

doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-5-785-790

УДК 532.529

Сбалансированный алгоритм гибридного метода крупных частиц и его проверка на некоторых тестовых задачах

Дмитрий Викторович Садин

Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация
sadin@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847>

Аннотация

Предмет исследования. В серии численных экспериментов на тестовых задачах нелинейной акустики Шу–Ошера и взаимодействия двух сильных ударных волн Вурдворда–Колеллы изучены вычислительные свойства нового алгоритма гибридного метода крупных частиц. **Метод.** Численный метод является двухшаговым по времени типа предиктор–корректор. Пространственные производные расщепляются по физическим процессам. На первом этапе расщепления учитываются градиентные и деформационные члены законов сохранения, а на втором — конвективные потоки. Предложенный сбалансированный алгоритм метода включает более диссипативную противопоточную реконструкцию потоков на шаге «предиктор» и центрированную (бездиссипативную на гладких решениях) аппроксимацию на корректирующем шаге — CDP2-UC (Customizable Dissipative Properties — Upwind-Centered). Для более гибкого регулирования численной вязкости реализована нелинейная коррекция схемы, основанная на параметрической комбинации известных ограничителей. Численная схема обладает вторым порядком аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях. **Основные результаты.** Сбалансированный алгоритм гибридного метода крупных частиц продемонстрировал монотонное решение с качественным разрешением деталей течения газа во всей области определения тестовых задач. При сгущении сетки не отмечено паразитных осцилляций, и наблюдается сходимость к эталонному профилю плотности. Выполнен анализ влияния ограничителя на численную диссипацию схемы CDP2-UC. Произведено сравнение с вариантами схем MUSCL (Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws), MUSCL-CABARET с ограничителем NOLD (Non-Oscillatory Low-Dissipative), разрывным методом Галеркина с различными формами нелинейной коррекции, гибридной взвешенной нелинейной схемой четвертого порядка аппроксимации (CCSSR-HW4) и популярной схемой WENO5 (Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme) пятого порядка точности. Предложенный алгоритм успешно конкурирует с современными численными методами, которые имеют формально более высокий (четвертый и пятый) порядок аппроксимации. **Практическая значимость.** Гибридный метод крупных частиц обладает простотой, однородностью и экономичностью алгоритма, а также высокой разрешающей способностью. Тестовые расчеты позволили оценить диапазон параметрического регулирования численной диссипации метода для корректного численного моделирования прикладных задач с нелинейными волновыми полями и сильными ударными волнами.

Ключевые слова

гибридный метод крупных частиц, сбалансированный алгоритм, точность, сходимость, задача Шу–Ошера, задача Вурдворда–Колеллы

Ссылка для цитирования: Садин Д.В. Сбалансированный алгоритм гибридного метода крупных частиц и его проверка на некоторых тестовых задачах // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21, № 5. С. 785–790. doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-5-785-790

A balanced algorithm of the hybrid large-particle method and its verification on some test problems

Dmitry V. Sadin

Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation

sadin@yandex.ru[✉], <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847>

Abstract

In series of numerical experiments involving the Shu-Osher problem of nonlinear acoustics and the Woodward-Colella problem of two interacted blast waves, the author studied the computational properties of a new algorithm for the hybrid large-particle method. The numerical method is a two-step predictor-corrector type in time. Spatial derivatives are split by physical processes. At the first stage of splitting, the gradient and deformation terms of the conservation laws are taken into account, and at the second stage, convective flows are taken into account. The proposed balanced algorithm of the method includes a more dissipative upwind reconstruction of fluxes at the “predictor” step and a centered (non-dissipative on smooth solutions) approximation at the correction step: CDP2-UC (Customizable Dissipative Properties — Upwind-Centered). For a more flexible control of the numerical viscosity, a nonlinear correction of the scheme based on a parametric combination of known limiters is implemented. The numerical scheme has a second-order approximation in space and time on smooth solutions. The balanced algorithm of the hybrid large-particle method demonstrated a monotonic solution with a qualitative resolution of the details of the gas flow in the entire domain of determining the test problems. No spurious oscillations occurred during the process of refining the mesh, and convergence to the reference density profile was observed. The influence of a limiter on the numerical dissipation of the CDP2-UC scheme is analyzed. The results present the comparison with the following variants of the schemes: MUSCL (Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws), MUSCL-CABARET with a NOLD limiter (Non-Oscillatory Low-Dissipative), the discontinuous Galerkin method with various forms of nonlinear correction, the hybrid weighted nonlinear scheme of the fourth order of approximation (CCSSR-HW4) and the popular WENO5 scheme (Weighted Essentially Non-Oscillatory Scheme) with fifth order of accuracy. The proposed algorithm successfully competes with modern numerical methods that have a formally higher (fourth and fifth) order of approximation. The hybrid large-particle method has the simplicity, uniformity, and cost-effectiveness of the algorithm, as well as high resolution. The test calculations allowed the author to estimate the range of parametric control of the numerical dissipation of the method for correct numerical modeling of the applied problems with nonlinear wave fields and strong shock waves.

Keywords

hybrid large-particle method, balanced algorithm, accuracy, convergence, Shu–Osher problem, Woodward–Colella problem

For citation: Sadin D.V. A balanced algorithm of the hybrid large-particle method and its verification on some test problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, vol. 21, no. 5, pp. 785–790 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2021-21-5-785-790

Введение

К настоящему времени достигнуты значительные успехи в разработке и реализации численных моделей гидродинамики, основанные на точных и приближенных решениях задачи Римана [1, 2], разрывном методе Галеркина [3, 4], переменных шаблонах WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) [5, 6], гибридных алгоритмах [7, 8], схемах с уменьшением полной вариации решения TVD (Total Variation Diminishing) [9, 10], использовании адаптивной вязкости [11, 12] и других подходах. Вместе с тем до сих пор остаются открытыми ряд вычислительных проблем, связанных с немонотонностью численных решений, образованием энтропийных следов, развитием карбункул-неустойчивости, а также появлением артефактов, например фиктивного пограничного слоя и ложной ножки Маха.

Обратим внимание на трудности, связанные с численным решением тестовых задач нелинейной акустики Шу–Ошера и взаимодействия двух сильных ударных волн Вудворда–Колеллы. Несмотря на различный характер течения газа в указанных задачах при численном моделировании с использованием некоторых схем возникает общая проблема ухудшения и потери численной сходимости при измельчении сеток. В работе [10] изучены вычислительные свойства модификаций схем

MUSCL (Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws) и MUSCL-CABARET с ограничителем NOLD (Non-Oscillatory Low-Dissipative) в задаче «blast wave» [13]. Схемы демонстрируют хорошую относительную точность на грубых сетках. Вместе с тем с увеличением сеточного разрешения происходит существенное возрастание осцилляций решения, что является причиной снижения и остановки сходимости. Подобная численная проблема отмечается для разрывного метода Галеркина [4] в задаче взаимодействия ударной волны с энтропийным возмущением [14], где исследован вопрос сохранения порядка точности и обеспечения монотонности решения с использованием различных ограничителей. Авторами обнаружено, что с определенного момента измельчение сетки приводит к возникновению осцилляций. Для подавления колебаний численного решения предложена процедура сглаживания. Из приведенных расчетных результатов видно, что проблема немонотонности устраняется со снижением точности разрешения синусоидального профиля плотности за ударной волной (см. рис. 6 [4]).

Ранее предложены две модификации метода крупных частиц с настраиваемыми диссипативными свойствами второго порядка аппроксимации: с противоположной реконструкцией конвективных величин [15, 16] и гибридизацией потоков [17, 18]. Систематическое

тестирование метода в его различных вариантах подтвердили надежность и достаточно высокую разрешающую способность [19, 20]. Алгоритм с противоположной реконструкцией CDP2-UU (Upwind-Upwind) обладает бóльшим уровнем численной вязкости в сравнении с гибридной версией CDP2-CC (Centered-Centered). Вместе с тем опыт расчетов показал, что в течениях с высокочастотными колебаниями параметров (например, в задаче Шу–Ошера) для схемы CDP2-CC свойственно довольно «жесткое» переключение с бездиссипативной центрированной аппроксимации на шаблон против потока в окрестности экстремумов. Компромиссным (сбалансированным) вариантом алгоритма, предлагаемого в настоящей работе, является комбинация двух версий метода: применении более диссипативной противоположной реконструкции потоков на шаге «предиктор» и центрированной (бездиссипативной на гладких решениях) аппроксимации на корректирующем шаге — CDP2-UC (Upwind-Centered). Проверка вычислительных свойств сбалансированного алгоритма гибридного метода крупных частиц — предмет исследования настоящей работы.

Гибридный метод крупных частиц

Основные уравнения. Рассмотрим динамику идеального газа в формулировке Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{q} = [\rho, \rho u, \rho E]^T, \\ \mathbf{G} = [\rho u, \rho u^2, \rho E u]^T, \quad \mathbf{F} = [0, p, \rho u]^T, \quad (1)$$

где ρ, u, p, E — плотность, скорость, давление и полная энергия газа единицы массы соответственно; $\mathbf{q}, \mathbf{G}, \mathbf{F}$ — консервативные, потоковые, градиентные и деформационные величины соответственно; x, t — координата, время.

Замыкающее уравнение состояния $p = (\gamma - 1) \times \rho(E - u^2/2)$, где γ — показатель адиабаты.

Алгоритм метода. Алгоритм гибридного метода крупных частиц является двухшаговым по времени с расщеплением по физическим процессам на два этапа. На первом из них учитываются градиентные и деформационные члены \mathbf{F} законов сохранения (1), а на втором — конвективные потоки \mathbf{G} .

Шаг «предиктор» с порядком точности $O(h^2 + \tau)$ на гладких решениях:

$$\mathbf{q}_n^{(0)} = \mathbf{q}_n^k - (\mathbf{F}_{n+1/2}^k - \mathbf{F}_{n-1/2}^k) \tau / h, \quad (2)$$

$$\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(0)} - (\mathbf{G}_{n+1/2}^{(0)} - \mathbf{G}_{n-1/2}^{(0)}) \tau / h. \quad (3)$$

Шаг «корректор» с суммарным порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ на гладких решениях:

$$\mathbf{q}_n^{(2)} = 0,5(\mathbf{q}_n^k + \mathbf{q}_n^{(1)}) - 0,5(\mathbf{F}_{n+1/2}^{(1)} - \mathbf{F}_{n-1/2}^{(1)}) \tau / h, \quad (4)$$

$$\mathbf{q}_n^{k+1} = \mathbf{q}_n^{(2)} - 0,5(\mathbf{G}_{n+1/2}^{(2)} - \mathbf{G}_{n-1/2}^{(2)}) \tau / h. \quad (5)$$

Здесь h — размер ячейки с центром ячейки x_n и гранями $x_{n\pm 1/2} = x_n \pm h/2$, t^k — временной слой, $\tau = t^{k+1} - t^k$ — шаг по времени.

Нелинейная коррекция на первом этапе расщепления (2) заключается в том, что в схему расчета градиентных и деформационных величин $\hat{\mathbf{F}}_{n\pm 1/2} =$

$= [0, \tilde{p}_{n\pm 1/2}, \tilde{p}_{n\pm 1/2} u_{n\pm 1/2}^k]^T$ вносится нелинейная скалярная искусственная вязкость $\tilde{p}_{n\pm 1/2} = p_{n\pm 1/2}^k + [1 - \psi_v(r_{n\pm 1/2})] \times \times Q_{n\pm 1/2}$, где $Q_{n\pm 1/2}$ — обычная линейная диссипация, например типа Ландшоффа; $\psi_v(r_{n\pm 1/2})$ — ограничитель вязкости с параметром отношения наклонов $r_{n\pm 1/2}$.

Параметр $r_{n\pm 1/2}$ вычисляется по условию

$$r_{n+1/2} = \begin{cases} (u_n^k - u_{n-1}^k) / (u_{n+1}^k - u_n^k), & \text{если } (u_{n+1}^k - u_n^k)(p_{n+1}^k - p_n^k) \geq 0, \\ (u_{n+2}^k - u_{n+1}^k) / (u_{n+1}^k - u_n^k), & \text{иначе.} \end{cases}$$

На втором этапе расщепления (3) вычисляются примитивные переменные $\phi = \{\rho, u, E\}$ с использованием алгоритма:

$$\hat{\phi}_{n+1/2} = \begin{cases} \phi_{n+1/2}^+, & \text{при } u_{n+1/2}^{(0)} \geq 0, \\ \phi_{n+1/2}^-, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для определения величин $\phi_{n+1/2}^+$ и $\phi_{n+1/2}^-$ используем противоположную реконструкцию второго порядка точности с ограничителями потоков $\psi_f(r_{n\pm 1/2})$ [15, 16]:

$$\phi_{n+1/2}^+ = \left[\phi_n^{(0)} + \frac{1}{2} \psi_f(r_{n+1/2}^+) (1 - c_{n+1/2}) (\phi_{n+1}^{(0)} - \phi_n^{(0)}) \right], \quad (6)$$

$$\phi_{n+1/2}^- = \left[\phi_{n+1}^{(0)} - \frac{1}{2} \psi_f(r_{n+1/2}^-) (1 + c_{n+1/2}) (\phi_{n+1}^{(0)} - \phi_n^{(0)}) \right],$$

$$c_{n+1/2} = u_{n+1/2}^{(0)} \frac{\tau}{h}, \quad r_{n+1/2}^+ = \frac{\phi_n^{(0)} - \phi_{n-1}^{(0)}}{\phi_{n+1}^{(0)} - \phi_n^{(0)}}, \quad r_{n+1/2}^- = \frac{\phi_{n+2}^{(0)} - \phi_{n+1}^{(0)}}{\phi_{n+1}^{(0)} - \phi_n^{(0)}},$$

или центрированную (гибридную) реконструкцию [17, 18]:

$$\phi_{n+1/2}^+ = \left[(1 - \psi_f(r_{n+1/2}^+)) \phi_n^{(0)} + \psi_f(r_{n+1/2}^+) \phi_{n+1}^{(0)} \right], \quad (7)$$

$$\phi_{n+1/2}^- = \left[(1 - \psi_f(r_{n+1/2}^-)) \phi_{n+1}^{(0)} + \psi_f(r_{n+1/2}^-) \phi_n^{(0)} \right].$$

Полученные значения $\hat{\phi}_{n+1/2}$ применяются при формировании численных потоков массы $\hat{M}_{n\pm 1/2}^{(0)} = \hat{\rho}_{n\pm 1/2}^{(0)} u_{n\pm 1/2}^{(0)} \tau$, импульса $\hat{u}_{n\pm 1/2}^{(0)} \hat{M}_{n\pm 1/2}^{(0)}$ и энергии $\hat{E}_{n\pm 1/2}^{(0)} \hat{M}_{n\pm 1/2}^{(0)}$. Затем определяются искомые функции:

$$\rho^{(1)} = \rho^{(0)} + (\hat{M}_{n-1/2}^{(0)} - \hat{M}_{n+1/2}^{(0)}) / h,$$

$$u_n^{(1)} = \left[\rho_n^{(0)} u_n^{(0)} + (\hat{u}_{n-1/2}^{(0)} \hat{M}_{n-1/2}^{(0)} - \hat{u}_{n+1/2}^{(0)} \hat{M}_{n+1/2}^{(0)}) / h \right] / \rho_n^{(1)},$$

$$E_n^{(1)} = \left[\rho_n^{(0)} E_n^{(0)} + (\hat{E}_{n-1/2}^{(0)} \hat{M}_{n-1/2}^{(0)} - \hat{E}_{n+1/2}^{(0)} \hat{M}_{n+1/2}^{(0)}) / h \right] / \rho_n^{(1)}.$$

На шаге «корректор» (4), (5) расчетные формулы численных градиентов, мощности деформаций и конвективных потоков аналогичны приведенным с заменой верхних индексов: k на (1), (0) на (2), (1) на $(k+1)$.

Для нелинейной коррекции вязкости и реконструкции потоков используем известные ограничители:

$$\psi_{MM}(r) = \max[\min(r, 1), 0] - \text{Minmod},$$

$$\psi_{VL}(r) = (r + |r|) / (1 + r) - \text{Van Leer},$$

$$\psi_{SC}(r, c) = \begin{cases} \min(2r/|c|, 1), & 0 \leq r \leq 1, \\ \min(r, 2/1 - |c|), & r > 1, \\ 0, & r < 0 \end{cases} \quad - \text{Super-C}.$$

Представленные ограничители обеспечивают гибридный метод крупных частиц вторым порядком аппроксимации по пространству на гладких решениях ($\psi(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow 1$). Наибольшим уровнем численной диссипации и в то же время универсальностью применения обладает алгоритм с ограничителем вязкости и потоков Minmod (базовая настройка метода), который позволяет получать монотонные (с ограниченной полной вариацией) решения в широком диапазоне газодинамических параметров. Улучшения по качеству и разрешающей способности схемы достигаются использованием менее диссипативных лимитеров Van Leer и Super-C. Для более гибкого (параметрического) регулирования схемной вязкости реализуем комбинированный ограничитель $\psi_{SV}(\beta) = \beta\psi_{SC}(r, c) + (1 - \beta)\psi_{VL}(r, c)$, где $0 \leq \beta \leq 1$. Дальнейшее совершенствование метода в направлении повышении его робастности заключается в применении более диссипативной противоточной реконструкции потоков (6) на шаге «предиктор» и центрированной (бездиссипативной на гладких решениях) аппроксимации (7) на корректирующем шаге — CDP2-UC.

Расчеты тестовых задач выполнены в безразмерном виде с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$ на равномерной сетке с числом Куранта $CFL = 0,4$.

Результаты тестовых расчетов и их обсуждение

Тестовая задача Шу–Ошера (Shu–Osher problem) [14] представляет собой взаимодействие ударной волны с числом Маха 3 с синусоидальным фоном плотности. Задача определена на интервале $x \in (-5, 5)$ с начальным разрывом в точке $x_0 = -4$. Слева от разрыва начальные величины постоянны $(\rho_L, u_L, p_L) = (3,857143, 2,629369, 10,33333)$, а справа плотность изменяется по гармоническому закону $(\rho_R, u_R, p_R) = (1 + 0,2\sin(5x), 0, 1)$. Расчет ведется до момента времени $t_f = 1,8$.

Профили плотности, рассчитанные по схеме CDP2-UC с параметрическим ограничителем $\psi_{SV}(0,6)$ на сетках 400 и 800 ячеек, показаны на рис. 1 во всей области определения задачи (рис. 1, *a*) и увеличенный

фрагмент решения (рис. 1, *b*). Для сравнения приведены численные результаты гибридным методом крупных частиц с более диссипативной базовой настройкой ψ_{MM} , а также гибридной взвешенной нелинейной схемой четвертого порядка аппроксимации (CCSSR-HW4) из работы [8]. В качестве референтного (эталонного) решения принят расчет на сетке 16 000 ячеек по алгоритму CDP2-UC с нелинейной коррекцией $\psi_{SV}(0,6)$.

Гибридный метод крупных частиц демонстрирует монотонное решение с качественным разрешением деталей течения газа за ударной волной. При сгущении сетки не возникает паразитных осцилляций и наблюдается сходимость к эталонному профилю плотности. Расчет предложенным алгоритмом с настройкой $\psi_{SV}(0,6)$ (треугольники на рис. 1, *b*) точнее разрешает синусоидальный профиль плотности, чем схема четвертого порядка CCSSR-HW4 из [8] (пунктирная кривая). Результаты сопоставимы с разрывным методом Галеркина с процедурой сглаживания [4], которая введена авторами по причине возникновения осцилляций в численном решении при измельчении сетки и потери сходимости рассматриваемой схемы с «моментным» ограничителем.

В тестовой задаче Вудворда–Колеллы (Woodward–Collella problem) [13] реализуются взаимодействия волн, возникающих при распаде двух сильных разрывов. Задача рассматривается на отрезке $x \in [0, 1]$ с граничными условиями отражения. Первый разрыв находится в начальный момент времени в $x_1 = 0,1$, а другой в $x_2 = 0,9$. В начальный момент времени газ покоится $u = 0$ с плотностью $\rho = 1$ во всей расчетной области. Начальное распределение давления $(p_L, p_M, p_R) = (1000, 0, 0, 1, 100)$ в левой, средней и правой областях соответственно. Время окончания счета — $t_f = 0,038$.

В работе [10] отмечена проблема резкого ухудшения сходимости вплоть до нулевого порядка при измельчении сетки для исследуемых схем: MUSCL и MUSCL-CABARET с нелинейной коррекцией NOLD. Эта проблема объясняется существенным искажением численного решения (нефизическим характером колебания профиля плотности) в окрестности минимума при $x \approx 0,74$.

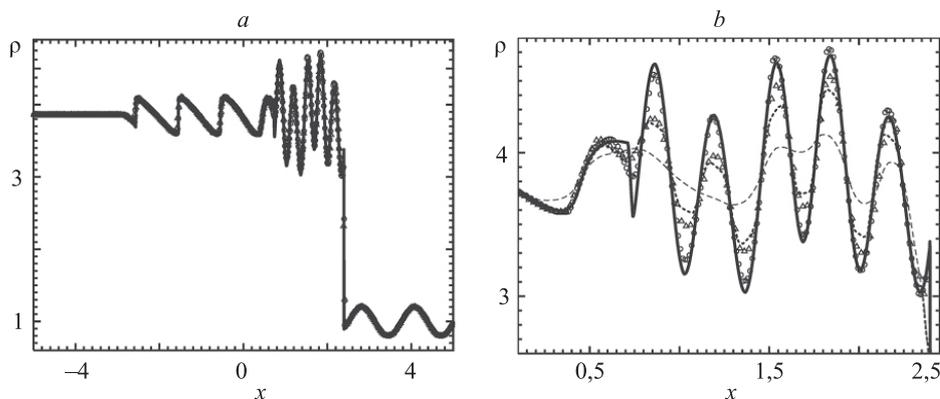


Рис. 1. Распределения плотности газа в задаче Шу–Ошера в момент времени $t_f = 1,8$. Штриховая кривая и пунктир соответственно: CPD2-UC с базовой настройкой ψ_{MM} и схема CCSSR-HW4 из [8] на сетке 400 ячеек. Треугольники, кружки и сплошная кривая — CPD2-UC с параметрическим ограничителем $\psi_{SV}(0,6)$ на сетках 400, 800 и 16 000 ячеек соответственно

Fig. 1. Gas density distributions in the Shu–Osher problem at the time $t_f = 1.8$. Dashed curve and dotted line accordingly: CPD2-UC with the basic setting ψ_{MM} and CCSSR-HW4 scheme from [8] shown for 400 cells on the grid. Triangles, circles, and a solid curve — CPD2-UC with a parametric limiter $\psi_{SV}(0,6)$, there are 400, 800 and 16 000 cells on the grids, respectively

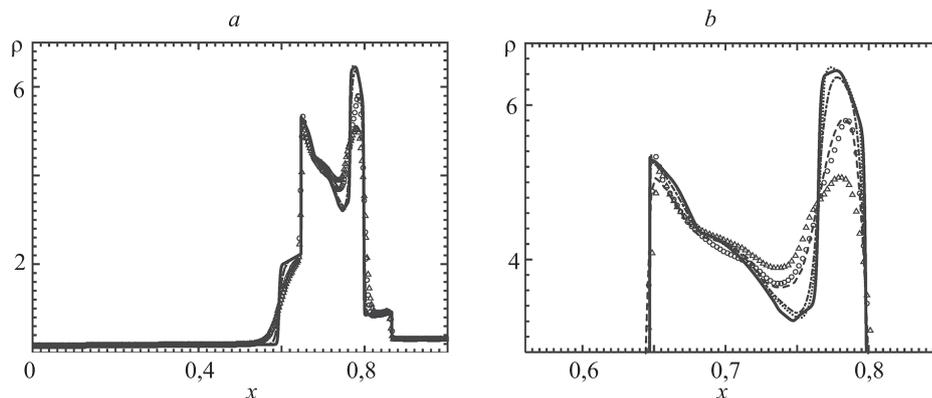


Рис. 2. Распределения плотности газа в задаче Вудворда–Колеллы в момент времени $t_f = 0,038$. Расчеты на сетках 400 и 2400 ячеек соответственно: треугольники и штрих-пунктирная кривая по схеме CPD2-UC с базовой настройкой ψ_{MM} , кружки и пунктир – CPD2-UC с нелинейной коррекцией $\psi_{SV}(0,2)$. WENO5 из [8] на сетке 400 ячеек — штриховая линия. Референтное решение (сплошная кривая) — CPD2-UC с ограничителем ψ_{MM} на сетке 16 000 ячеек

Fig 2. Gas density distributions in the Woodward–Colella problem at the time $t_f = 0.038$. Calculations on grids of 400 and 2400 cells, respectively: triangles and a dashed curve for CPD2-UC with the basic setting ψ_{MM} , circles and dotted lines for CPD2-UC with a nonlinear correction $\psi_{SV}(0.2)$. WENO5 from [8] shown on a grid of 400 cells. Reference solution (solid curve) for CPD2-UC with the limiter ψ_{MM} shown on a grid of 16 000 cells

Для проверки вычислительных свойств гибридного метода крупных частиц выполнены расчеты с базовой настройкой ψ_{MM} . Для повышения точности использован алгоритм, в котором через некоторый интервал времени (принят 0,12) нелинейная коррекция ψ_{MM} изменена на менее диссипативную $\psi_{SV}(0,2)$.

Результаты расчетов распределений плотности газа в момент времени $t_f = 0,038$ представлены на рис. 2, а, и его увеличенный фрагмент на рис. 2, б. Для сравнения с популярной схемой WENO5 (Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme) приведены расчеты на сетке 400 ячеек. Сопоставление со схемами MUSCL и MUSCL-CABARET выполнено, как и в работе [10], на сетке 2400 ячеек. Гибридный метод крупных частиц с алгоритмом CDP2-UC успешно справился с данной тестовой задачей. Настройка схемы позволяет получать численные решения (кружки), сопоставимые по разрешающей способности со схемой пятого порядка WENO5 из [8] (штриховая кривая). В исследованном диапазоне детализации сеток от 400 до 16 000 ячеек

при использовании предложенного сбалансированного алгоритма гибридного метода крупных частиц не выявлена проблема существенного искажения профилей плотности и потери сходимости.

Заключение

В развитие гибридного метода крупных частиц предложен сбалансированный алгоритм, основанный на комбинации противоточной реконструкции переменных на шаге «предиктор» и центрально-разностной бездиссипативной аппроксимации на гладких решениях на шаге «корректор». Работоспособность алгоритма проверена на тестовых задачах нелинейной акустики и взаимодействия двух сильных ударных волн. Метод продемонстрировал монотонность и численную сходимость на последовательности сгущающихся сеток. Предложенный алгоритм успешно конкурирует с популярными схемами, имеющими формально более высокий (четвертый и пятый) порядок аппроксимации.

Литература

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики // Математический сборник. 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.
2. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A Practical Introduction. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 724 p. <https://doi.org/10.1007/b79761>
3. Cockburn B., Shu C.-W. Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // Journal of Scientific Computing. 2001. V. 16. N 3. P. 173–261. <https://doi.org/10.1023/A:1012873910884>
4. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование разрывного метода Галеркина при решении задач газовой динамики // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 1. С. 17–32.
5. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // Journal of Computational Physics. 1994. V. 115. N 1. P. 200–212. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
6. Булат П.В., Волков К.Н. Решение тестовых задач нестационарной одномерной газовой динамики при помощи WENO-схем //

References

1. Godunov S.K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1959, vol. 47, no. 8-9, pp. 357–393.
2. Toro E.F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A Practical Introduction*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2009, 724 p. <https://doi.org/10.1007/b79761>
3. Cockburn B., Shu C.-W. Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. *Journal of Scientific Computing*, 2001, vol. 16, no. 3, pp. 173–261. <https://doi.org/10.1023/A:1012873910884>
4. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. Application of the RKDG method for gas dynamics problems. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 397–407. <https://doi.org/10.1134/S207004821404005X>.
5. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 1994, vol. 115, no. 1, pp. 200–212. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>

- Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 1. С. 174–180. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2016-16-1-174-180>
7. Федоренко Р.П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 6. С. 1122–1128.
 8. Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W. A new class of central compact schemes with spectral-like resolution II: Hybrid weighted nonlinear schemes // Journal of Computational Physics. 2015. V. 284. P. 133–154. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.12.027>
 9. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. V. 49. N 3. P. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
 10. Родионов А.В. Сопоставление схемы КАБАРЕ со схемами типа MUSCL // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 9. С. 109–136.
 11. Kurganov A., Liu Y. New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws // Journal of Computational Physics. 2012. V. 231. N 24. P. 8114–8132. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.07.040>
 12. Popov I., Sukov S. Modified method of adaptive artificial viscosity for solution of gas dynamics problems on parallel computer systems // EPJ Web of Conferences. 2018. V. 173. P. 03020. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201817303020>
 13. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics. 1984. V. 54. N 1. P. 115–173. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90142-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90142-6)
 14. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II // Journal of Computational Physics. 1989. V. 83. N 1. P. 32–78. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90222-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90222-2)
 15. Садин Д.В. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 12. С. 2098–2109. <https://doi.org/10.7868/S0044466916120152>
 16. Садин Д.В. Схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для численного моделирования течений газа и газозвесей // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 12. С. 89–104.
 17. Садин Д.В. Применение схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами к расчету течений газа с развитием неустойчивости на контактной границе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 1. С. 153–157. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2018-18-1-153-157>
 18. Садин Д.В. Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газозвесей // Вестник Южно-уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12. № 2. С. 112–122. <https://doi.org/10.14529/mmp190209>
 19. Садин Д.В., Давидчук В.А. Сравнение модифицированного метода крупных частиц с некоторыми схемами высокой разрешающей способности. Одномерные тесты // Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20. № 2. С. 138–146. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v20r214>
 20. Садин Д.В. Анализ диссипативных свойств гибридного метода крупных частиц для структурно сложных течений газа // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 4. С. 757–772. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-4-757-772>
 6. Bulat P.V., Volkov K.N. WENO schemes for solution of unsteady one-dimensional gas dynamics test problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 174–180. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2016-16-1-174-180>
 7. Fedorenko R.P. The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 2, no. 6, pp. 1355–1365. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90351-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90351-3)
 8. Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W. A new class of central compact schemes with spectral-like resolution II: Hybrid weighted nonlinear schemes. *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 284, pp. 133–154. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.12.027>
 9. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 1983, vol. 49, no. 3, pp. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
 10. Rodionov A.V. A comparison of the CABARET and MUSCL-type schemes. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 203–225. <https://doi.org/10.1134/S2070048214020094>
 11. Kurganov A., Liu Y. New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 2012, vol. 231, no. 24, pp. 8114–8132. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.07.040>
 12. Popov I., Sukov S. Modified method of adaptive artificial viscosity for solution of gas dynamics problems on parallel computer systems. *EPJ Web of Conferences*, 2018, vol. 173, pp. 03020. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201817303020>
 13. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 1984, vol. 54, no. 1, pp. 115–173. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90142-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90142-6)
 14. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II. *Journal of Computational Physics*, 1989, vol. 83, no. 1, pp. 32–78. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90222-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90222-2)
 15. Sadin D.V. TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 12, pp. 2068–2078. <https://doi.org/10.1134/S0965542516120137>
 16. Sadin D.V. Schemes with customizable dissipative properties as applied to gas-suspensions flow simulation. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2017, vol. 29, no. 12, pp. 89–104. (in Russian)
 17. Sadin D.V. Application of scheme with customizable dissipative properties for gas flow calculation with interface instability evolution. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 153–157. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2018-18-1-153-157>
 18. Sadin D.V. A modification of the large-particle method to a scheme having the second order of accuracy in space and time for shockwave flows in a gas suspension. *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 112–122. (in Russian). <https://doi.org/10.14529/mmp190209>
 19. Sadin D.V., Davidchuk V.A. Comparison of a modified large-particle method with some high resolution schemes. one-dimensional test problems. *Numerical Methods and Programming*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 138–146. (in Russian). <https://doi.org/10.26089/NumMet.v20r214>
 20. Sadin D.V. Analysis of dissipative properties of a hybrid large-particle method for structurally complicated gas flows. *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 757–772. (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-4-757-772>

Автор

Author

Садин Дмитрий Викторович — доктор технических наук, профессор, профессор, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, [sc 6602924618](https://orcid.org/0000-0001-5335-4847), <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847>, sadin@yandex.ru

Dmitry V. Sadin — D.Sc., Full Professor, Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation. [sc 6602924618](https://orcid.org/0000-0001-5335-4847), <https://orcid.org/0000-0001-5335-4847>, sadin@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 28.08.2021
Одобрена после рецензирования 10.09.2021
Принята к печати 28.09.2021

Received 28.08.2021
Approved after reviewing 10.09.2021
Accepted 28.09.2021



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»