

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

## BRIEF PAPERS

doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-6-1237-1240

УДК 536.6

**Дифференциально-разностная модель теплопереноса в твердых телах с использованием метода параметрической идентификации****Николай Васильевич Пилипенко<sup>1</sup>, Павел Андреевич Колодийчук<sup>2</sup>, Юрий Петрович Заричняк<sup>3</sup>**<sup>1,2,3</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация<sup>1</sup> pilipenko38@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9328-3166><sup>2</sup> pkolodiychuk@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9984-1613><sup>3</sup> zarich4@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8713-3583>**Аннотация**

Рассмотрена задача параметрической идентификации дифференциально-разностной модели процесса теплопереноса в сферическом теле. При разработке модели использован оригинальный расширенный фильтр Калмана, который позволяет учесть зависимость теплофизических свойств исследуемого объекта от температуры. Постановка задачи и полученное решение дают возможность учитывать различный характер внешнего теплового воздействия и процессы, происходящие внутри тел, в особенности при фазовых переходах в системах тел. Продемонстрировано хорошее совпадение результатов параметрической идентификации и численного моделирования с использованием программного пакета «Ansys». Показано, что предложенный в работе метод позволяет определять не только температуру в разных точках объекта, но и восстанавливать нестационарный тепловой поток на границе объекта, а также уточнять его теплофизические свойства. Рассмотренный метод параметрической идентификации дифференциально-разностной модели теплопереноса может найти применение при определении эффективности аккумуляторов тепловой энергии.

**Ключевые слова**

дифференциально-разностная модель, сферическое тело, сферическая симметрия, фильтр Калмана, параметрическая идентификация, метрометрия

**Ссылка для цитирования:** Пилипенко Н.В., Колодийчук П.А., Заричняк Ю.П. Дифференциально-разностная модель теплопереноса в твердых телах с использованием метода параметрической идентификации // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 6. С. 1237–1240. doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-6-1237-1240

**Differential-difference model of heat transfer in solids using the method of parametric identification****Nikolai V. Pilipenko<sup>1</sup>, Pavel A. Kolodiychuk<sup>2</sup>, Yuri P. Zarichnyak<sup>3</sup>**<sup>1,2,3</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation<sup>1</sup> pilipenko38@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9328-3166><sup>2</sup> pkolodiychuk@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9984-1613><sup>3</sup> zarich4@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8713-3583>**Abstract**

The paper considers the problem of parametric identification of a differential-difference model of the heat transfer process in a spherical body. When developing the model, the original extended Kalman filter is used which allows taking into account the dependence of the thermophysical properties of the object under study on temperature. This formulation and the obtained solution of the problem make it possible to take into account the different nature of the external thermal effect and the processes occurring inside the bodies, in particular, during phase transitions in systems of bodies. The research results obtained using parametric identification and Ansys software are in good agreement. However, the method

we have considered, in contrast to the Ansys software, allows not only to determine the temperature at different points of the object, but also to restore the non-stationary heat flow at the object boundary as well as to refine its thermophysical properties. The considered method of parametric identification of the differential-difference model of heat transfer can be successfully used in determining the efficiency of heat energy storage devices.

**Keywords**

differential-difference model, spherical body, spherical symmetry, Kalman filter, parametric identification, heat measurement

**For citation:** Pilipenko N.V., Kolodiychuk P.A., Zarichnyak Yu.P. Differential-difference model of heat transfer in solids using the method of parametric identification. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 6, pp. 1237–1240 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-6-1237-1240

В настоящее время актуальным является решение прямых и обратных задач теплопроводности при известных граничных условиях, в особенности если внутри тела или системы тел происходят фазовые переходы. Существуют различные методы восстановления нестационарной температуры при решении прямых задач теплопроводности и нестационарного теплового потока обратных задач теплопроводности. В работе [1] приведено описание метода параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса на основе рекуррентных алгоритмов фильтра Калмана, который позволил решить ряд сложных нестационарных задач [2–8]. Алгоритмы программ для решения ряда прямых и обратных задач теплопроводности при использовании дифференциально-разностных моделей и неопределенности, полученные при решении различных задач, приведены в работах [2–8].

Представляет интерес использование подхода [2–8] в аккумуляторах тепловой энергии [9, 10] с целью увеличения эффективности действующего объекта. В отличие от рассмотренных в [2–8] задач, где выполнен анализ тела или системы тел в виде плоских стенок с расположенными на их поверхностях преобразователями теплового потока, в работах [9, 10] аккумулятор имеет сферическую форму со специфическими процессами теплопереноса.

Отметим, что в настоящей работе использован оригинальный расширенный фильтр Калмана, который позволяет учесть нелинейность задачи, а именно зависимость теплофизических свойств от температуры.

Цель работы — получение дифференциально-разностной модели теплопереноса сферического тела и определение адекватности разработанной модели реальному процессу теплообмена в процессе решения прямой задачи теплопроводности с использованием расширенного фильтра Калмана и с помощью программного обеспечения (ПО) «Ansys».

В качестве физической модели выбран стальной шарик диаметром 30 мм, находящийся в текучей среде, температура которой меняется по гармоническому закону  $t_{cp} = 100\sin(5\tau)$ . Гидродинамические параметры среды таковы, что коэффициент теплоотдачи к поверхности шарика постоянен и равен  $\alpha = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . Требуется установить динамику температуры центральной части исследуемого тела.

Решение задач выполнено на основании алгоритма, рассмотренного в работах [1, 3]: объект условно разбит на  $n$  блоков (например  $n = 20$ ), и для каждого составлено уравнение теплового баланса.

После проведения ряда преобразований составлена дифференциально-разностная модель процесса теплопереноса от первого до последнего блока с указанием граничного условия на первом блоке.

В общем случае дифференциально-разностная модель имеет вид [1]

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{T}(\tau) + \mathbf{G}(\tau)\mathbf{U}(\tau),$$

где  $\mathbf{F}(\tau)$  и  $\mathbf{G}(\tau)$  — матрицы обратных связей и управления;  $\mathbf{U}(\tau)$  и  $\mathbf{T}(\tau)$  — вектора управления и состояния;  $\tau$  — время.

Приведем выражения для расчета скоростей изменения температуры на первом (внешнем), втором, девятнадцатом и двадцатом (центральном) блоках исследуемого тела в связи с наличием ряда особенностей при их выводе. Выражения для скоростей изменения температуры блоков 3–19 идентичны второму, поэтому выражения 3–18 не приводятся.

$$\frac{dt_1}{d\tau} = \frac{3q(\tau)S}{4c\rho\pi(R_2^3 - R_1^3)} - \frac{3aS_1t_2}{(R_1^{-1} - R_2^{-1})(R_2^3 - R_1^3)} + \frac{3aS_1t_1}{(R_1^{-1} - R_2^{-1})(R_2^3 - R_1^3)^2}$$

$$\frac{dt_2}{d\tau} = \frac{3aS_2t_3}{(R_2^{-1} - R_3^{-1})(R_3^3 - R_2^3)} -$$

$$-\left(\frac{S_2}{(R_2^{-1} - R_3^{-1})} - \frac{S_1}{(R_1^{-1} - R_2^{-1})}\right)3at_2 + \frac{3aS_1t_1}{(R_1^{-1} - R_2^{-1})(R_3^3 - R_2^3)^2}$$

$$\frac{dt_{19}}{d\tau} = \frac{3aS_{19}t_{20}}{(R_{19}^{-1} - R_{20}^{-1})(R_{20}^3 - R_{19}^3)} -$$

$$-\left(\frac{S_{19}}{(R_{19}^{-1} - R_{20}^{-1})} - \frac{S_{18}}{(R_{18}^{-1} - R_{19}^{-1})}\right)3at_{19} + \frac{3aS_{18}t_{18}}{(R_{18}^{-1} - R_{19}^{-1})(R_{20}^3 - R_{19}^3)^2}$$

$$\frac{dt_{20}}{d\tau} = -\frac{3aS_{19}t_{20}}{(R_{19}^{-1} - R_{20}^{-1})(R_{20}^3 - R_{19}^3)} +$$

$$+\frac{3aS_{19}t_{19}}{(R_{19}^{-1} - R_{20}^{-1})(R_{20}^3 - R_{19}^3)^2}$$

где  $q(\tau)$  — поступающий на поверхность тела нестационарный тепловой поток;  $\tau$  — время;  $\alpha = \frac{\lambda}{c\rho}$  — темпе-

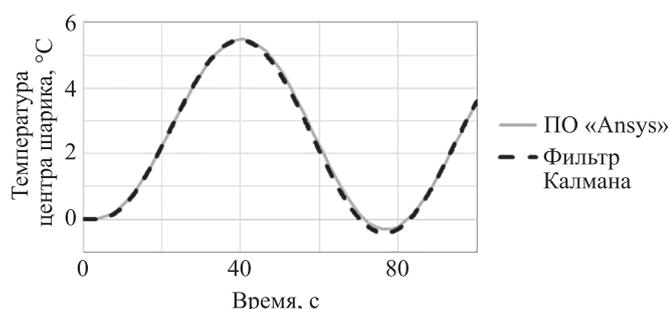


Рисунок. Результаты решения прямой задачи теплопроводности  
Figure. The results of solving the direct problem of heat conduction

ратуропроводность;  $i$  — номер блока;  $t_i$  — температура  $i$ -го блока;  $R_i$  — внешний радиус  $i$ -го блока;  $c$  — удельная теплоемкость;  $\rho$  — плотность;  $\lambda$  — теплопроводность;  $S_i$  — площадь внешней поверхности  $i$ -го блока.

На рисунке представлены результаты расчета температуры центра модельного шара при выбранном законе изменения температуры окружающей среды. Расчеты выполнены с использованием метода параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей процесса теплопереноса и численного метода ПО «Ansys».

Результаты, полученные с помощью метода параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей процесса теплопереноса и ПО «Ansys», совпадают при решении прямой задачи, что говорит об адекватности выбранной модели теплопереноса. Отметим, что рассмотренный метод параметрической идентификации, в отличие от численного ПО, позволил не только определить температуру в разных точках объекта, но и восстановить значение нестационарного теплового потока на границе объекта и уточнить его теплофизические свойства.

#### Литература

1. Пилипенко Н.В., Заричняк Ю.П., Иванов В.А., Халявин А.М. Параметрическая идентификация дифференциально-разностных моделей теплопереноса в одномерных телах на основе алгоритмов фильтра Калмана // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 4. С. 584–588. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-4-584-588>
2. Кириллов К.В., Пилипенко Н.В. Алгоритмы программ для решения прямых и обратных задач теплопроводности при использовании дифференциально-разностных моделей // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2010. № 5(69). С. 106–110.
3. Пилипенко Н.В. Неопределенность восстановления нестационарного теплового потока путем параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей теплопереноса // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 7. С. 664–671. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2017-60-7-664-671>
4. Pilipenko N.V., Gladskih D.A. Determination of the heat losses of buildings and structures by solving inverse heat conduction problems // Measurement Techniques. 2014. V. 57. N 2. P. 181–186. <https://doi.org/10.1007/s11018-014-0427-y>
5. Сиваков И.А., Пилипенко Н.В. Применение фильтра Калмана при восстановлении плотности теплового потока на поверхности объекта исследования в импульсной аэродинамической трубе // Сборник докладов IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Информационные технологии в науке, образовании и экономике». 2012. С. 55–58.
6. Пилипенко Н.В. Динамические характеристики различных типов приемников тепловых потоков на основе дифференциально-разностных моделей теплопереноса // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2009. № 3(61). С. 52–58.
7. Пилипенко Н.В. Неопределенность измерения нестационарной температуры поверхности массивных тел // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2016. Т. 59. № 9. С. 767–772. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2016-59-9-767-772>
8. Пилипенко Н.В. Использование расширенного фильтра Калмана в нестационарной теплотометрии при решении обратных задач

#### References

1. Pilipenko N.V., Zarichnyak Yu.P., Ivanov V.A., Khalyavin A.M. Parametric identification of differential-difference models of heat transfer in one-dimensional bodies based on Kalman filter algorithms. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 584–588. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-4-584-588>
2. Kirillov K., Pilipenko N. Solution algorithms for direct and backward heat conductivity problems by means of differential-difference models. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2010, no. 5(69), pp. 106–110. (in Russian)
3. Pilipenko N.V. Uncertainty of non-stationary heat flux recovery by parametric identification of differential-difference model of heat transmission. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, vol. 60, no. 7, pp. 664–671. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2017-60-7-664-671>
4. Pilipenko N.V., Gladskih D.A. Determination of the heat losses of buildings and structures by solving inverse heat conduction problems. *Measurement Techniques*, 2014, vol. 57, no. 2, pp. 181–186. <https://doi.org/10.1007/s11018-014-0427-y>
5. Sivakov I.A., Pilipenko N.V. Kalman filter application when restoring heat flux density on study object surface in pulsed wind tunnel. *Proc. IV All-Russian Scientific-Practical Conference with International Participation "Information Technologies in Science, Education and Economy"*, 2012, pp. 55–58. (in Russian)
6. Pilipenko N. Dynamic characteristics for different types of heat flow receivers based on differential-difference models of heat transfer. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2009, no. 3(61), pp. 52–58. (in Russian)
7. Pilipenko N.V. The uncertainty of measuring unsteady surface temperature of massive bodies. *Journal of Instrument Engineering*, 2016, vol. 59, no. 9, pp. 767–772. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2016-59-9-767-772>
8. Pilipenko N.V. Using the extended Kalman filter in nonstationary thermal measurement when solving inverse heat transfer problems. *Journal of Instrument Engineering*, 2019, vol. 62, no. 3, pp. 212–217. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2019-62-3-212-217>
9. Bosholm F., López-Navarro A., Gamarra M., Corberán J.M., Payá J. Reproducibility of solidification and melting processes in a latent heat thermal storage tank. *International Journal of Refrigeration*, 2016, vol. 62, pp. 85–96. <https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2015.10.016>

- теплопроводности // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2019. Т. 62. № 3. С. 212–217. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2019-62-3-212-217>
9. Bosholm F., López-Navarro A., Gamarra M., Corberán J.M., Payá J. Reproducibility of solidification and melting processes in a latent heat thermal storage tank // International Journal of Refrigeration. 2016. V. 62. P. 85–96. <https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2015.10.016>
10. Sharma A., Tyagi V.V., Chen C.R., Buddhi D. Review on thermal energy storage with phase change materials and applications // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2009. V. 13. N 2. P. 318–345. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2007.10.005>

#### Авторы

**Пилипенко Николай Васильевич** — доктор технических наук, профессор, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 7006938207](https://orcid.org/0000-0001-9328-3166), <https://orcid.org/0000-0001-9328-3166>, [pilipenko38@mail.ru](mailto:pilipenko38@mail.ru)

**Колодийчук Павел Андреевич** — аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0002-9984-1613>, [pkolodiychuk@itmo.ru](mailto:pkolodiychuk@itmo.ru)

**Заричняк Юрий Петрович** — доктор физико-математических наук, профессор, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 6701513411](https://orcid.org/0000-0001-8713-3583), <https://orcid.org/0000-0001-8713-3583>, [zarich4@gmail.com](mailto:zarich4@gmail.com)

#### Authors

**Nikolai V. Pilipenko** — D. Sc., Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 7006938207](https://orcid.org/0000-0001-9328-3166), <https://orcid.org/0000-0001-9328-3166>, [pilipenko38@mail.ru](mailto:pilipenko38@mail.ru)

**Pavel A. Kolodiychuk** — PhD Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0002-9984-1613>, [pkolodiychuk@itmo.ru](mailto:pkolodiychuk@itmo.ru)

**Yuri P. Zarichnyak** — D. Sc. (Physics & Mathematics), Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 6701513411](https://orcid.org/0000-0001-8713-3583), <https://orcid.org/0000-0001-8713-3583>, [zarich4@gmail.com](mailto:zarich4@gmail.com)

Статья поступила в редакцию 16.07.2022  
Одобрена после рецензирования 25.10.2022  
Принята к печати 16.11.2022

Received 16.07.2022  
Approved after reviewing 25.10.2022  
Accepted 16.11.2022



Работа доступна по лицензии  
Creative Commons  
«Attribution-NonCommercial»