

## АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РОБОТОТЕХНИКА AUTOMATIC CONTROL AND ROBOTICS

doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-2-232-238

УДК 681.51

### Управление многоканальными линейными объектами с гарантией нахождения регулируемых переменных в заданных множествах

Ба Хю Нгуен<sup>1</sup>✉, Игорь Борисович Фуртат<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация

<sup>1,2</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

<sup>1</sup> Leningrat206@gmail.com✉, <https://orcid.org/0000-0003-2076-7463>

<sup>2</sup> cainenash@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4679-5884>

#### Аннотация

**Предмет исследования.** Предложен новый метод синтеза закона управления многоканальными линейными объектами с гарантией нахождения регулируемых переменных в заданных множествах в условиях неизвестных ограниченных возмущений. **Метод.** Задача решена в два этапа. На первом этапе использовано преобразование координат, чтобы свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной системы без ограничений. На втором этапе выполнен синтез закона управления для преобразованной системы, где выбраны настраиваемые параметры из решения линейных матричных неравенств. **Основные результаты.** Показана эффективность работы предложенного метода. Выполнено моделирование в MATLAB/Simulink, результаты которого показали результативность метода и подтвердили теоретические результаты. **Практическая значимость.** Представленный метод рекомендуется использовать в задачах управления, где требуется поддержание регулируемых переменных в заданных множествах, например, управление электроэнергетической сетью, управление процессом поддержания пластового давления и т. д.

#### Ключевые слова

многоканальные линейные системы, преобразование координат, устойчивость, линейные матричные неравенства

#### Благодарности

Метод решения и основной результат получены за счет гранта Российского научного фонда № 18-79-10104 в ИПМаш РАН. Численное моделирование выполнено за счет средств гранта РФФИ № 20-08-00610.

**Ссылка для цитирования:** Нгуен Б.Х., Фуртат И.Б. Управление многоканальными линейными объектами с гарантией нахождения регулируемых переменных в заданных множествах // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 2. С. 232–238. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-2-232-238

### Control of MIMO linear plants with a guarantee for the controlled signals to stay in a given set

Ba Huy Nguyen<sup>1</sup>✉, Igor B. Furtat<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation

<sup>1,2</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

<sup>1</sup> Leningrat206@gmail.com✉, <https://orcid.org/0000-0003-2076-7463>

<sup>2</sup> cainenash@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4679-5884>

#### Abstract

In this paper, we propose a new method for synthesizing the control of multi-input multi output linear plants with a guarantee of finding controlled signals in given sets under conditions of unknown bounded disturbances. The problem is solved in two stages. At the first stage, the coordinate transformation method is used to reduce the original constrained problem to the problem of studying the input-to-state stability of a new extended system without constraints. At the second stage, the control law for the extended system is obtained by solving a series of linear matrix inequalities. To

© Нгуен Б.Х., Фуртат И.Б., 2022

illustrate the effectiveness of the proposed method, simulation in the MATLAB/Simulink is given. The simulation results show the presence of controlled signals in the given sets and the boundness of all signals in the control system. The proposed method is recommended for use in control problems where it is required to maintain controlled signals in given sets, for example, control of an electric power network, control of the reservoir pressure maintenance process, etc.

**Keywords**

multi-input multi-output linear plants, coordinate transformation, stability, linear matrix inequalities

**Acknowledgements**

The proposed method and the main result were obtained under the Russian Science Foundation Grant No. 18-79-10104 at IPME RAS. Numerical simulations were performed at RFBR grant No. 20-08-00610.

**For citation:** Nguyen Ba Huy, Furtat I.B. Control of MIMO linear plants with a guarantee for the controlled signals to stay in a given set. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 232–238 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-2-232-238

**Введение**

На практике часто встречаются задачи управления объектами с гарантией нахождения регулируемых переменных в заданных множествах [1–5]. Например, требуется поддержание частоты и выходного напряжения на электрических генераторах в заданных пределах в электроэнергетической сети [1, 2] или давления и расхода в устье скважины в заданной полосе при управлении процессом стабилизации пластового давления [3]. В работах [6–8] приведен обзор решений данной задачи, а также предложен базовый метод на основе специального преобразования координат, позволяющий перейти от исходной задачи с ограничениями к новой задаче без ограничений. Применение данного метода рассмотрено только для систем со скалярными входными и выходными сигналами, а параметры в алгоритме управления выбираются «вручную».

В настоящей работе расширено применение базового метода для многоканальных систем, и получены новые условия расчета параметров регулятора с использованием техники линейных матричных неравенств [9, 10].

Сформулирована задача управления многоканальным линейным объектом с гарантией принадлежности выходных сигналов в заданных множествах. Предложен метод синтеза на основе линейных матричных неравенств. Приведены результаты моделирования, полученные с помощью MATLAB/Simulink, и выполнен их анализ.

**Постановка задачи**

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{f}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{x}, \tag{1.2}$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  — измеряемый вектор состояния;  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  — сигнал управления;  $\mathbf{y} = \mathbf{col}\{y_1, y_2, \dots, y_v\} \in \mathbb{R}^v$  — выходной сигнал;  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^l$  — неизвестное ограничение возмущения такое, что  $|\mathbf{f}(t)| \leq \mathbf{f}$ , при  $t > 0$ ; матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{v \times n}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times l}$  известны. Пара матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  управляема, а  $(\mathbf{A}, \mathbf{L})$  — наблюдаема.

Цель работы — разработка закона управления, гарантирующего нахождение выходного сигнала  $y(t)$  объекта (1.2) в следующем множестве

$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^v: \underline{y}_i(t) < y_i(t) < \bar{y}_i(t), i = 1, \dots, v\}, \tag{2}$$

где  $t \geq 0$ ;  $\underline{y}_i(t)$  и  $\bar{y}_i(t)$  — непрерывные ограниченные функции и их первые производные по времени. Данные функции могут выбираться разработчиками исходя из требований к работе системы. Например, в задаче управления электрическим генератором [1] требуется поддержание частоты  $\omega(t)$  и выходного напряжения  $U(t)$  в заданных пределах:  $\underline{\omega}(t) \leq \omega(t) \leq \bar{\omega}(t)$  и  $\underline{U}(t) \leq U(t) \leq \bar{U}(t)$ .

**Метод решения. Основной результат**

Рассмотрим преобразование координат, приведенное в работах [6–8]

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), t), \tag{3}$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in \mathbb{R}^v$  — непрерывно-дифференцируемая функция по времени  $t$ . Вектор-функция  $\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t) = \mathbf{col}\{\Phi_1(\varepsilon_1, t), \dots, \Phi_v(\varepsilon_v, t)\}$ , удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\underline{g}_i(t) < \Phi_i(\varepsilon_i, t) < \bar{g}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, v$ , при  $t \geq 0$  и  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ ;
2. существует обратное отображение  $\boldsymbol{\varepsilon} = \Phi^{-1}(\mathbf{y}, t)$ , при  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  и  $t \geq 0$ ;
3.  $\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)$  — непрерывно-дифференцируемая функция по  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $t$ ,  $\det\left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) \neq 0$  для  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $t \geq 0$ ;
4.  $\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t}$  — ограниченная функция для  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $t \geq 0$ ,  $\left|\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t}\right| < \gamma$ , где  $\gamma > 0$  определяется видом замены (3).

В отличие от [6–8], в настоящей работе рассмотрены функции  $\Phi_i(\varepsilon_i, t)$ , зависящие только от  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$  и  $t$ , следовательно, матрица  $\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  имеет диагональную форму.

Для формулирования закона управления требуется информация о динамике переменной  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ . Рассчитаем полную производную по времени функции  $\mathbf{y}(t)$  от (3)

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t}. \tag{4}$$

Так как  $\det\left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) \neq 0$ , то перепишем (4) в виде

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{-1} \left[\dot{\mathbf{y}} - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t}\right]. \tag{5}$$

Заметим, что в выражении (5) содержится сигнал управления  $\mathbf{u}(t)$ , так как  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}}$  из выражения (1.2).

Напомним основной результат работы [6, теорема 1 и ее доказательство] в виде теоремы 1.

**Теорема 1.** Пусть для преобразования (3) выполнены условия (1–4). Если существует такой закон управления  $\mathbf{u}(t)$ , что решения (5) ограничены, то  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}_\alpha \subset \mathcal{Y}$ . Если при выбранном законе управления решения (5) не ограничены, то  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}$ .

Данная теорема позволяет перевести задачу управления (1.1) с ограничениями по выходу (2) на задачу управления (5) без ограничений. Сформулируем основной результат данной работы, содержащий требуемый закон управления для объекта (1.2), в виде теоремы 2.

**Теорема 2.** Допустим, что при преобразовании (3) выполнены условия (1–4),  $\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} > 0$  для любых  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $t$ , а также существует матрица  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times \nu}$  такая, что матрица  $\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{A} - \mathbf{T}\mathbf{L}$  гурвицева. Если для заданного разработчиком  $c > 0$  существуют симметричная матрица  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$  и положительные коэффициенты  $\tau_i > 0, i = 1, \dots, \nu$  такие, что выполнены следующие линейные матричные неравенства

$$\begin{aligned} & \mathbf{K} \geq 0, \\ & \begin{bmatrix} -\mathbf{K} + \tau_{\nu+1}\mathbf{I} & -\frac{1}{2}\mathbf{F}\mathbf{L}\mathbf{D} & \frac{1}{2}\mathbf{F} \\ * & -\tau_{\nu+2}\mathbf{I} & \mathbf{O} \\ * & * & -\tau_{\nu+3}\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (6) \\ & -2c\tau_{\nu+1} + \bar{f}^2\tau_{\nu+2} + \gamma^2\tau_{\nu+3} \leq 0, \end{aligned}$$

где «\*» — симметричный блок соответствующей матрицы;  $\mathbf{I}, \mathbf{O}$  — единичная и нулевая матрицы соответствующей размерности;  $\mathbf{F} = \text{diag}\{\tau_1, \dots, \tau_\nu\}$ .

Тогда закон управления

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{L}\mathbf{B})^{-1}[\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{x}] \quad (7)$$

обеспечивает выполнение целевого условия (2).

**Доказательство.** Принимая во внимание (1.1), перепишем выражение (5) в виде

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{-1} \left[ \mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \right]. \quad (8)$$

Подставив закон управления (7) в выражение (8), а также добавив в уравнении (1.1) слагаемое  $\mathbf{T}\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t) - \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{x}(t) = 0$  (которое справедливо в силу преобразования (3) и уравнения (1.2)), получим

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{A} - \mathbf{T}\mathbf{L})\mathbf{x} - \mathbf{K}\mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}\mathbf{f} + \mathbf{T}\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t) \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{-1} \left[ -\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \right]. \quad (10)$$

Введение матрицы  $\mathbf{T}$  позволяет распространить результат данной работы на случай неустойчивых объектов. Здесь в силу свойств преобразования (3) матрица  $\left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{-1}$  является диагональной положительно определенной. Для исследования выражения (10) на

устойчивость по вход-состоянию [11, 12], рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (11)$$

Найдем полную производную по времени от функции Ляпунова (11) вдоль решений (10)

$$\dot{V} = \boldsymbol{\varepsilon}^T\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{-1} \left[ -\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \right].$$

Потребуем выполнение условия

$$\dot{V} \leq 0 \quad (12)$$

при

$$V \geq c \quad (13)$$

с учетом ограничений

$$|\mathbf{f}(t)| \leq \bar{f}, \left| \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \right| \leq \gamma. \quad (14)$$

Для выполнения условия (13) найдем матрицу  $\mathbf{K}$  при следующих условиях:

$$\mathbf{K} \geq 0, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_i \left( \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \right) \leq 0, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad (16)$$

где  $\mathbf{E}_i$  —  $i$ -я матрица, элементы которой равны нулю, кроме  $i$ -го элемента главной диагонали, который равен единице. Выражение (16) не положительно и содержит произведение каждой  $i$ -й координаты вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\left( \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \right)$ .

Действительно, если выполнены условия (15), (16) и с учетом того, что положительно определенная матрица

$\left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{-1}$  имеет диагональный вид, следует, что  $-\boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{-1} \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} \leq 0$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{-1} \left( \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \right) \leq 0$ .

В результате следует выполнение условия (13).

Условия (13) и (14) можно переписать как

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon} \geq 2c, \quad (17)$$

$$\mathbf{f}^T\mathbf{f} \leq \bar{f}^2, \left[ \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \right]^T \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \leq \gamma^2. \quad (18)$$

Обозначив  $\mathbf{z} = \text{col} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{f}, \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, t)}{\partial t} \right\}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2\nu+1}$  перепишем (15)–(18) в матричном виде:

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & * & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq 0, \\ & \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{O} & \frac{1}{2}\mathbf{E}_i\mathbf{L}\mathbf{D} & -\frac{1}{2}\mathbf{E}_i \\ * & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & * & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq 0, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\mathbf{z}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & * & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq -2c, \quad \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ * & * & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq \bar{f}^2,$$

$$\mathbf{z}^T \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & * & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq \gamma^2.$$

Согласно S-процедуре [9, 13], выражения (19) будут выполнены одновременно, если будут выполнены неравенства (6). Значит, функция  $\varepsilon(t)$  будет ограничена для любых  $t$ . Если матрица  $\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{A} - \mathbf{T}\mathbf{L}$  гурвицева, то из (9) сигнал  $\mathbf{x}(t)$  будет ограничен в силу ограниченности  $\varepsilon(t)$ ,  $\Phi(\varepsilon, t)$  и  $\mathbf{f}(t)$ . Следовательно, сигнал управления (7) будет ограничен, и, с учетом теоремы 1, целевое условие (2) будет выполнено. Теорема 2 доказана.

### Численное моделирование

Рассмотрим объект в виде уравнений (1.1) и (1.2) с двумя входами и двумя выходами со следующими параметрами:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f(t) = 0,1 + \sin(3t) + \text{sat}\left(\frac{d(t)}{0,3}\right)$$

где  $\text{sat}\{\cdot\}$  — функция насыщения; сигнал  $d(t)$  — белый шум, сформирован в MATLAB Simulink с помощью блока Band-Limited White Noise с мощностью шума и временем выборки равными 0,1. Тогда  $\bar{f} = 1,4$ .

Пусть  $\Phi(\varepsilon, t) = \text{col}\{\Phi_1(\varepsilon_1, t), \Phi_2(\varepsilon_2, t)\}$  где функции  $\Phi_i(\varepsilon_i, t)$  заданы как

$$\Phi_i(\varepsilon_i, t) = \frac{\bar{g}_i(t)e^{\varepsilon_i} + g_i(t)}{e^{\varepsilon_i} + 1}, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Заметим, что функция  $\Phi(\varepsilon, t)$ , элементы которой заданы выражением (20), удовлетворяет условиям теоремы 2. Действительно, так как  $\bar{g}_i(t) > g_i(t)$ , то для всех  $\varepsilon$  и  $t \geq 0$  имеем

$$\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i} = \frac{e^{\varepsilon_i}(\bar{g}_i(t)e^{\varepsilon_i} - g_i(t))}{(e^{\varepsilon_i} + 1)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial t} = \frac{\dot{\bar{g}}_i(t)e^{\varepsilon_i} + \dot{g}_i(t)}{e^{\varepsilon_i} + 1} <$$

$$< \max\{\sup\{\dot{\bar{g}}_i(t)\}, \sup\{\dot{g}_i(t)\}\} = \gamma_i.$$

Следовательно,  $\left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} = \text{diag}\left\{\left(\frac{\partial \Phi_1(\varepsilon_1, t)}{\partial \varepsilon_1}\right)^{-1}, \left(\frac{\partial \Phi_2(\varepsilon_2, t)}{\partial \varepsilon_2}\right)^{-1}\right\} > 0$  и  $\left|\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}\right| < \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = \gamma$  для любых  $\varepsilon$  и  $t \geq 0$ .

Параметры функции  $\Phi(\varepsilon, t)$  зададим в виде

$$\bar{g}_1(t) = (g_0 - g_1)e^{-kt} + g_1, \quad \bar{g}_2(t) = (g_0 - g_2)\cos(kt) + g_2,$$

$$g_1(t) = (g_0 - g_2)e^{-kt} + g_3, \quad g_2(t) = \cos(kt) + g_5,$$

где  $g_0 = \sqrt{\mathbf{y}^T(0)\mathbf{y}(0)} + 0,01$ ,  $g_1 = 0,1$ ,  $g_2 = 2$ ,  $g_3 = -0,2$ ,  $g_4 = g_0 - 2,1$ ,  $g_5 = 0,8$  и  $k = 0,5$ .

Дополнительно выберем  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , тогда матрица  $\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{A} - \mathbf{T}\mathbf{L}$  будет гурвицева. С помощью

пакета YALMIP [14] и решателя SEDUMI [15] решим неравенства (6). Для параметра  $c = 50$  найдем  $\tau_1 = \tau_2 = 0,34$ ,  $\tau_3 = 0,14$ ,  $\tau_4 = 1,65$ ,  $\tau_5 = 1,48$  и  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,49 & 0,20 \\ 0,20 & 1,49 \end{bmatrix}$ .

Для параметра  $c = 0,05$  найдем  $\tau_1 = \tau_2 = 2,58$ ,  $\tau_3 = 140,22$ ,  $\tau_4 = 1,80$ ,  $\tau_5 = 0,52$  и  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 174,64 & 8,91 \\ 8,91 & 174,64 \end{bmatrix}$ .

Переходные процессы при двух различных значениях  $c = 50$  и  $c = 0,05$  по  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  и  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  при  $\mathbf{x}(0) = \text{col}\left\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\right\}$  приведены на рис. 1.

Из рис. 1, а, с видно, что выходные сигналы не достигают границы заданного множества, что согласуется с теоретическими выводами. Отметим, что чем меньше значение  $c$ , тем лучше подавляется влияние возмущений. Это можно объяснить тем, что значение  $\sqrt{2c}$  — радиус шара, в который траектория  $\varepsilon(t)$  входит и не покидает этот шар. Уменьшение значения  $c$  означает уменьшение размера шара и увеличение стабильности системы к возмущению. Также при уменьшении значения  $c$  требуется большее значение управляющего сигнала в начальный момент времени. Из рис. 1, b, d видно, что при  $c = 50$  значение управляющего сигнала  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  начинается с 720 и  $-430$  соответственно. Чтобы уменьшить значение управления в начальный момент времени, необходимо найти такую матрицу  $\mathbf{K}^*(t)$  с помощью выражения (7), чтобы в начальный момент времени  $\mathbf{K}^* \ll 1$  и далее значение  $\mathbf{K}^*(t)$  «быстро» будет стремиться к значению найденной матрицы  $\mathbf{K}$  из выражения (6). Выполнением данного условия может служить матрица

$$\mathbf{K}^*(t) = \frac{\mathbf{K}}{\frac{1}{t + \delta} + 1},$$

где  $\delta$  — положительное число,  $0 < \delta \ll 1$ .

На рис. 2, а приведен график возмущения  $f(t)$ .

Результаты моделирования переходных процессов по  $y_1(t)$ ,  $u_1(t)$  с учетом  $\mathbf{K}^*(t)$  и при  $c = 0,05$ ,  $\delta = 0,01$  представлены на рис. 2, b, c. Из рис. 2, c видно, что значение управляющего сигнала значительно уменьшается, а качество выходного сигнала практически (рис. 2, b) не изменяется по сравнению с результатом, приведенным на рис. 1, b.

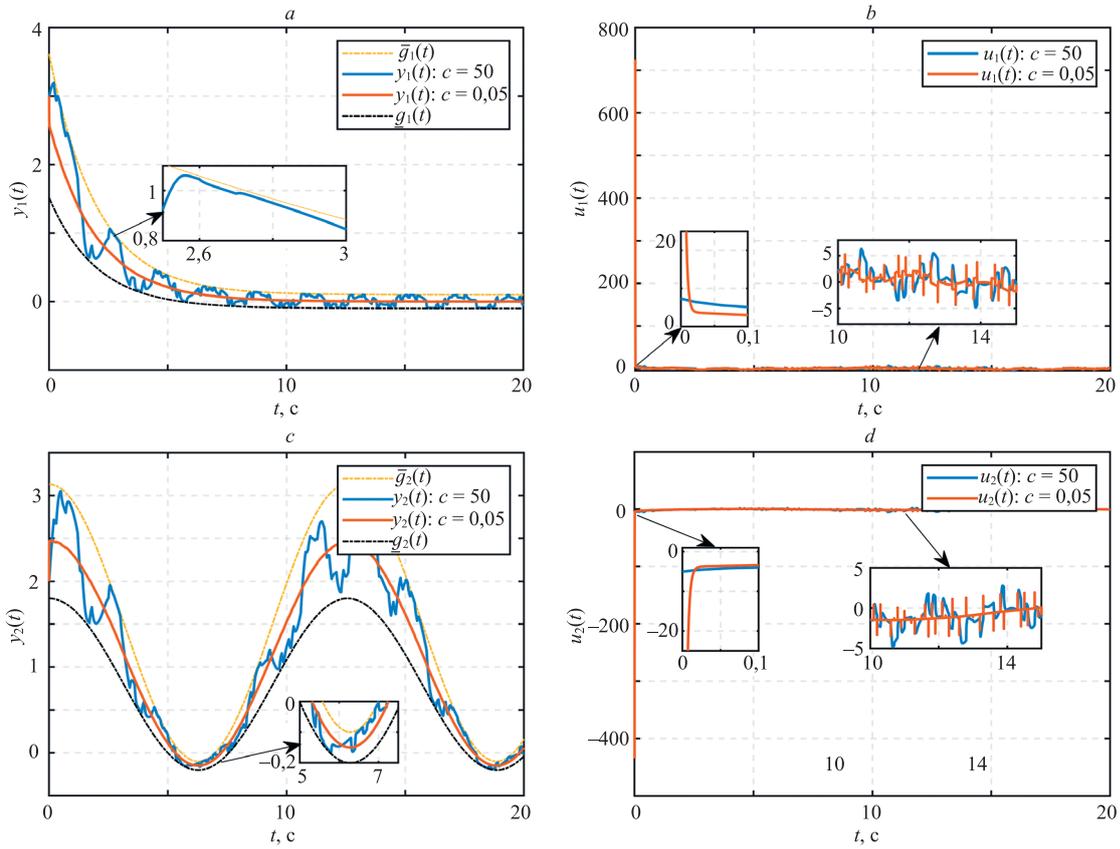


Рис. 1. Переходные процессы при  $c = 50$  и  $c = 0,05$  в замкнутой системе: для выходных сигналов  $y_1(t)$  (a),  $y_2(t)$  (c) и сигналов управления  $u_1(t)$  (b),  $u_2(t)$  (d)

Fig. 1. The transients of outputs  $y_1(t)$  (a),  $y_2(t)$  (c) and inputs  $u_1(t)$  (b),  $u_2(t)$  (d) in the closed-loop system under  $c = 50$  and  $c = 0,05$

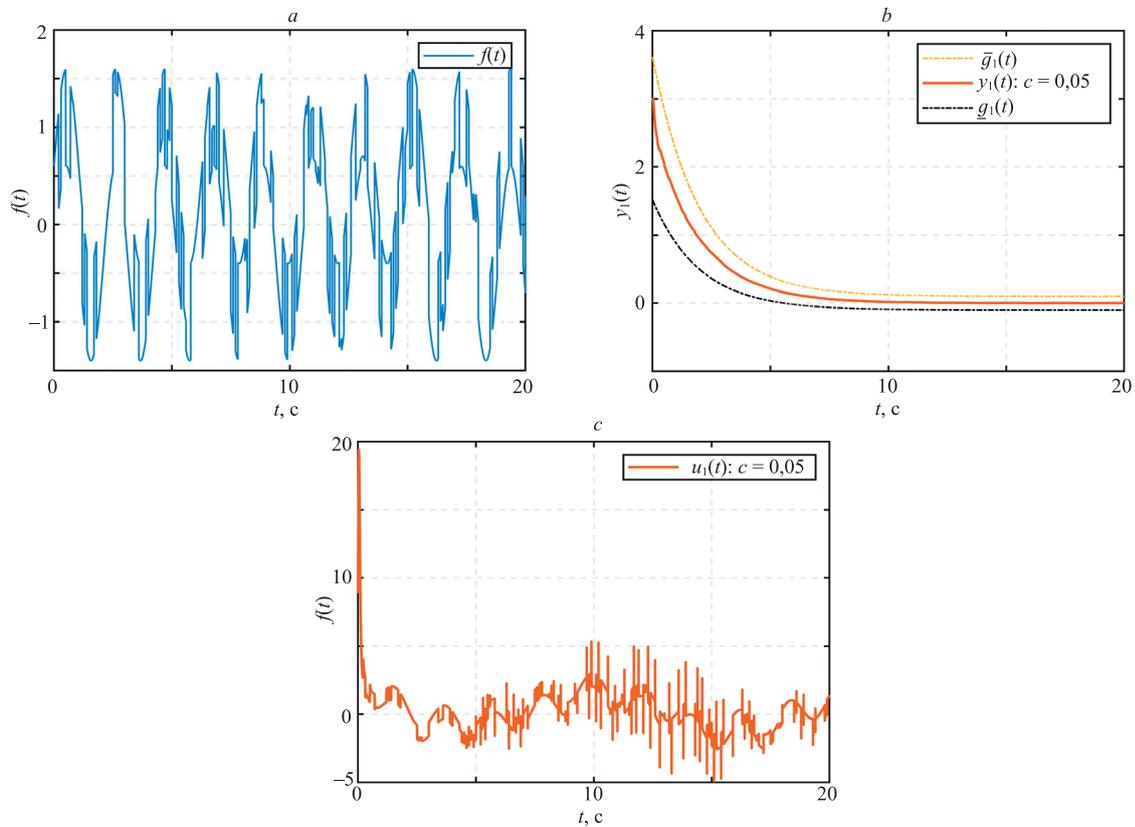


Рис. 2. Переходные процессы:  $f(t)$  (a); по  $y_1(t)$  (b) и  $u_1(t)$  (c) при  $c = 0,05$  с учетом  $\mathbf{K}^*(t)$  в замкнутой системе

Fig. 2. The transients of  $f(t)$  (a),  $y_1(t)$  (b) and  $u_1(t)$  (c) for  $c = 0,05$  with considering  $\mathbf{K}^*(t)$  in the closed-loop system

### Заключение

В работе предложен новый метод синтеза закона управления многоканальными линейными объектами с гарантией нахождения выходных сигналов в заданных множествах на основе базового метода и техники линейных матричных неравенств. Разработанный метод применяется в задаче управления объектом по состоянию в условиях неизвестных ограниченных возмущений. В отличие от базового метода, предложенный метод позволяет рассчитывать параметры регулятора с использованием линейных матричных неравенств, что расширяет применимость полученного метода на

практике. Результаты моделирования показали эффективность предложенного метода и подтвердили теоретические выводы.

Метод решения и основной результат получены за счет гранта Российского научного фонда № 18-79-10104 в ИПМаш РАН<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Карточка проекта, поддержанного российским научным фондом [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://rscf.ru/project/18-79-10104/> (дата обращения: 22.02.2022).

### Литература

1. Furtat I., Nekhoroshikh A., Gushchin P. Synchronization of multi-machine power systems under disturbances and measurement errors // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2022. in press. <https://doi.org/10.1002/acs.3372>
2. Павлов Г.М., Меркурьев Г.В. Автоматика энергосистем / Центр подготовки кадров РАО «ЕЭС России». СПб.: Папирус, 2001. 388 с.
3. Веревкин А.П., Кирушин О.В. Управление системой поддержания пластового давления с использованием моделей конечно-автоматного вида // *Территория Нефтегаз*. 2008. № 10. С. 14–19.
4. Буяхияуй К., Григорьев Л.И., Лаауад Ф., Хелласи А. Оптимальное нечеткое управление для снижения энергопотребления в дистилляционных колоннах // *Автоматика и телемеханика*. 2005. № 2. С. 36–45.
5. Ruderman M., Krettek J., Hoffmann F., Bertram T. Optimal state space control of DC // *IFAC Proceedings Volumes*. 2008. V. 42. N 2. P. 5796–5801. <https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.00977>
6. Фуртат И.Б., Гушин П.А. Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // *Автоматика и телемеханика*. 2021. № 4. С. 121–139. <https://doi.org/10.31857/S000523102104005X>
7. Furtat I., Gushchin P. Nonlinear feedback control providing plant output in given set // *International Journal of Control*. 2021. in press. <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
8. Furtat I., Gushchin P. Control of dynamical systems with given restrictions on output signal with application to linear systems // *IFAC-PapersOnLine*. 2020. V. 53. N 2. P. 6384–6389. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1775>
9. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994. 198 p. (SIAM studies in applied mathematics; V. 15)
10. Herrmann G., Turner M.C., Postlethwaite I. Linear matrix inequalities in control // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 2007. V. 367. P. 123–142. [https://doi.org/10.1007/978-1-84800-025-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-84800-025-4_4)
11. Sontag E.D. Input to state stability: Basic concepts and results // *Lecture Notes in Mathematics*. 2008. V. 1932. P. 163–220. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-77653-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-77653-6_3)
12. Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to state stability and allied system properties // *Automation and Remote Control*. 2011. V. 72. N 8. P. 1579–1614. <https://doi.org/10.1134/S0005117911080017>
13. Fridman E. A refined input delay approach to sampled-data control // *Automatica*. 2010. V. 46. N 2. P. 421–427. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.11.017>
14. Löfberg J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB // *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*. 2004. P. 284–289. <https://doi.org/10.1109/CACSD.2004.1393890>
15. Sturm J.F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones // *Optimization Methods and Software*. 1999. V. 11. N 1. P. 625–653. <https://doi.org/10.1080/10556789908805766>

### References

1. Furtat I., Nekhoroshikh A., Gushchin P. Synchronization of multi-machine power systems under disturbances and measurement errors. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2022, in press. <https://doi.org/10.1002/acs.3372>
2. Pavlov G.M., Merkurev G.V. *Energy Systems Automation*. St. Petersburg, Papirus Publ., 2001, 388 p. (in Russian)
3. Verevkin A.P., Kiriushin O.V. Control of the formation pressure system using finite-state-machine models. *Oil and Gas Territor*, 2008, no. 10, pp. 14–19. (in Russian)
4. Bouyahiaoui C., Grigoriev L.I., Laaouad F., Khelassi A. Optimal fuzzy control to reduce energy consumption in distillation columns. *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 2, pp. 200–208. <https://doi.org/10.1007/s10513-005-0044-y>
5. Ruderman M., Krettek J., Hoffmann F., Bertram T. Optimal state space control of DC. *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, vol. 42, no. 2, pp. 5796–5801. <https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.00977>
6. Furtat I.B., Gushchin P.A. Control of dynamical plants with a guarantee for the controlled signal to stay in a given set. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 4, pp. 654–669. <https://doi.org/10.1134/S0005117921040044>
7. Furtat I., Gushchin P. Nonlinear feedback control providing plant output in given set. *International Journal of Control*, 2021, in press. <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
8. Furtat I., Gushchin P. Control of dynamical systems with given restrictions on output signal with application to linear systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2020, vol. 53, no. 2, pp. 6384–6389. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1775>
9. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994, 198 p. SIAM studies in applied mathematics; vol. 15.
10. Herrmann G., Turner M.C., Postlethwaite I. Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 2007, vol. 367, pp. 123–142. [https://doi.org/10.1007/978-1-84800-025-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-84800-025-4_4)
11. Sontag E.D. Input to state stability: Basic concepts and results. *Lecture Notes in Mathematics*, 2008, vol. 1932, pp. 163–220. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-77653-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-77653-6_3)
12. Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to state stability and allied system properties. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 8, pp. 1579–1614. <https://doi.org/10.1134/S0005117911080017>
13. Fridman E. A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 2010, vol. 46, no. 2, pp. 421–427. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.11.017>
14. Löfberg J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*, 2004, pp. 284–289. <https://doi.org/10.1109/CACSD.2004.1393890>
15. Sturm J.F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 1999, vol. 11, no. 1, pp. 625–653. <https://doi.org/10.1080/10556789908805766>

**Авторы**

**Нгуен Ба Хю** — исследователь, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация; аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0003-2076-7463>, [Leningrat206@gmail.com](mailto:Leningrat206@gmail.com)

**Фуртат Игорь Борисович** — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Российская Федерация; профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc](https://orcid.org/0000-0003-4679-5884) 36349158600, <https://orcid.org/0000-0003-4679-5884>, [cainenash@mail.ru](mailto:cainenash@mail.ru)

**Authors**

**Ba Huy Nguyen** — Researcher, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation; PhD student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0003-2076-7463>, [Leningrat206@gmail.com](mailto:Leningrat206@gmail.com)

**Igor B. Furtat** — D.Sc., Full Professor, Chief Researcher, Head of lab., Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation; Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc](https://orcid.org/0000-0003-4679-5884) 36349158600, <https://orcid.org/0000-0003-4679-5884>, [cainenash@mail.ru](mailto:cainenash@mail.ru)

*Статья поступила в редакцию 26.01.2022*  
*Одобрена после рецензирования 09.02.2022*  
*Принята к печати 17.03.2022*

*Received 26.01.2022*  
*Approved after reviewing 09.02.2022*  
*Accepted 17.03.2022*



Работа доступна по лицензии  
Creative Commons  
«Attribution-NonCommercial»