

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MODELING AND SIMULATION

doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-4-779-784

УДК 519.876.5+519.6+519.246

Моделирование случайных процессов на основе преобразования Карунена–Лозва

Александр Сергеевич Ефимов✉

Независимый исследователь, Санкт-Петербург, Российская Федерация

asefimov@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-8091-435X>

Аннотация

Рассмотрена задача цифрового моделирования случайных процессов с заданной корреляционной функцией или спектральной плотностью процесса. Обе эти функции связаны между собой теоремой Винера–Хинчина, так что знание одной функции может быть использовано для нахождения другой. Выполнена разработка математического представления стационарного случайного процесса с заданной корреляционной функцией на основе преобразования Карунена–Лозва, которое чаще всего применяется для декорреляции исходного процесса с целью более лаконичного его описания (задача сжатия данных). Предложено использование преобразования Карунена–Лозва для придания требуемых корреляционных свойств исходному некоррелированному случайному процессу с помощью обращения (инвертирования) данного преобразования. Обоснован вид требуемого преобразования при дискретном (во времени) представлении входных и выходных процессов различной длины и методики обеспечения требуемой точности моделирования. Представлена цифровая процедура получения корреляционной функции по заданной спектральной плотности моделируемого случайного процесса. Экспериментальное исследование предлагаемого метода проведено в ходе компьютерного моделирования в пакете Mathcad, что упростило решение требуемых расчетных задач. Исходный случайный процесс получен в виде последовательности независимых (и, следовательно, некоррелированных) случайных чисел, а выходной — как результат полученного в работе преобразования. Выполнено сравнение вычисленной приближенной корреляционной функции с заданной, и определена дисперсия погрешности. Приведены результаты моделирования случайных процессов с заданными корреляционными функциями и однородного марковского процесса с заданной переходной вероятностью, а также пример перехода от заданной спектральной плотности случайного процесса к его корреляционной функции. Полученные результаты подтверждают эффективность и реализуемость разработанных методов моделирования, что позволит использовать их при компьютерном исследовании и проектировании различных систем.

Ключевые слова

моделирование, случайный процесс, корреляционная функция, матрица, собственные числа и векторы, преобразование

Ссылка для цитирования: Ефимов А.С. Моделирование случайных процессов на основе преобразования Карунена–Лозва // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 4. С. 779–784. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-4-779-784

Modeling of random processes based on Karhunen-Loeve decomposition

Alexandr S. Efimov✉

Independent Researcher, Saint Petersburg, Russian Federation

asefimov@mail.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-8091-435X>

Abstract

The problem of digital modeling of random processes with given either correlation function or spectral density of the process is considered. These functions of a random process are interconnected by the Wiener–Khinchin theorem. The solution of one function can be used to solve another. The development of a mathematical representation of a stationary

random process with a given correlation function based on the Karhunen-Loeve transformation, which is most often used to decorrelate the original process in order to describe it more concisely (data compression problem), has been completed. It is proposed to use the Karhunen-Loev transformation to impart the required correlation properties to the original uncorrelated random process by inverting (converting) this transformation. The form of the required transformation for a discrete (in time) representation of input and output processes of various lengths and methods for ensuring the required modeling accuracy are substantiated. A procedure for obtaining a correlation function from a given spectral density of a simulated random process is presented. An experimental study of the proposed method was carried out in the course of computer simulation in the Mathcad package which simplified the solution of the required computational problems. The initial random process was obtained as a sequence of independent (and, therefore, uncorrelated) random numbers, and the output process, as a result of the transformation, was obtained in the work. The calculated approximate correlation function is compared with the given one and the error variance is determined. The results of modeling random processes with given correlation functions and a homogeneous Markov process with a given transition probability are given as well as an example of the transition from a given spectral density of a random process to its correlation function. The results obtained confirm the effectiveness and feasibility of the developed modeling methods which will allow them to be used in computer research and design of various systems.

Keywords

modeling, random process, correlation function, matrix, eigenvalues and vectors, transformation

For citation: Efimov A.S. Modeling of random processes based on Karhunen-Loeve decomposition. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 4, pp. 779–784 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-4-779-784

Введение

Моделирование случайных процессов (СП) с требуемыми характеристиками — актуальная задача при компьютерном исследовании и проектировании систем автоматического управления, связи, передачи информации и других. Эта задача важна не только для имитации мешающих сигналов и помех, но и для моделирования речевых и видеосигналов, сигналов, используемых при управлении различными объектами и процессами, а также анализе социальных и экономических процессов как недетерминированных функций времени. Особенно важно моделирование марковских процессов, которые широко используются при исследовании и проектировании систем массового обслуживания.

Способы решения поставленной задачи рассмотрены в работе [1, п. 4.4]. Самое большое применение получили два метода: формирующего фильтра и канонических разложений. Метод формирующего фильтра подробно рассмотрен в работе [2], где моделируемый СП с заданной корреляционной функцией получают на выходе формирующего фильтра. При этом дискретная передаточная функция вычисляется по спектральной плотности процесса с помощью уравнения Винера–Хинчина. Входным процессом является некоррелированный СП («белый шум»). Требуемый выходной процесс представлен в виде конечно-разностного уравнения, коэффициенты которого вычислены с помощью теории непрерывных дробей (модифицированного алгоритма Вискватова). Отметим, что предложенный в работе [2] алгоритм моделирования состоит из 12 шагов и требует выполнения большого объема подготовительных расчетов, в том числе ручных, что затрудняет его практическое использование. Кроме того, остается неясным, как обеспечивается требуемая точность моделирования, а указанные дисперсии ошибок [2, примеры 1 и 4] не подтвердились при проверке алгоритма в пакете Mathcad.

В работах [3, 4] рассмотрена задача построения приближенной модели стохастического процесса с помощью преобразования Карунена–Лозэва. Главное

внимание уделено методике приближенных вычислений собственных чисел и векторов однородного интегрального оператора Фредгольма второго рода, ядром которого является заданная корреляционная функция моделируемого СП. В [3] получены требования к длине моделируемого процесса, обеспечивающей требуемую точность и надежность вычисленных собственных чисел и векторов. Однако методика применения найденного преобразования для получения случайного процесса с заданной корреляционной функцией в данной теоретической работе не рассмотрена. В [4] исследовано усеченное представление СП с использованием преобразования Карунена–Лозэва, уменьшающее объем представления (задача сжатия данных). При этом рассмотрены аналитические и численные методы поиска собственных чисел и векторов основных видов корреляционных функций СП. Главное внимание в работе [4] уделено влиянию усечения разложения Карунена–Лозэва на точность представления исходного СП, но задача получения СП с заданной корреляционной функцией также не была поставлена.

Предложенные в настоящей работе методы моделирования рассчитаны на использование современного программного обеспечения, позволяющего решить главные проблемы моделирования. К таким проблемам относятся: вычисление собственных чисел и векторов заданной корреляционной функции, получение реализаций требуемого СП нужной длины, их статистическая обработка и оценка качества моделирования. В процессе моделирования использован математический пакет Mathcad.

Алгоритм моделирования

Рассмотрим процесс декорреляции стационарного в широком смысле СП $Y(k)$ с дискретным временем с помощью преобразования Карунена–Лозэва [5]. Если \mathbf{R}_Y — корреляционная матрица этого процесса, а \mathbf{W} — матрица ее собственных векторов, то в результате линейного преобразования получим некоррелированный СП $X(k)$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{Y}, \quad (1)$$

где \mathbf{X} и \mathbf{Y} — векторы реализаций соответствующих СП; \mathbf{W}^T — транспонированная матрица.

Рассмотрим подробнее процесс декорреляции (1). Если коэффициент корреляции процесса $Y(k)$ задан в виде функции $r(m)$, $m \in \mathbb{N}$, где m — расстояния между двумя сечениями процесса, то $r(0) = 1$, $r(m) = r(-m)$, $|r| \leq 1$. Тогда при $m = |i - j|$, $i, j = 1, N$, где N — длина выбранного участка корреляционной функции, получим матрицу коэффициентов корреляции \mathbf{R}_y , которая является и корреляционной, если дисперсия СП $Y(k)$ равна единице:

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} 1 & r(1) & r(2) & \dots & r(N-1) \\ r(1) & 1 & r(1) & \dots & r(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(N-1) & r(N-2) & r(N-3) & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $R_{y_{i,i}} = r(0) = 1$, $R_{y_{i,j}} = R_{y_{j,i}} = r(|i - j|)$, $|r| \leq 1$; \mathbf{R}_y — квадратная теплицева матрица размера N (вид матрицы представлен в [6, С. 206]). Матрица (2) симметрична и положительно определена, поэтому собственные числа λ_i — вещественны и положительны. Собственные числа связаны с собственными векторами \mathbf{w}_i матрицы \mathbf{R}_y равенствами:

$$\mathbf{R}_y \cdot \mathbf{w}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{w}_i, \quad i = \overline{1, N},$$

которые в матричной форме имеют вид

$$\mathbf{R}_y \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad (3)$$

где \mathbf{W} — матрица собственных векторов размера $(N \times N)$; $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, причем $\sum \lambda_i = \text{Tr}(\mathbf{R}_y) = N$ — сумма диагональных элементов матрицы (2).

Из (3) получим уравнения для матрицы $\mathbf{\Lambda}$ и корреляционной матрицы \mathbf{R}_y :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{W}, \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{W}^{-1}. \quad (5)$$

Собственные векторы взаимно ортогональны, их скалярное произведение $(w_i, w_j) = \delta_{i,j}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Матрица собственных векторов обладает важным свойством: $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^T$. Заметим, что матрицы \mathbf{W} и $\mathbf{\Lambda}$ вычисляются с помощью встроенных программ математических пакетов. Например, в пакете Mathcad с помощью команд: $\mathbf{W} = \text{eigenvecs}(\mathbf{R}_y)$ и $\mathbf{\Lambda} = \text{eigenwals}(\mathbf{R}_y)$.

Найдем корреляционную матрицу полученного с помощью (1) СП $X(k)$, используя уравнение (4) и равенство $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= M\{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T\} = M\{\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{W}\} = \\ &= \mathbf{W}^{-1} \cdot M\{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T\} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{W} = \mathbf{\Lambda}, \end{aligned}$$

где M — знак математического ожидания.

Отметим, что диагональность матрицы $\mathbf{\Lambda}$ означает некоррелированность СП $X(k)$, причем ее элементы,

являясь дисперсиями проекций процесса $X(k)$ на координатные оси нового базиса ($\lambda_i = D_i$), не постоянны, а возрастают с ростом индекса i . Эти свойства процесса $X(k)$ играют главную роль в задачах сжатия данных.

Но для решения поставленной задачи — получение требуемого процесса $Y(k)$ с помощью СП «белый шум» — случайный процесс $\mathbf{X}(k)$ должен иметь корреляционную матрицу $\mathbf{R}_x = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичная матрица. Для обеспечения данного условия необходимо нормировать собственные векторы \mathbf{w}_i матрицы \mathbf{W} , т. е. привести их к виду w_i/σ_i , $i = \overline{1, N}$, где $\sigma_i = \sqrt{D_i} = \sqrt{\lambda_i}$. В этом случае дисперсии проекций процесса $\mathbf{X}(k)$ на координатные оси будут равны единице.

Указанная нормировка обеспечивается умножением \mathbf{W} на матрицу \mathbf{B}^{-1} , $\mathbf{B} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$, причем $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{Y}, \quad (6)$$

а корреляционная функция СП $X(k)$ с учетом (5) будет действительно равна \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= M\{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T\} = M\{\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}^{-1}\} = \\ &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot M\{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T\} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \\ &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

В результате искомого преобразование, позволяющее получить СП с заданной корреляционной функцией из «белого шума», может быть получено преобразованием уравнения (6) к виду:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}. \quad (7)$$

Случайные последовательности с независимыми элементами и нулевым средним можно получить, используя датчики различных случайных чисел. Соседние отсчеты в таких последовательностях практически независимы, что иллюстрируется корреляционной функцией $R_z(m)$ последовательности 1000 нормально распределенных случайных чисел, полученных с помощью пакета Mathcad (рис. 1).

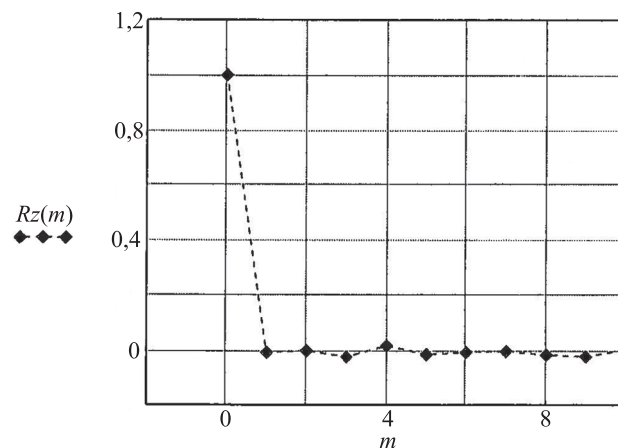


Рис. 1. Корреляционная функция «белого шума»
Fig. 1. Correlation function of “white noise”

Размеры векторов и матриц в (7) определяются числом N , которое выбирается так, чтобы заданная корреляционная функция $r(m)$ при $m \geq N$ была по модулю меньше заданной величины (например, $1 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-2}$), что во многих случаях обеспечивается при $20 \leq N \leq 40$. Очевидно, что от этого зависит точность моделирования, в качестве которой в данной работе используются параметры погрешности $e(m) = r(m) - Ry(m)$, где $r(m)$ и $Ry(m)$ — заданная и выборочная корреляционные функции моделируемой последовательности:

- максимальная погрешность — $\max(|e|)$;
- среднее значение погрешности: $Me = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e(m)$;
- выборочная дисперсия погрешности: $De = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \{[e(m)]^2 - (Me)^2\}$.

Для моделирования случайных последовательностей длины $K \gg N$, где K — общая длина моделируемой последовательности, исходная и моделируемая последовательности разбиваются на P скалярных векторов длины N так, чтобы $N \times P = K$. Векторы при этом оказываются столбцами матриц \mathbf{X} и \mathbf{Y} размера $(N \times P)$ в уравнении (7). Полученные матрицы связаны с последовательностями x_k и y_k , являющимися реализациями длины K процессов $X(k)$ и $Y(k)$, уравнениями:

$$X_{i,p} = x_{i+N(p-1)}, Y_{i,p} = y_{i+N(p-1)}, i = \overline{1, N}, p = \overline{1, P}. \quad (8)$$

Рассмотрим зависимость точности моделирования от длины K моделируемой случайной последовательности y_k . Ее выборочная корреляционная функция также является случайной, как и все указанные выше характеристики погрешности моделирования $e(m)$. Наиболее важная характеристика — дисперсия ошибки моделирования De , величина которой определяется в основном дисперсией эмпирической корреляционной функции $D[Ry(m)]$. В работе [6, С. 192] показано, что дисперсия должна удовлетворять неравенству:

$$D[Ry(m)] \leq \frac{2}{K} \sum_{m=-N}^N r^2(m) = \frac{2}{K} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^N r^2(m) \right],$$

где N — граница области $(-N, N)$.

Тогда

$$K \geq \frac{2}{D[Ry(m)]} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^N r^2(m) \right], \quad (9)$$

где

$$Ry(m) = \frac{1}{Dy \cdot (N - m)} \left[\sum_{l=0}^{N-m} y_l y_{l+m} - My^2 \right], \quad (10)$$

My и Dy — оценки математического ожидания и дисперсии последовательности y_k .

Таким образом, длина моделируемой случайной последовательности должна удовлетворять неравенству (9) при заданной дисперсии ошибки моделирования.

Примеры моделирования

Пример 1. Рассмотрим моделирование в Mathcad случайной последовательности y_k с заданными корреля-

ционной функцией вида $r(m) = \exp\{-0,2|m|\} \cos(0,6|m|)$ и дисперсией ошибки $De \leq 1 \cdot 10^{-3}$. Выберем $N = 30$, тогда $r(N) = 1,64 \cdot 10^{-3}$ и $m = 0,30$. Корреляционная матрица имеет элементы вида: $Ry_{ij} = \exp\{-0,2|i-j|\} \cos(0,6|i-j|)$, а матрица собственных векторов \mathbf{W} вычисляется по команде $\mathbf{W} = \text{eigenvecs}(Ry)$. При заданной дисперсии ошибки длина моделируемой последовательности в соответствии с неравенством (9) должна быть не менее $K = 6 \cdot 10^3$, так что при $N = 30$ число векторов \mathbf{X} и $\mathbf{Y} - P = 200$.

В качестве исходного некоррелированного процесса \mathbf{X} выберем последовательность K случайных равномерно распределенных чисел $x_k, k = \overline{1, K}$ на промежутке $(-1, 1)$ ($x = \text{runif}(K, -1, 1)$). Элементы коррелированной последовательности y_k определяются уравнением (7), матрицы \mathbf{X} и \mathbf{Y} которого связаны с соответствующими последовательностями уравнениями (8), а матрица \mathbf{B} в уравнении (7) находится с помощью матрицы $\mathbf{\Lambda}$:

$$B_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\Lambda_{i,i}}, & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Приближенная корреляционная функция $Ry(m)$ полученной последовательности y_k , вычисленная в соответствии с уравнением (10), показана на рис. 2 вместе с заданной $r(m)$. На рис. 2 видна близость корреляционных функций, подтверждаемая параметрами ошибки моделирования $e(m) = r(m) - Ry(m)$:

$$\max(|e|) = 0,05, Me = -1,9 \cdot 10^{-3}, De = 8,4 \cdot 10^{-4} < 1 \cdot 10^{-3}.$$

Пример 2. Рассмотрим моделирование непрерывного (по состоянию) стационарного марковского процесса с заданным коэффициентом корреляции между соседними элементами $r(1) = 0,3$, так что корреляционная матрица R_{ij} вводится в виде:

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ r(1), & \text{if } |i - j| = 1. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

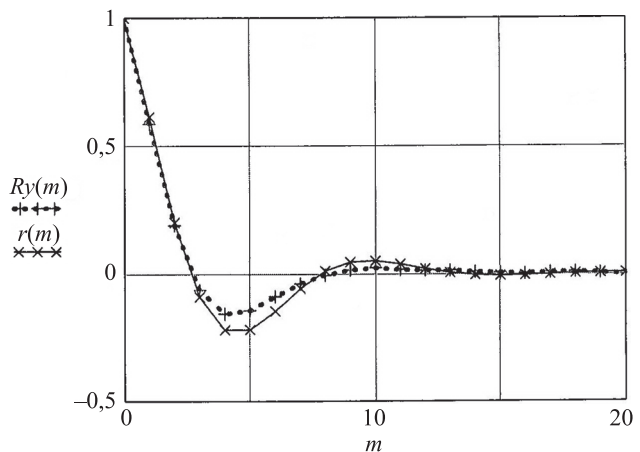


Рис. 2. Заданная $r(m)$ и полученная $Ry(m)$ корреляционные функции

Fig. 2. The set $r(m)$ and obtained $Ry(m)$ correlation functions

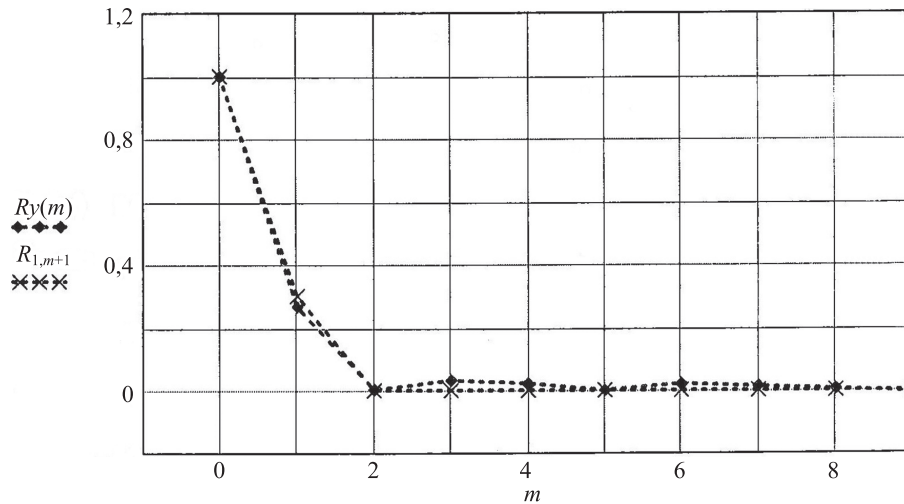


Рис. 3. Заданная $R_{1,m+1}$ и полученная $Ry(m)$ корреляционные функции марковского процесса
 Fig. 3. The set $R_{1,m+1}$ and obtained $Ry(m)$ correlation functions of the Markov process

При требуемой дисперсии ошибки $De < 1 \cdot 10^{-3}$ длина моделируемого марковского процесса в соответствии с (9) должна быть не менее $1 \cdot 10^3$.

Выберем $N = 10$, тогда $P = 200$ и $K = 2 \cdot 10^3$. Выходной коррелированный процесс определяется уравнением (7), а его корреляционная функция, вычисленная в соответствии с (10), показана на рис. 3 вместе с первой строкой заданной корреляционной матрицы: $R_{1,m+1} = (1 \ 0,3 \ 0 \ 0 \ \dots)$. На рис. 3 видно подобие заданной и вычисленной по полученной модели марковского процесса корреляционных функций, что подтверждается параметрами ошибки моделирования $e(m)$:

$$e(1) = r(1) - Ry(1) = 0,032, \quad e(1)/r(1) = 0,00(6),$$

$$\max(|e|) = 0,038, \quad Me = 9,7 \cdot 10^{-3}, \quad De = 2,9 \cdot 10^{-4}.$$

Моделирование случайного процесса с заданными частотными свойствами

Рассмотрим методику моделирования случайного процесса с заданными частотными свойствами с помощью пакета Mathcad. Если спектральная плотность мощности $Gy(\omega)$ стационарного СП $Y(t)$ задана аналитически, то корреляционная функция $r(\tau)$ этого процесса может быть найдена с помощью уравнения Винера–Хинчина [6, С. 240]:

$$r(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\max}} Gy(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \cdot d\omega, \quad (11)$$

где, при $\omega \geq \omega_{\max} = 2\pi \cdot f_{\max}$, $Gy(\omega)/\max Gy(\omega) \leq 1 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-3}$.

Дискретизация найденной в (11) корреляционной функции $r(\tau)$ производится с интервалом $\Delta\tau$ между соседними отсчетами, определяемым теоремой Котельникова [7, С. 82]:

$$\Delta\tau \leq \frac{1}{2f_{\max}} = \frac{\pi}{\omega_{\max}}.$$

После выбора величины шага дискретизации $\Delta\tau$ корреляционная функция $r1(m)$ определяется уравнением:

$$r1(m) = \begin{cases} 1, & \text{if } m = 0, \\ r(\Delta\tau \cdot m), & \text{if } m \neq 0. \end{cases}$$

Выполним переход к корреляционной матрице Ry вида (2):

$$Ry_{i,j} = r1(|i-j|), \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (12)$$

где N — размер корреляционной матрицы, $|i-j| = m$.

Например, если заданная спектральная плотность мощности моделируемого СП равна

$$G(\omega) = \frac{16}{\omega^4 + 13\omega^2 + 4},$$

то при $\omega_{\max} = 2\pi G(2\pi)/G(0) \cong 2 \cdot 10^{-3}$. Примем $\omega_{\max} = 2\pi$, $f_{\max} = 1$, тогда $\Delta\tau = 0,5$. Таким образом, корреляционная матрица вида (2), определенная в (12), позволяет получить реализацию моделируемого процесса, используя рассмотренную методику.

Заключение

Предложена методика математического моделирования стационарных случайных процессов с заданными корреляционными и спектральными свойствами. Результаты реализации методики с помощью пакета Mathcad показали ее эффективность и возможность обеспечения требуемой точности выбором длины интервала корреляции и общей длины реализаций моделируемого случайного процесса. Рассмотрены примеры реализаций, в результате которых общая длина процесса не более чем в 10 раз превысила величину, обратную требуемой дисперсии ошибки моделирования. Важное достоинство предложенного метода моделирования — простота его реализации по сравнению с методом, описанным в [2], и с теоретическими методами — в [1].

Литература

1. Шапоров С.Д., Родин Б.П. Случайные процессы: учебник. СПб.: БГТУ, 2010. 237 с.
2. Карташев В.Я., Новосельцева М.А. Цифровое моделирование стационарных случайных процессов с заданной корреляционной функцией на основе непрерывных дробей // Управление большими системами: сборник трудов. 2010. № 31. С. 49–91.
3. Moklyachuk O. Simulation of random processes with known correlation function with the help of Karhunen-Loeve decomposition // Theory of Stochastic Processes. 2007. V. 13(29). N 4. P. 163–169.
4. Солодовщиков А.Ю., Платонов А.К. Исследование метода Карунена–Лоэва // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 19. С. 1–29.
5. Xuang S.P., Quek S.T., Phoon K.K. Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2001. V. 52. N 9. P. 1029–1043. <https://doi.org/10.1002/nme.255>
6. Купер Дж., Макгилем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М.: Мир, 1989. 376 с.
7. Игнатьев Н.К. Дискретизация и ее приложения. М.: Связь, 1980. 264 с.

Автор

Ефимов Александр Сергеевич — кандидат технических наук, доцент, независимый исследователь, Санкт-Петербург, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0002-8091-435X>, asefimov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 23.02.2022
 Одобрена после рецензирования 23.05.2022
 Принята к печати 12.07.2022

References

1. Shaporev S.D., Rodin B.P. *Stochastic Processes*. St. Petersburg, BSTU, 2010, 237 p. (in Russian)
2. Kartashov V., Novoseltseva M. Digital design of stationary casual precesses with the set cross-correlation function on basis of the continued fractions. *Large-Scale Systems Control*, 2010, no. 31, pp. 49–91. (in Russian)
3. Moklyachuk O. Simulation of random processes with known correlation function with the help of Karhunen-Loeve decomposition. *Theory of Stochastic Processes*, 2007, vol. 13(29), no. 4, pp. 163–169.
4. Solodovshikov A.Yu., Platonov A.K. The investigation of Karhunen-Loeve method. *Keldysh Institute Preprints*, 2006, no. 19, pp. 1–29. (in Russian)
5. Xuang S.P., Quek S.T., Phoon K.K. Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol. 52, no. 9, pp. 1029–1043. <https://doi.org/10.1002/nme.255>
6. Cooper G.R., McGillem C.D. *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis*. New York, Holt, Rinehart, and Winston, 1986, 408 p.
7. Ignatev N.K. *Discretization and its Applications*. Moscow, Svjaz' Publ., 1980, 264 p. (in Russian)

Author

Alexandr S. Efimov — PhD, Associate Professor, Independent Researcher, Saint Petersburg, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0002-8091-435X>, asefimov@mail.ru

Received 23.02.2022
 Approved after reviewing 23.05.2022
 Accepted 12.07.2022



Работа доступна по лицензии
 Creative Commons
 «Attribution-NonCommercial»