $\delta_p = k_p p^n$, $\delta_T = k_T T^n$. Коэффициенты k_p и k_T выбираются из интервала 0,005–0,01.

Результаты расчетов

Возможности разработанных средств численного моделирования показаны на примере решения ряда задач сверхзвуковой газовой динамики, имеющих точные или эталонные численные решения. Результаты расчетов, полученные в рамках модели совершенного и высокотемпературного воздуха, сравниваются между собой и с данными исследований.

Обтекание прямого уступа. Для проверки работы разработанных алгоритмов, выполнен расчет течения газа в плоском канале с прямоугольным выступом. Геометрия расчетной области показана на рис. 1. Расчетная область представляет собой канал с внезапным сужением. Длина канала равняется $L = 3$, а высота канала во входном сечении составляет $h = 1$ (размеры канала даются в относительных единицах). Ступенька высотой $h_s = 0,2$ располагается на расстоянии $x_s = 0,6$ от левой границы расчетной области и продолжается до правой границы.

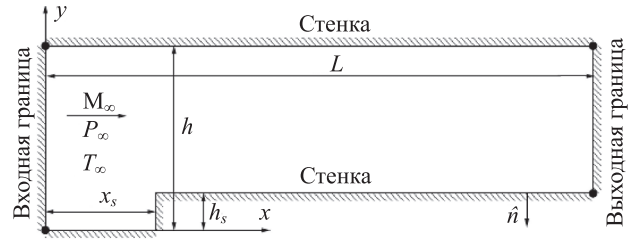


Рис. 1. Геометрия расчетной области ($M_\infty, P_\infty, T_\infty$ — число Маха, давление и температура в невозмущенном потоке, n — нормаль)

Fig. 1. Geometry of computational domain

Слева в канал втекает газ со сверхзвуковой скоростью. Перед ступенькой образуется отошедший скачок уплотнения, который нерегулярно отражается от верхней стенки канала с образованием тройной конфигурации ударных волн. Эта тестовая задача позволяет провести анализ схем расчета конвективных потоков для течений со скачками уплотнения и течениями разрежения Прандтля–Майера. Такая геометрия соответствует тестовой задаче, описанной в работе [14]. В данной работе входные газодинамические параметры изменяются таким образом, чтобы они соответствовали параметрам в атмосфере на высоте 30–40 км. Такие течения в плоских каналах могут встречаться в двигательных установках, работающих при полете на данной высоте.

Расчеты выполнены для идеального совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей $\gamma = 1,4$ и модели Крайко для высокотемпературного воздуха. На входной границе канала задано число Маха ($M = 3,5$), статическое давление газа на входе задается равным $p = 287$ Па, статическая температура $T = 250$ К). На выходной границе применены условия свободного вытекания (течение в выходном сечении канала является сверхзвуковым, поэтому граничные условия на выходе не оказывают влияния на структуру течения внутри расчетной области). На нижней и верхней границах канала использованы граничные условия зеркального отражения. Считается, что в начальный момент времени газ в канале находится в состоянии покоя.

При низких давлениях потока и интенсивных скачках уплотнения в численных схемах могут появляться области нефизичного решения [15]. Для подавления таких эффектов в схему вводится искусственная вязкость.

Расчеты проведены на сетке, содержащей 10 000 узлов. В качестве критерия сходимости разностного решения к предельному стационарному решению задачи использован минимальный уровень невязки. Для достижения заданного уровня невязки (в расчетах $R = 10^{-10}$) сделано приблизительно 2200 шагов по времени. Рассмотрены варианты расчета со схемами Рое и Русанова как без учета вязкости, так и с учетом вязких эффектов. Критериями точности численного решения стали: пространственное расположение тройной точки (точки пересечения верхнего диска Маха с головной ударной волной); длина верхнего диска Маха; структура взаимодействия ударных волн с верхними стенками ступеньки и канала. Для совершенного газа в качестве эталонного принято решение, приведенное в работе [14].

При натекании сверхзвукового потока на ступеньку появляется ударная волна, которая последовательно отражается от ступеньки и от стенок канала. После отражения от ступеньки образуется ударная волна в виде колокола, которая при взаимодействии с верхней стенкой приводит к появлению диска Маха и контактного разрыва, в котором развивается неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Методы расчета оценены исходя из качества разрешения этих структур. К нефизическим особенностям течения относятся слабая волна разрежения, появляющаяся при взаимодействии веера волн разрежения, исходящего из угла ступеньки, с ее верхней стенкой, а также развитие неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца, распространяющейся из тройной точки вдоль верхней стенки канала. Основная причина возникновения и развития неустойчивости состоит в малых осцилляциях энтропии, генерируемых численными схемами в тройной точке (численный пограничный слой).

Расчеты, выполненные в работах [16, 17] при помощи пакета Ansys Fluent, показали, что результат расчетов характеризуется существенной немонотонностью численного решения и искажением топологии течения. Длина диска Маха завышается на 24 %, тройная точка смещается на 8 % влево в продольном направлении. Точки взаимодействия косых ударных волн с верхними стенками ступеньки и канала смещаются на 8 % и 6 %

по сравнению с данными работы [14]. Во избежание проблем, связанных с наличием сингулярной точки, угловая точка заменяется дугой окружности с безразмерным радиусом 0,01.

Поля модуля скорости и температуры при расчете по схеме Рое при нулевой вязкости ($\mu = 0$) приведены на рис. 2, *a, b*. Поле течения характеризуется наличием нефизических флуктуаций газодинамических функций, а само течение неустойчиво.

Поля модуля скорости и температуры при расчете схемой Рое с ненулевой вязкостью газа ($\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Па·с), соответствующей вязкости воздуха при нормальном давлении и температуре, приведены на рис. 2, *c, d*. В данном случае течение стабильно, хотя результаты расчетов свидетельствуют о наличии слабых флуктуаций газодинамических параметров, которые особенно хорошо заметны вблизи верхней границы ступеньки.

При увеличении вязкости в 1000 раз до $\mu = 1,8 \cdot 10^{-3}$ Па·с распределения характеристик потока более плавные, а флуктуации газодинамических параметров наблюдаются только за прямым скачком уплотнения (рис. 2, *e, f*).

Схема Русанова является более диссипативной по сравнению со схемой Рое, но она позволяет получить решение задачи при низких давлениях без дополнительного увеличения вязкости до нефизических значений.

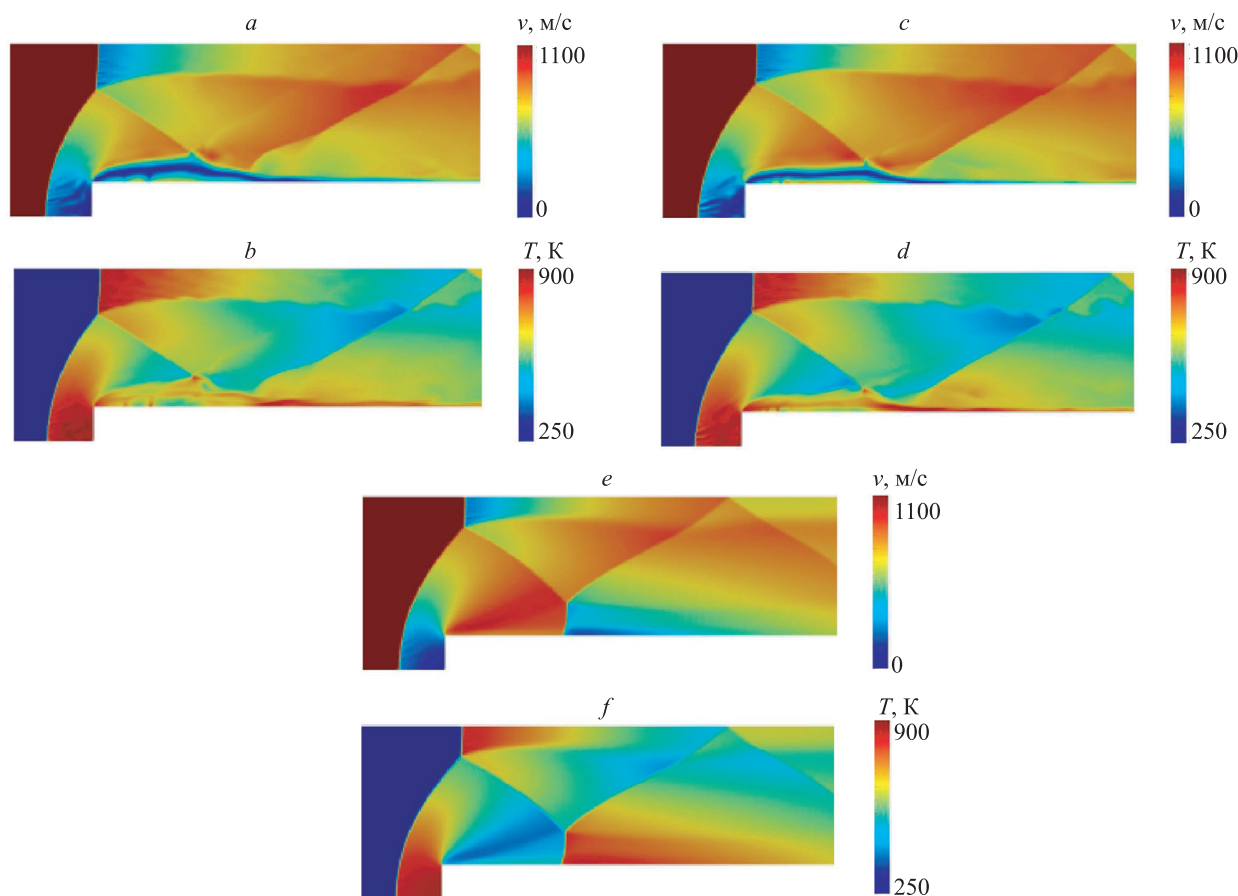


Рис. 2. Поля модуля скорости (v) и температуры (T), рассчитанные с помощью схемы Рое при: $\mu = 0$ (*a, b*); $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Па·с (*c, d*); $\mu = 1,8 \cdot 10^{-3}$ Па·с (*e, f*)

Fig. 2. Contours of absolute value of velocity (a) and temperature (b) computed with the Roe scheme at $\mu = 0$

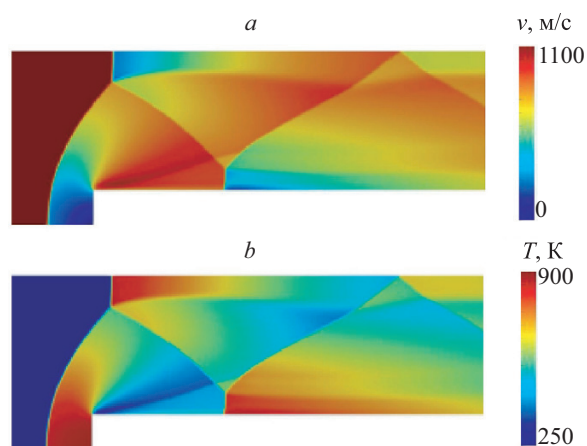


Рис. 3. Поля модуля скорости (а) и температуры (б), рассчитанные при помощи схемы Русанова при $\mu = 0$

Fig. 3. Contours of absolute value of velocity (а) and temperature (б) computed with the Rusanov scheme at $\mu = 0$

Нефизические флуктуации скорости и температуры отсутствуют, а численное решение является монотонным (рис. 3). Слабая немонотонность численного решения имеет место лишь на грубой сетке в области между ступенькой и фронтом отраженной ударной волны. При этом среднее расхождение между численным решением и эталонным решением [14] не превосходит 3 %. Особенности потока типа пограничного слоя или численного шума, наблюдаемые в работах [18, 19] на верхней поверхности ступеньки, отсутствуют.

Полученные результаты показывают, что схема Русанова является подходящей для расчетов течений при низком статическом давлении газа, хотя и диссипативна. При умеренных скоростях потока области течения с высокими температурами воздуха отсутствуют. Примененной модели совершенного газа и термодинамической модели воздуха Крайко [4] приводит практически к идентичным результатам.

Обтекание сферы. Верификация метода расчета течения высокотемпературного воздуха произведена с помощью задачи гиперзвукового обтекания сферы и определения расстояния от поверхности сферы до головного скачка уплотнения. Данная задача экспериментально исследована в работах [20–22], а реализация модели Крайко при помощи графических процессоров общего назначения численно тестировалась в работах [23, 24]. В расчетах выполнено сравнение схем Рое и AUSM для дискретизации конвективных потоков, реализованных в пакете Ansys Fluent. Для повышения порядка аппроксимации схемы по пространству использована интерполяция значений на грань из центров ячеек. Градиент в центрах ячеек вычислен с помощью метода наименьших квадратов. Для обеспечения монотонности схемы применены ограничители градиентов.

Рассмотрим обтекание сферы диаметром $D = 12,7$ мм гиперзвуковым потоком воздуха с учетом равновесных химических реакций. Выбранные параметры потока соответствуют значениям в эксперименте по определению отхода головной ударной волны от сферы при ее обтекании воздухом [21]. Давление невозмущенного потока примем равным $p_\infty = 666,61$ Па, а темпе-

ратура $-T_\infty = 293$ К (при этих условиях плотность составляет $\rho_\infty = 7,9 \cdot 10^{-3}$ кг/м³). Число Маха варьируется в диапазоне $M_\infty = 7,10-17,77$, что соответствует скорости полета $V_\infty = 2438,4-6705,6$ м/с.

Схема расчетной области приведена на рис. 4. Внешняя граница расчетной области удалена от сферы на 4 мм в точке торможения и на 8,65 мм в верхней точке. Задача решается в осесимметричной постановке. На входной границе заданы граничные условия сверхзвукового втекания в расчетную область, а на выходной границе – условия сверхзвукового вытекания. На стенке использованы граничные условия прилипания, но для упрощения постановки выходного граничного условия в конце сферы небольшой участок стенки задан как невязкая стенка с проскальзыванием. Поверхность сферы принята теплоизолированной. Расчетная сетка состоит из 160 000 гексагональных ячеек.

При повышении числа Маха наблюдается эффект гиперзвуковой стабилизации течения. В частности, начиная с числа Маха равного 6, распределение давления по поверхности сферы оказывается практически универсальным. Дальнейшее увеличение числа Маха, набегавшего на сферу потока, не приводит к изменению давления по поверхности сферы.

Для методологического исследования разработанного метода расчета выполнено моделирование обтекания сферы при фиксированном числе Маха ($M_\infty = 12$). Результаты расчетов, полученные при помощи схемы AUSM в невязкой постановке, показаны на рис. 5. Полученные результаты демонстрируют, что за скачком уплотнения присутствуют аномалии и неустойчивость течения (рис. 5, а), а в поле давления — сильные неустойчивости (рис. 5, б). Существенные неравномерности наблюдаются также в распределении давления по поверхности сферы (рис. 5, с). Подробно перечисленные эффекты изучены, например, в работе [15], и связаны с неустойчивостью численной схемы при расчете задач с высокой скоростью и малым давлением.

Распределение плотности при помощи схемы Рое приведено на рис. 6 и показывает, что имеет место не-

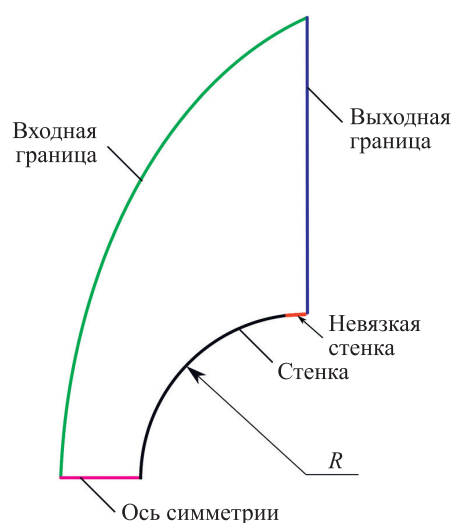


Рис. 4. Схема расчетной области (R — радиус сферы)
Fig. 4. Scheme of computational domain (R is sphere radius)

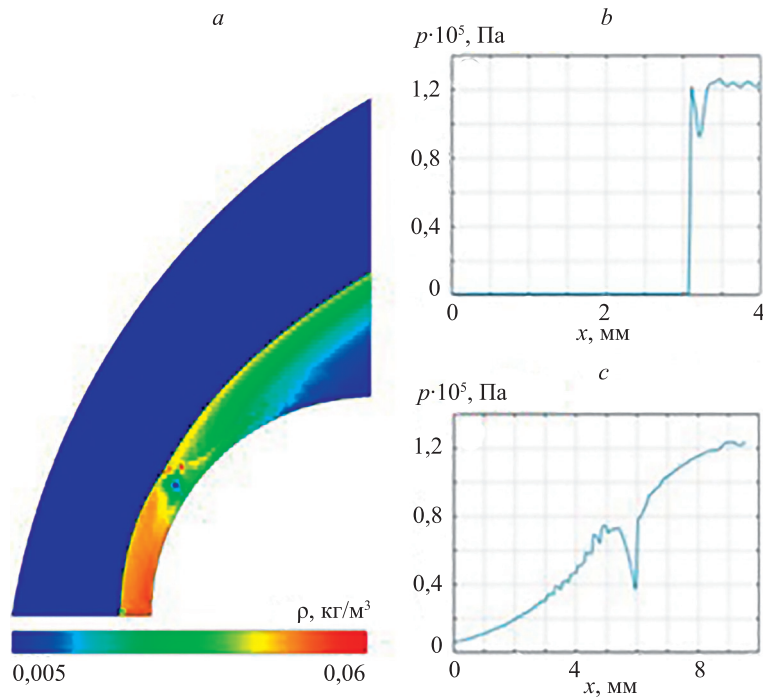


Рис. 5. Поле плотности (а), распределение давления вдоль оси симметрии (b) и распределение давления вдоль поверхности сферы (с), полученные при помощи схемы AUSM в невязкой постановке (x — продольная координата)

Fig. 5. Contours of density (a), distribution of pressure along centreline (b) and distribution of pressure along sphere surface (c) computed with the AUSM scheme using inviscid formulation (x — Cartesian coordinate)

физическая форма головного скачка уплотнения. Схема Рое оказывается неработоспособной при высоких скоростях и низких давлениях. Устойчивое решение удастся получить только с очень малым числом Куранта порядка 0,01, что приводит к существенным затратам процессорного времени.



Рис. 6. Поле плотности, полученное при помощи схемы Рое в невязкой постановке

Fig. 6. Contours of density computed with the Roe scheme in inviscid formulation

Включение в конечно-разностную схему расчета вязкости в ламинарной постановке добавляет устойчивости. Проблема осложняется тем, что расчетная область выбрана таким образом, что на выходной границе вблизи сферы в случае вязкого течения в пограничном слое реализуется как дозвуковое, так и сверхзвуковое течение. Это затрудняет корректную постановку граничного условия на выходной границе. В связи с этим на части или всей поверхности сферы задано граничное условие с проскальзыванием. При этом на выходе поток вблизи сферы разгоняется до сверхзвуковых скоростей, что позволяет использовать граничное условие сверхзвукового вытекания на выходной границе. Для уменьшения области влияния граничных условий проскальзывания оно задается только на малой части поверхности сферы, которая находится вблизи выходной границы. С математической точки зрения такой подход соответствует условию симметрии. На остальной части поверхности сферы задается граничное условие прилипания для тангенциальной компоненты скорости и условие теплоизолированности для температуры.

Поля характеристик потока при расчете схемами Рое и AUSM приведены на рис. 7, где представлена только часть расчетной области. Полученные результаты показали наличие слабых нефизических искривлений головного скачка уплотнения при использовании схемы Рое (рис. 7, а). Для схемы AUSM данные искривления отсутствуют, но вблизи оси симметрии присутствуют вихревые структуры (рис. 7, б).

Учет вязкости подавляет нефизические возмущения численного решения. При повышении температуры воздуха его вязкость увеличивается, что рассчитыва-

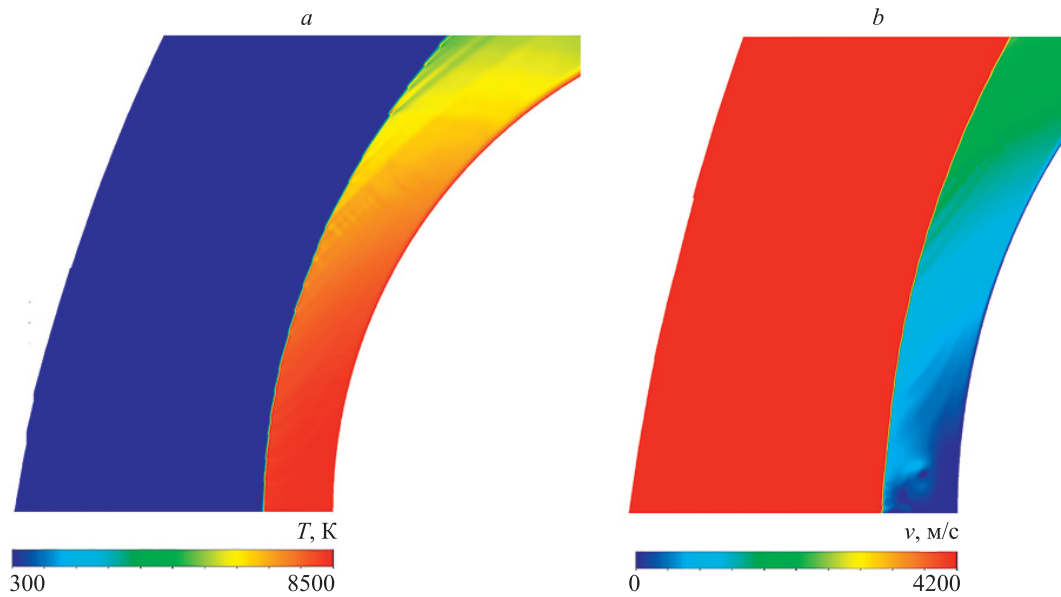


Рис. 7. Поле температуры, полученное при помощи схемы Roe (a), и поле модуля скорости, полученное при помощи схемы AUSM (b) в вязкой постановке

Fig. 7. Contours of temperature (a) computed with the Roe scheme using viscous formulation and contours of absolute value of velocity computed with the AUSM scheme in viscous formulation (b)

ется при помощи формулы Сазерленда (зависимость применяется для учета зависимости теплопроводности воздуха от температуры). Учет изменения вязкости при изменении температуры уменьшает нефизичные осцилляции решения. Результаты расчетов, полученные в ламинарной постановке с учетом зависимости вязкости и теплопроводности воздуха от температуры, приведены на рис. 8 для схем Roe и AUSM. Результаты расчетов, полученные при помощи схемы Roe (рис. 8, a), показывают, что форма скачка уплотнения не имеет аномалий, но за ним существуют неравномерности поля модуля скорости. Применение схемы AUSM (рис. 8, b) приводит к тому, что вблизи оси симметрии отсутствуют

вихри, но за скачком уплотнения имеют место неравномерности скорости.

Для учета эффектов турбулентности применяются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, замкнутые при помощи модели турбулентности Спаларта–Аллмареса. Результаты расчетов, полученные в турбулентной постановке, приведены на рис. 9 для схем Roe и AUSM. Скачок уплотнения, рассчитанный при помощи схемы Roe, не имеет аномалий, а неравномерности поля скорости отсутствуют (рис. 9, a). При этом схема AUSM приводит к результатам, характеризующимся гладкой формой головного скачка уплотнения (рис. 9, b).

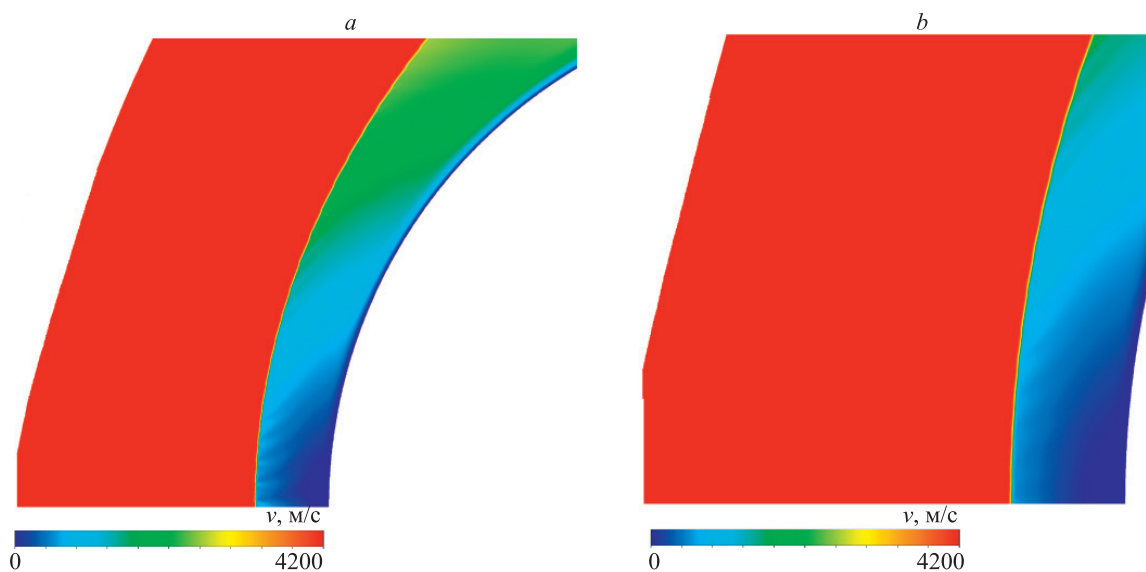


Рис. 8. Поля модуля скорости, полученные при помощи схем Roe (a) и AUSM (b) с учетом переменной вязкости

Fig. 8. Contours of absolute value of velocity computed with the Roe scheme (a) and AUSM scheme (b) in viscous formulation with variable viscosity

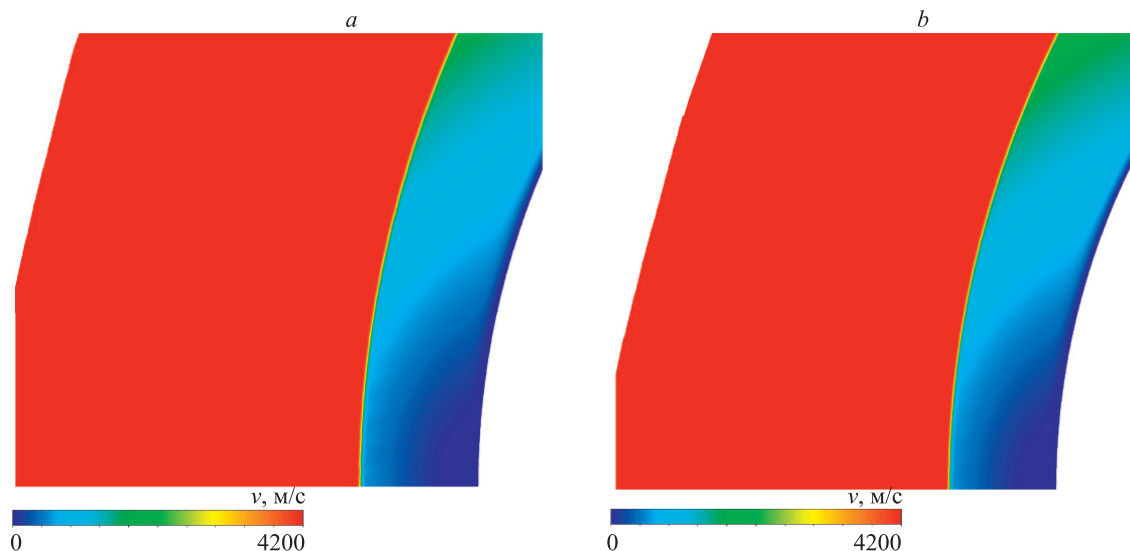


Рис. 9. Поля модуля скорости, полученные при помощи схем Рое (a) и AUSM (b) с учетом эффектов турбулентности
 Fig. 9. Contours of absolute value of velocity computed with the Roe scheme (a) and AUSM scheme (b) in turbulent formulation

Распределение давления вдоль оси симметрии, приведенное на рис. 10, a, показывает, что осцилляции численного решения вблизи скачка уплотнения, отсутствуют. При этом решения, рассчитанные в рамках схем Рое и AUSM, практически совпадают (линии неразличимы, в связи с чем приводится решение, полученное на основе схемы AUSM).

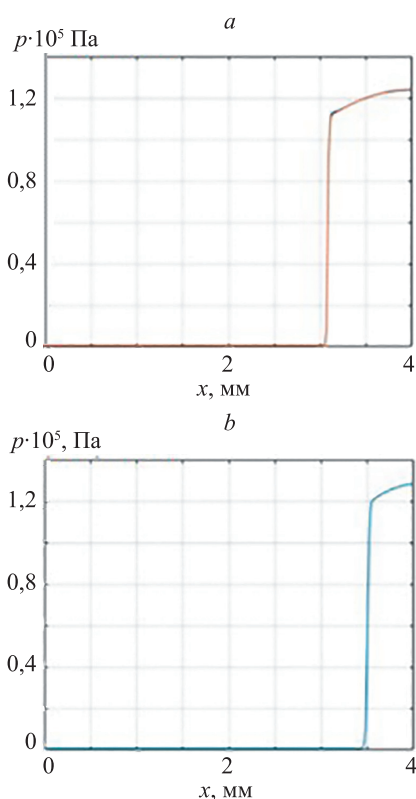


Рис. 10. Распределение давления вдоль оси симметрии, полученное при расчете схемой AUSM с учетом турбулентности (a) и равновесных химических реакций (b)
 Fig. 10. Distribution of pressure along centreline computed with the AUSM scheme in turbulent formulation

Распределение давления вдоль оси симметрии, приведенное на рис. 10, b, показывает, что положение скачка уплотнения отличается от того, которое получается в рамках модели совершенного газа (рис. 10, a).

Результаты расчетов в рамках модели высокотемпературного воздуха, полученные при помощи схемы AUSM, показывает рис. 11. Температура воздуха в данном случае существенно меньше, чем в случае модели совершенного газа, поэтому расстояние от поверхности сферы до скачка уплотнения (толщина ударного слоя) уменьшается.



Рис. 11. Поле температуры, полученное с учетом равновесных химических реакций в высокотемпературном воздухе при помощи схемы AUSM

Fig. 11. Contours of temperature computed with equilibrium chemical reactions in high-temperature air with the AUSM scheme

Для совершенного газа относительная толщина ударного слоя Δ находится из соотношения [25]

$$\frac{\Delta}{D} = K\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M_\infty^2} \right),$$

где D — диаметр сферы.

Параметр ε представляет собой отношение плотностей в невозмущенном потоке и в ударном слое ($\varepsilon = \rho_\infty/\rho_s$, где ρ_∞ и ρ_s — плотности в невозмущенном потоке и в ударном слое), а коэффициент пропорциональности равен $K = 0,39-0,41$. Для сравнения с данными физического эксперимента выполнена серия расчетов при различных числах Маха набегающего на сферу потока.

Зависимость безразмерной толщины ударного слоя от числа Маха показана на рис. 12. Линия 1 соответствует зависимости безразмерного расстояния до ударной волны от числа Маха при использовании предположения о полностью равновесных химических реакциях (модель Крайко). Линия 2 соответствует результатам расчета при использовании модели нереагирующего совершенного газа с постоянным показателем адиабаты

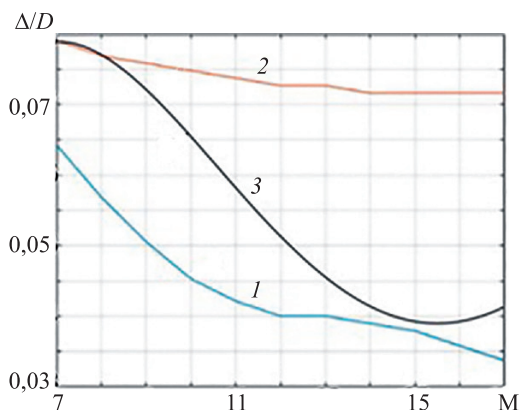


Рис. 12. Зависимость безразмерной толщины ударного слоя от числа Маха

Fig. 12. Dependence of shock layer thickness on Mach number

ты ($\gamma = 1,4$). Линия 3 показывает интерполированные экспериментальные данные из работы [21]. Для низких скоростей поток можно считать замороженным, а различия данных физического и вычислительного эксперимента связаны с неравновесными эффектами в газе [21]. При $M_\infty = 14$ кривая равновесного расчета (линия 1) наиболее близко подходит к экспериментальным данным (линия 3) и приближается к ним при более высоких числах Маха набегающего потока.

Заключение

Проведено численное моделирование сверхзвукового течения в ступенчатом канале и сверхзвукового обтекания сферы при различных числах Маха в условиях, соответствующих полету в атмосфере на большой высоте.

Полученная в канале со ступенькой ударно-волновая структура потока согласуется с имеющимися численными решениями. При этом фронт ударной волны, отраженной от ступеньки, распределяется на 2–3 ячейки сетки. Результаты численного моделирования демонстрируют отсутствие нефизических осцилляций решения, характерных для схем низкого порядка.

Расчеты обтекания сферы гиперзвуковым потоком невязкого воздуха показывают, что схема Рое приводит к существенным погрешностям численного решения, которое удается получить только при низких числах Куранта. Наилучшие показатели точности демонстрирует схема Русанова.

Метод расчета сверхзвуковых течений высокотемпературного воздуха реализован как в собственном программном коде, так и интегрирован в коммерческий программный комплекс Ansys Fluent с помощью пользовательского интерфейса программирования. Расширены возможности стандартной версии коммерческого пакета, что позволяет использовать пакет Ansys Fluent для моделирования сверх- и гиперзвуковых течений воздуха с учетом высокотемпературных эффектов.

Литература

1. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Карпенко А.Г., Тетерина И.В. Ускорение газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2013. 536 с.
2. Липанов А.М., Карсканов С.А. Применение схем высокого порядка аппроксимации при моделировании процессов торможения сверхзвуковых течений в прямоугольных каналах // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 3. С. 292–299.
3. Забарко Д.А., Котенев В.П. Численное исследование ламинарных течений вязкого химически реагирующего газа около затупленных тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 1. С. 77–95.
4. Крайко А.Н., Макаров В.Е. Явные аналитические формулы, определяющие равновесный состав и термодинамические функции воздуха для температур от 200 до 20000 К // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34. № 2. С. 208–219.
5. Волков К.Н., Добров Ю.В., Карпенко А.Г., Мальковский С.И., Сорокин А.А. Моделирование газовой динамики гиперзвуковых летательных аппаратов с использованием модели высокотемпературного воздуха и графических процессоров // Вычислитель-

References

1. Volkov K.N., Deriugin Iu.N., Emelianov V.N., Kozelkov A.S., Karpenko A.G., Teterina I.V. *Acceleration of Gasdynamic Calculations on Unstructured Grids*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013, 536 p. (in Russian)
2. Lipanov A.M., Karskanov S.A. Application of high-order schemes for modeling the process of braking of supersonic flows in rectangular channels. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 292–299. (in Russian)
3. Zabarko D.A., Kotenev V.P. Numerical study of laminar flows of viscous chemically-reactive gas near blunt bodies. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2006, no. 1, pp. 77–95. (in Russian)
4. Kraiko A.N., Makarov V.E. Explicit analytic formulas defining the equilibrium composition and thermodynamic functions of air for temperatures from 200 to 20000 K. *High Temperature*, 1996, vol. 34, no. 2, pp. 202–213.
5. Volkov K.N., Dobrov Yu.V., Karpenko A.G., Malkovsky S.I., Sorokin A.A. Simulation of gas dynamics of hypersonic aircrafts with the use of model of high-temperature air and graphics processor units. *Numerical Methods and Programming*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 29–46. (in Russian). <https://doi.org/10.26089/NumMet.v22r103>

- ные методы и программирование. 2021. Т. 22. № 1. С. 29–46. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v22r103>
6. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 607 с.
 7. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 1981, vol. 43, no. 2, pp. 357–372. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5)
 8. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1. № 2. С. 267–279.
 9. Liou M.-S. A sequel to AUSM. Part II. AUSM+–up for all speeds // *Journal of Computational Physics*. 2006. V. 214. N 1. P. 137–170. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.09.020>
 10. Булат П.В., Волков К.Н. Решение тестовых задач нестационарной одномерной газовой динамики при помощи WENO-схем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 1. С. 174–180. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2016-16-1-174-180>
 11. Булат М.П., Волобуев И.А., Волков К.Н., Пронин В.А. Численное моделирование регулярного и махового отражения ударной волны от стенки // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 5. С. 920–928. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2017-17-5-920-928>
 12. Дерюгин Ю.Н., Жучков Р.Н., Зеленский Д.К., Козелков А.С., Саразов А.В., Кудимов Н.Ф., Лишницкий Ю.М., Панасенко А.В., Сафронов А.В. Результаты валидации многофункционального пакета программ LOGOS при решении задач аэрогазодинамики старта и полета ракет-носителей // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 9. С. 83–95.
 13. Козелков А.С., Курулин В.В., Лашкин С.В., Шагалиев Р.М., Ялозо А.В. Исследование потенциала суперкомпьютеров для масштабируемого численного моделирования задач гидродинамики в промышленных приложениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 8. С. 1524–1535. <https://doi.org/10.7868/S004446691608010X>
 14. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *Journal of Computational Physics*. 1984. V. 54. N 1. P. 115–173. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90142-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90142-6)
 15. MacCormack R.W. Caruncle computational fluid dynamics problem for blunt-body flows // *Journal of Aerospace Information Systems*. 2013. V. 10. N 5. P. 229–239. <https://doi.org/10.2514/1.53684>
 16. Исаев С.А., Лысенко Д.А. Тестирование пакета Fluent при расчете сверхзвукового течения в ступенчатом канале // Инженерно-физический журнал. 2004. Т. 77. № 4. С. 164–167.
 17. Исаев С.А., Лысенко Д.А. Тестирование численных методов, конвективных схем, алгоритмов аппроксимации потоков и сеточных структур на примере сверхзвукового течения в ступенчатом канале с помощью пакетов CFX и Fluent // Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 82. № 2. С. 326–330.
 18. Berthon C. Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes // *Journal of Computational Physics*. 2006. V. 218. N 2. P. 495–509. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.02.028>
 19. Christov I., Popov B. New non-oscillatory central schemes on unstructured triangulations for hyperbolic systems of conservation laws // *Journal of Computational Physics*. 2008. V. 227. N 11. P. 5736–5757. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.02.007>
 20. Holt M., Hoffman G.H. Calculation of hypersonic flow past sphere and ellipsoids / American Rocket Society. 1961. No. 61-209-1903.
 21. Lobb R.K. Experimental measurement of shock detachment distance on spheres fired in air at hypervelocities // *AGARDograph*. 1964. V. 68. P. 519–527. <https://doi.org/10.1016/B978-1-4831-9828-6.50031-X>
 22. Жлуктов С.В., Смехов Г.Д., Тирский Г.А. Вращательно-колебательно-диссоциационное взаимодействие в многокомпонентном неравновесном вязком ударном слое // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 6. С. 166–180.
 23. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г. Численное моделирование газодинамических и физико-химических процессов при обтекании тел гиперзвуковым потоком // Вычислительные методы и программирование. 2017. Т. 18. № 4. С. 387–405. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v18r433>
 24. Emelyanov V.N., Karpenko A.G., Volkov K.N. Simulation of hypersonic flows with equilibrium chemical reactions on graphics processor units // *Acta Astronautica*. 2019. V. 163. Part A. P. 259–271. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.01.010>
 6. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Iu. *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 607 p. (in Russian)
 7. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 1981, vol. 43, no. 2, pp. 357–372. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5)
 8. Rusanov V.V. The calculation of the interaction of non-stationary shock waves and obstacles. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1961, vol. 1, no. 2, pp. 304–320. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(62\)90062-9](https://doi.org/10.1016/0041-5553(62)90062-9)
 9. Liou M.-S. A sequel to AUSM. Part II. AUSM+–up for all speeds. *Journal of Computational Physics*, 2006, vol. 214, no. 1, pp. 137–170. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.09.020>
 10. Bulat P.V., Volkov K.N. WENO schemes for solution of unsteady one-dimensional gas dynamics test problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 174–180. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2016-16-1-174-180>
 11. Bulat M.P., Volobuev I.A., Volkov K.N., Pronin V.A. Numerical simulation of regular and mach reflection of shock wave from the wall. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 5, pp. 920–928. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2017-17-5-920-928>
 12. Deryugin Yu.N., Zhuchkov R.N., Zelenskiy D.K., Kozelkov A.S., Sarazov A.V., Kudimov N.F., Lipnickiy Yu.M., Panasenko A.V., Safronov A.V. Validation results for the LOGOS multifunction software package in solving problems of aerodynamics and gas dynamics for the lift-off and injection of launch vehicles. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 144–153. <https://doi.org/10.1134/S2070048215020052>
 13. Kozelkov A.S., Kurulin V.V., Lashkin S.V., Shagaliev R.M., Yalozo A.V. Investigation of supercomputer capabilities for the scalable numerical simulation of computational fluid dynamics problems in industrial applications. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 8, pp. 1506–1516. <https://doi.org/10.1134/S0965542516080091>
 14. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 1984, vol. 54, no. 1, pp. 115–173. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90142-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90142-6)
 15. MacCormack R.W. Caruncle computational fluid dynamics problem for blunt-body flows. *Journal of Aerospace Information Systems*, 2013, vol. 10, no. 5, pp. 229–239. <https://doi.org/10.2514/1.53684>
 16. Isaev S.A., Lysenko D.A. Testing of the Fluent package in calculation of supersonic flow in a step channel. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2004, vol. 77, no. 4, pp. 857–860. <https://doi.org/10.1023/B:JOEP.0000045174.69463.6f>
 17. Isaev S.A., Lysenko D.A. Testing of numerical methods, convective schemes, algorithms for approximation of flows, and grid structures by the example of a supersonic flow in a step-shaped channel with the use of the CFX and Fluent packages. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2009, vol. 82, no. 2, pp. 321–326. <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0187-8>
 18. Berthon C. Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 2006, vol. 218, no. 2, pp. 495–509. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.02.028>
 19. Christov I., Popov B. New non-oscillatory central schemes on unstructured triangulations for hyperbolic systems of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 2008, vol. 227, no. 11, pp. 5736–5757. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.02.007>
 20. Holt M., Hoffman G.H. *Calculation of hypersonic flow past sphere and ellipsoids*. American Rocket Society, 1961, No. 61-209-1903.
 21. Lobb R.K. Experimental measurement of shock detachment distance on spheres fired in air at hypervelocities. *AGARDograph*, 1964, vol. 68, pp. 519–527. <https://doi.org/10.1016/B978-1-4831-9828-6.50031-X>
 22. Zhlukov S.V., Smekhov G.D., Tirskey G.A. Rotation-vibration-dissociation interaction in a multicomponent nonequilibrium viscous shock layer. *Fluid Dynamics*, 1994, vol. 29, no. 6, pp. 876–887. <https://doi.org/10.1007/BF02040799>
 23. Volkov K.N., Emelyanov V.N., Karpenko A.G. Numerical simulation of gas dynamic and physical-chemical processes in hypersonic flows past bodies. *Numerical Methods and Programming*, 2017, vol. 18, no. 4, pp. 387–405. (in Russian). <https://doi.org/10.26089/NumMet.v18r433>
 24. Emelyanov V.N., Karpenko A.G., Volkov K.N. Simulation of hypersonic flows with equilibrium chemical reactions on graphics

25. Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, 1996. 376 с.

processor units. *Acta Astronautica*, 2019, vol. 163, part A, pp. 259–271. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.01.010>

25. Golovachev Yu.P. *Numerical Simulation of Viscous Gas Flows in Shock Layers*. Moscow, Nauka Publ., 1996, 376 p. (in Russian)

Авторы

Волков Константин Николаевич — доктор физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, [sc 8663950000](https://orcid.org/0000-0001-6055-2323), [http://orcid.org/0000-0001-6055-2323](mailto:k.volkov@kingston.ac.uk), k.volkov@kingston.ac.uk

Добров Юрий Владимирович — инженер-исследователь, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, [sc 57202111836](https://orcid.org/0000-0002-2552-1879), <http://orcid.org/0000-0002-2552-1879>, youdobrov@gmail.com

Карпенко Антон Геннадьевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, [sc 56305753900](https://orcid.org/0000-0002-1250-9766), <http://orcid.org/0000-0002-1250-9766>, aspera.2003.ru@mail.ru

Яковчук Михаил Сергеевич — кандидат технических наук, научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, [sc 57039066300](https://orcid.org/0000-0002-9770-0841), <http://orcid.org/0000-0002-9770-0841>, mihailyakovchuk@gmail.com

Authors

Konstantin N. Volkov — D.Sc., Associate Professor, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, [sc 8663950000](https://orcid.org/0000-0001-6055-2323), <http://orcid.org/0000-0001-6055-2323>, k.volkov@kingston.ac.uk

Yuriy V. Dobrov — Research Engineer, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, [sc 57202111836](https://orcid.org/0000-0002-2552-1879), <http://orcid.org/0000-0002-2552-1879>, youdobrov@gmail.com

Anton G. Karpenko — PhD, Associate Professor, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, [sc 56305753900](https://orcid.org/0000-0002-1250-9766), <http://orcid.org/0000-0002-1250-9766>, aspera.2003.ru@mail.ru

Mikhail S. Yakovchuk — PhD, Researcher, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, [sc 57039066300](https://orcid.org/0000-0002-9770-0841), <http://orcid.org/0000-0002-9770-0841>, mihailyakovchuk@gmail.com

Статья поступила в редакцию 10.04.2021

Одобрена после рецензирования 05.05.2021

Принята к печати 20.07.2021

Received 10.04.2021

Approved after reviewing 05.05.2021

Accepted 20.07.2021



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»