НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
сентябрь–октябрь 2023 Том 23 № 5 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
September–October 2023 Vol. 23 No 5 http://ntv.ifmo.ru/en/
ISSN 2226-1494 (print) ISSN 2500-0373 (online)

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РОБОТОТЕХНИКА

AUTOMATIC CONTROL AND ROBOTICS

doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-5-886-893
УДК 62.50

Метод поиска функции Ляпунова для анализа устойчивости нелинейных систем с использованием генетического алгоритма

Артемий Михайлович Зенкин[1]✉, Алексей Алексеевич Перегудин[2], Алексей Алексеевич Бобцов[3]

[1,2,3] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

[1] a.zenkin@itmo.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8871-3835
[2] peregudin@itmo.ru, https://orcid.org/0000-0002-9092-5482
[3] bobtsov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1854-6717

Аннотация

Введение. Рассмотрен широкий класс гладких непрерывных динамических нелинейных систем (объектов управления) с измеряемым вектором состояния. Поставлена задача поиска специальной функции (функции Ляпунова), которая в рамках второго метода Ляпунова гарантирует асимптотическую устойчивость для представленного класса нелинейных систем. Известно, что поиск функции Ляпунова является крайне сложной задачей, не имеющей универсального решения в теории устойчивости. Методы подбора или поиска функции Ляпунова для анализа устойчивости замкнутых линейных стационарных систем и для нелинейных объектов с явно выраженными линейной динамической и нелинейной статической частями хорошо изучены. Вместе с тем универсальных подходов к поиску функции Ляпунова для более общего класса нелинейных систем не выявлено. В работе предложен новый подход к поиску функции Ляпунова для анализа устойчивости гладких непрерывных динамических нелинейных систем с измеряемым вектором состояния. **Метод.** Сущность предлагаемого подхода состоит в представлении некоторой функции через сумму нелинейных слагаемых, являющихся возведенными в положительные степени элементами вектора состояния объекта, умноженными на неизвестные коэффициенты. Поиск этих коэффициентов осуществлен с использованием классического генетического алгоритма, включающего операции мутации, селекции и кроссовера. Найденные коэффициенты обеспечивают все необходимые условия для функции Ляпунова (в рамках второго метода Ляпунова). Подход на основе генетического алгоритма не требует обучающей выборки, которая накладывает ограничения в виде структуры объектов управления, включенных в нее. **Основные результаты.** Предложен новый метод поиска функции Ляпунова, представленной в виде нелинейного ряда с известными функциями, умноженными на неизвестные коэффициенты. Эффективность метода продемонстрирована с использованием компьютерных симуляций с фиксированным количеством итераций и изменяющимся размером популяции. Установлена зависимость количества успешно найденных функций Ляпунова от количества итераций генетического алгоритма. Выполнен анализ сходимости генетического алгоритма с использованием схем Холланда. Показано, что значения искомых коэффициентов потенциальной функции Ляпунова на каждой итерации алгоритма приближаются к коэффициентам функции Ляпунова, представленной в виде ряда Тейлора. **Обсуждение.** Предложенный метод превосходит известные аналоги по быстродействию, рассматривает разложение потенциальной функции Ляпунова в ряд Тейлора с неизвестными коэффициентами, вместо использования контрпримеров или шаблонных функций.

Ключевые слова

функция Ляпунова, математическая устойчивость, машинное обучение, генетический алгоритм, функция ценности, математический маятник

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 23-16-00224).

Ссылка для цитирования: Зенкин А.М., Перегудин А.А., Бобцов А.А. Метод поиска функции Ляпунова для анализа устойчивости нелинейных систем с использованием генетического алгоритма // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 5. С. 886–893. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-5-886-893

Lyapunov function search method for analysis of nonlinear systems stability using genetic algorithm

Artemii M. Zenkin[1]✉, Alexey A. Peregudin[2], Alexey A. Bobtsov[3]

[1,2,3] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

[1] a.zenkin@itmo.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8871-3835

[2] peregudin@itmo.ru, https://orcid.org/0000-0002-9092-5482

[3] bobtsov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1854-6717

Abstract

A wide class of smooth continuous dynamic nonlinear systems (control objects) with a measurable state vector is considered. The problem of finding a special function (Lyapunov function), which guarantees asymptotic stability for the presented class of nonlinear systems in the framework of the second Lyapunov method, is posed. It is known that the search for the Lyapunov function is an extremely difficult problem that has no universal solution in stability theory. The methods of selection or search of the Lyapunov function for stability analysis of closed linear stationary systems and for nonlinear objects with explicitly expressed linear dynamical and nonlinear static parts are well studied. At the same time, no universal approaches to finding the Lyapunov function for a more general class of nonlinear systems have been identified. In this paper, we propose a new approach to the search of the Lyapunov function for analyzing the stability of smooth continuous dynamic nonlinear systems with a measurable state vector. The essence of the proposed approach consists in the representation of some function through the sum of nonlinear summands representing the elements of the object state vector multiplied by unknown coefficients. The search for these coefficients is performed using a classical genetic algorithm including mutation, selection, and crossover operations. The found coefficients provide all the necessary conditions for the Lyapunov function (within the framework of the second Lyapunov method). The genetic algorithm approach does not require a training sample which imposes restrictions in the form of the structure of control objects included in it. A new method for finding the Lyapunov function represented as a nonlinear series with known functions multiplied by unknown coefficients is proposed. The effectiveness of the proposed method is demonstrated using computer simulations with a fixed number of iterations and varying population size. The dependence of the number of successfully found Lyapunov functions on the number of iterations of the genetic algorithm has been established. The convergence of the genetic algorithm using Holland's schemes is analyzed. It is shown that the values of the sought coefficients of the potential Lyapunov function, at each algorithm iteration, approach the coefficients of the Lyapunov function which was also represented as a Taylor series. The method proposed in this paper outperforms known analogs in terms of speed, considers the decomposition of the potential Lyapunov function into a Taylor series with unknown coefficients, instead of using counterexamples or template functions.

Keywords

Lyapunov function, mathematical stability, machine learning, genetic algorithm, value function, mathematical pendulum

Acknowledgements

The study was supported by the Russian Science Foundation grant (Project 23-16-00224).

For citation: Zenkin A.M., Peregudin A.A., Bobtsov A.A. Lyapunov function search method for analysis of nonlinear systems stability using genetic algorithm. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 5, pp. 886–893 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-5-886-893

Введение

Анализ устойчивости нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, является фундаментальной проблемой в теории управления. Для анализа устойчивости часто используется второй метод Ляпунова, который заключается в поиске положительной функции, убывающей вдоль траекторий динамической системы [1–3]. Поиск функции Ляпунова в общем виде — трудная и нетривиальная задача, активно исследуемая научным сообществом в течение многих лет. Существуют аналитические методы поиска функции Ляпунова для нелинейных систем [4–6], но они имеют высокую вычислительную сложность и не всегда позволяют подобрать функцию Ляпунова [7]. В ряде случаев применяются численные методы поиска [8], которые также достаточно сложны и часто не имеют аналитической обоснованности [9]. Однако для нелинейных систем не существует общего метода поиска функции Ляпунова [10]. В работах [11, 12] рассмотрены подходы с использованием технологий машинного обучения, в которых вручную подбираются шаблоны функций Ляпунова, на основе которых выполняется обучение алгоритма и дальнейший поиск решения. Наряду с зарубежными исследователями аналогичной тематикой активно занимаются отечественные ученые. Так, в работе [13] описан метод по восстановлению функциональных зависимостей, с использованием статистических данных. В [14] предложен метод формирования функции Ляпунова с использованием нейронных сетей и целочисленного линейного программирования.

Однако универсальных подходов к поиску функции Ляпунова для более общего класса нелинейных систем так и не выявлено. Существует большое разнообразие методов поиска функции Ляпунова для нелинейных систем, но все они работают в рамках заданных на структуру объекта управления ограничений. В настоящей работе представлено развитие перечисленных подходов. В предложенном подходе использована вместо подбираемых вручную шаблонов функция, представленная в виде ряда Тейлора с неизвестными коэффициентами/параметрами, поиск которых осуществлен с помощью машинного обучения. В работе расширены результаты, полученные в работе [15], в части улучшения ряда качественных характеристик, связанных с синтезом функции Ляпунова.

Цель работы — создание нового метода синтеза (поиска) функции Ляпунова для широкого класса гладких непрерывных динамических нелинейных систем с измеряемым вектором состояния. Метод основан на разложении потенциальной функции Ляпунова в бесконечную сумму степенных функций и эффективный алгоритм машинного обучения, осуществляющий роль поиска коэффициентов ряда. В качестве алгоритма машинного обучения применен генетический алгоритм из семейства метаэвристических алгоритмов.

Эффективность предложенного метода оценена на примере. Полученные результаты показали, что метод достиг более широких областей выполнения условий теоремы Ляпунова, чем подход, представленный в работе [15], за более короткое время. Отметим, что разработанный метод обеспечивает значительные гарантии в рамках альтернатив (асимптотическая устойчивость) и не полагается на заранее подготовленные вручную шаблоны функций Ляпунова.

Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную автономную систему:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояния в момент времени t; $f{:}D \to \mathbb{R}^n$ — липшицево отображение из произвольной области $D \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что в области D имеется точка/положение равновесия, т. е. такая точка $\bar{x} \in D$, для которой выполнено $f(\bar{x}) = 0$.

Замечание 1. Следует отметить, что анализ устойчивости положения равновесия $\bar{x}$ системы (1) является следствием решения задачи синтеза стабилизирующего регулятора. Иными словами, математическая модель (1) может рассматриваться в качестве замкнутой системы, полученной с использованием обратной связи для некоторого номинального нелинейного объекта вида

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + g(x(t), u(t)), \tag{2}$$

где f_0: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и g: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — известные функции; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — сигнал управления, обеспечивающий замкнутой системе (2) асимптотическую устойчивость и выбираемый таким образом, чтобы для (1) существовала функция Ляпунова $V(x)$ с заданными свойствами (т. е. $V(x) > 0$ и $\dot{V}(x) < 0$ во всех точках, кроме точки равновесия).

Допущение 1. Существует такая асимптотически устойчивая точка равновесия $\bar{x}$ системы (1), что $f_0(\bar{x}) = 0$, а также такая функция Ляпунова $V(x)$, что $V(\bar{x}) = 0$, $V(x) > 0$, $\dot{V}(x) < 0$ при $x \neq \bar{x}$.

Допущение 2. Функция $V(x)$ допускает разложение в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия $\bar{x}$, сходящийся к ней во всех точках $x \in D$.

Согласно Допущениям 1–2 для системы (1) существует функция Ляпунова, представимая в виде ряда Тейлора

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{m=0}^{N} \sum_{k_1+\ldots+k_n=m} \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^{k_i}}{k_i!} \frac{\partial^m V}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_2) + \\ + R_N(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где R_N — остаточный член ряда Тейлора.

Назовем *потенциальной функцией Ляпунова* функцию вида

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{m=0}^{N} \sum_{k_1+\ldots+k_n=m} \prod_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^{k_i} p_{k_1,\ldots,k_n}, \tag{4}$$

где $p_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{R}$ — числовые параметры, подлежащие определению. Если эти параметры найдены точно, т. е. если выполнено

$$p_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{1}{k_i!} \frac{\partial^m V}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_2),$$

то потенциальная функция (4) совпадает с функцией Ляпунова (3) с точностью до остаточного члена. Из Допущения 2 следует, что $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при всех $(x_1, \ldots, x_n) = x \in D$, следовательно в области D функция V может быть сколько угодно хорошо приближена функцией L за счет правильного выбора параметров $p_{k_1,\ldots,k_n}$.

Таким образом, с учетом Допущений 1–2 и формулы (4), сформулируем дополнительную цель настоящей работы — разработка нового метода поиска параметров $p_{k_1,\ldots,k_n}$, обеспечивающих (4) свойства функции Ляпунова.

Поиск параметров $p_{k_1,\ldots,k_n}$ осуществлен на базе генетического алгоритма, работа которого построена на предположении, что если параметры $p_{k_1,\ldots,k_n}$ выбраны правильно, то для функции L будут выполнены условия теоремы Ляпунова:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \tag{5}$$

$$\dot{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i = \\ = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial L}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

По определению $L(\bar{x}) = 0$, поэтому данное условие не будет проверяться в процессе поиска функции. Оценку выполнения условий (5) и (6) возможно произвести с помощью функции ценности (функции затрат) специального вида.

Формирование функции ценности для генетического алгоритма

Генетический алгоритм [16, 17] относится к метаэвристическим алгоритмам, в основе которых лежит биологический принцип естественного отбора, основанный на соревновании между популяциями. Оценкой эффективности популяции служит целевая функция, которая показывает, насколько хорошо данный закон ее оптимизирует, также ее называют функцией затрат. Комбинации параметров, которые наиболее успешно справились со своей задачей, порождают новое поколение, которое должно быть эффективнее предыдущего. Основная задача — выявить наиболее эффективные наборы комбинаций из текущего поколения и передать их в следующее с использованием генетических операций для порождения более эффективных комбинаций.

Обозначим функцию ценности как $J(p)$, где p — набор коэффициентов вида $p_{k_1,\ldots,k_n}$, которые подлежат оптимизации (в данной работе они являются коэффициентами перед каждым членом ряда Тейлора). Данная функция принимает значения в диапазоне от 0 до 1 включительно, где 0 — наилучшее решение, 1 — наихудшее решение. Пусть имеется нелинейная автономная система (1) и потенциальная функция Ляпунова (4). Рассмотрим ограниченную область Ω, в каждой точки которой проверим условия теоремы Ляпунова. Обозначим точки, которые удовлетворяют условиям теоремы как X, не удовлетворяют — Y.

$$\nabla L(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}\dot{x}_i = \\ = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | \nabla L(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \\ < 0 \wedge L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0\}, \tag{8}$$

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n | \nabla L(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \\ \geq 0 \vee L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0\}. \tag{9}$$

Тогда эффективность параметров, подобранных алгоритмом [18], определим как отношение числа точек, которые не удовлетворяют (9) теореме Ляпунова, к общему числу точек (7)–(9):

$$J(p) = \frac{|Y|}{|X| + |Y|}, \tag{10}$$

где $0 \leq J \leq 1$. Таким образом, при $J = 0$ будут выполнены все условия теоремы Ляпунова.

Алгоритм, представленный в работе [18], работает следующим образом. Создается начальная популяция потенциальных функций Ляпунова (размер популяции выбирается на стадии применения алгоритма исходя из имеющихся вычислительных ресурсов). Полученная популяция функций оценивается на основе заданных критериев, и лучшие функции сохраняются. Затем происходит скрещивание и мутация функций для создания новых «потомков», которые также оцениваются и сохраняются, если они лучше предыдущих. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдена наилучшая функция Ляпунова. В качестве обратной связи для алгоритма служит предложенная функция затрат или как ее еще называют «функция приспособленности» (10), в основе которой лежит проверка выполнения условий теоремы Ляпунова. Графическая визуализация предложенного алгоритма для системы с двумя состояниями представлена на рис. 1.

На рис. 1 область Ω, разделенная на малые квадратные области со стороной h. В центре каждой такой области была посчитана производная функции Ляпунова. $\dot{L}_{\text{отр}}$ — точка в области Ω, где производная функция Ляпунова отрицательна, $\dot{L}_{\text{пол}}$ — точка в области Ω, где производная функция Ляпунова положительна.

Пример реализации алгоритма

Выполним проверку работоспособности предложенного метода с помощью его сравнения с методом синтеза функции Ляпунова, основанным на контраргументах и нейронной сети [15]. В качестве сравнения возьмем планарную динамическую систему, описанную следующей моделью:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases} \tag{11}$$

где $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$.

Представим потенциальную функцию Ляпунова системы (11) по формуле (4), разложенную до третьей степени ($n = 2$, $N = 3$) в виде:

$$L(x_1, x_2) = p_{1,0}x_1 + p_{0,1}x_2 + p_{2,0}x_1^2 + p_{1,1}x_1x_2 + \\ + p_{0,2}x_2^2 + p_{3,0}x_1^3 + p_{2,1}x_1^2x_2 + p_{1,2}x_1x_2^2 + p_{0,3}x_2^3. \tag{12}$$

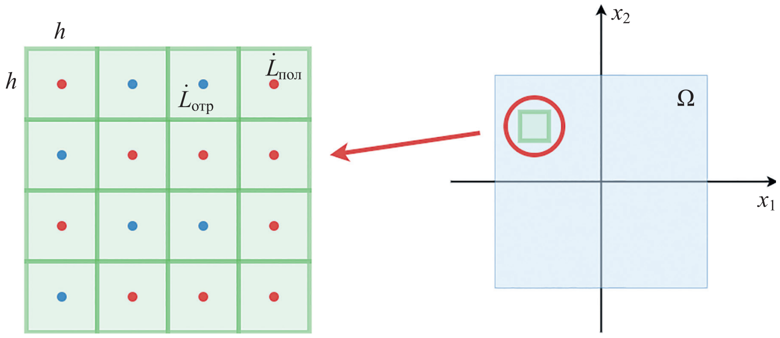


Рис. 1. Визуализация алгоритма работы функции ценности для двух состояний системы

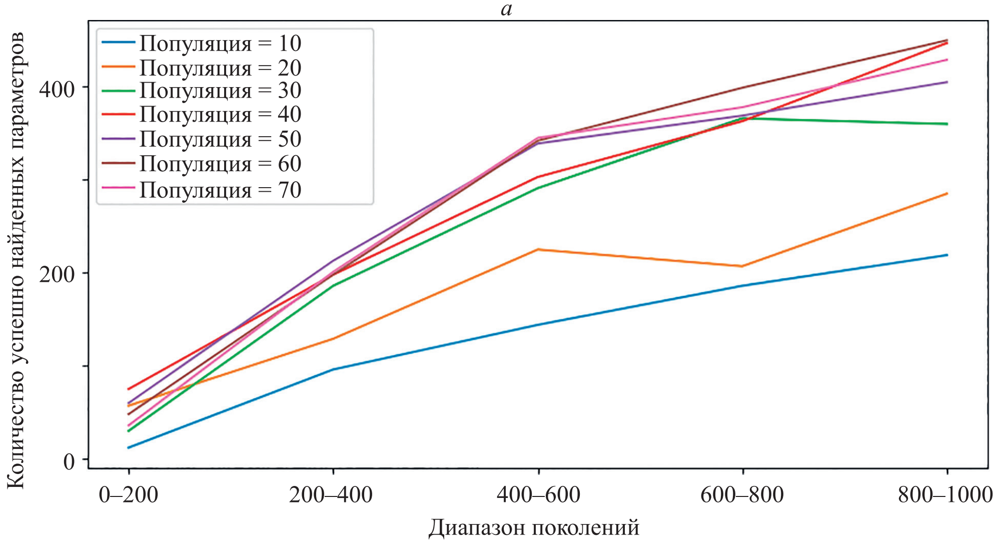
Fig. 1. Visualization of the value function algorithm

В качестве начальных условий для генетического алгоритма выберем следующие параметры: диапазон коэффициентов [–2; 2]; область Ω 1,0 × 1,0 рад; размер популяции 1000; вероятность мутации 20 %; вероятность кроссинговера 40 %; процент лучших наборов параметров, переходящих в следующую популяцию 1 %. Выполним сравнение области Ω и временных затрат на поиск функции Ляпунова (12), представленной в виде ряда Тейлора (таблица).

Как видно из таблицы, предложенный метод на основе алгоритма [18] обеспечивает более эффективный способ поиска функции Ляпунова с точки зрения временных затрат. Также можно сделать вывод, что предложенный алгоритм синтезировал функцию Ляпунова быстрее для областей 20, 100, 200 и 500. Дополнительно отметим, что в настоящей работе рассмотрена квадратная область, а в [15] — окружность. Таким образом осуществлена проверка условия теоремы Ляпунова для большей области.

Эффективность методов проверена путем варьирования размеров популяции от 10 до 70 с шагом 10 с фиксированным количеством итераций равной 1000. По результатам компьютерных симуляций построены зависимость значений функции ценности от поколений, а также зависимость количества успешных найденных параметров от диапазонов поколений D_1, D_2, D_3, D_4 и D_5 такими, что: $D_1 = \{x \in R: 0 < x \leq 200\}$; $D_2 = \{x \in R: 200 < x \leq 400\}$; $D_3 = \{x \in R: 400 < x \leq 600\}$; $D_4 = \{x \in R: 600 < x \leq 800\}$; $D_5 = \{x \in R: 800 < x \leq 1000\}$.

На рис. 2 видно, что с ростом размера популяции увеличивается количество успешных решений. Важно отметить, что формируются локальные минимумы, которые достаточно сложно покинуть за счет невозможности краткосрочно пренебречь функцией ценности, чтобы в будущем получить более оптимально решение. Многократное увеличение размера начальной популяции не приводит к соответствующему приросту эффективности поиска функции Ляпунова.



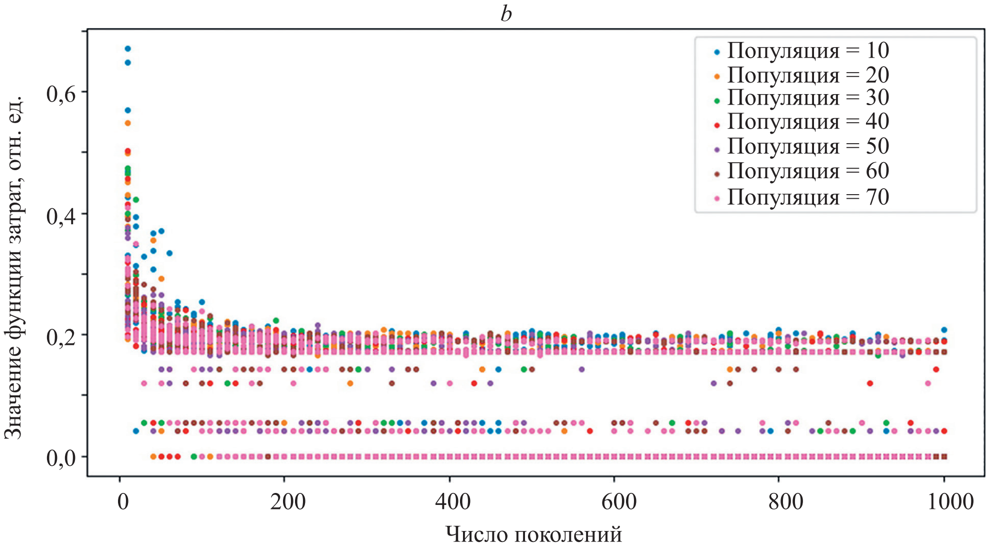


Рис. 2. Зависимости: количества успешно найденных параметров алгоритмом от числа поколений (*a*) и значения функции затрат от числа поколений алгоритма для различных размеров популяции (*b*)

Fig. 2. Dependence of cost function value on number vs. generations for different population values (*a*); Dependence of number of successfully found parameters vs. generation ranges (*b*)

Таблица. Результаты сравнения алгоритма [18] с предложенным в работе [15], выраженные временем (t, с), в зависимости от области Ω

Table. Results of comparison of our method with the one proposed in [15], expressed in time (t, s), depending on the area of Ω

Метод (алгоритм)	Область					
	10	20	50	100	200	500
Метод [15]	0,06	0,14	0,11	1,90	23,10	12,01
Алгоритм [18]	0,18	0,12	0,21	0,91	2,19	7,92

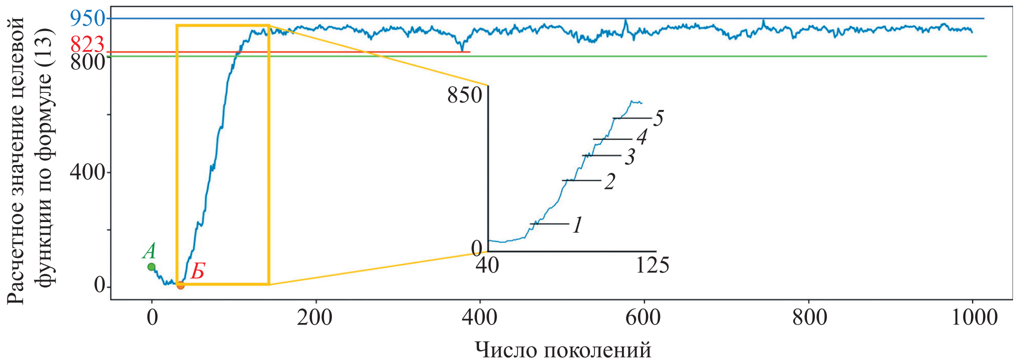


Рис. 3. Иллюстрация теоремы о схемах (13) для предлагаемого решения

Fig. 3. Illustration of the circuit theorem for the proposed solution

Оценка сходимости генетического алгоритма

Для теоретического анализа генетического алгоритма использована [19] теорема о схемах Холланда [20]. Суть теоремы заключается в том, что пригодность целевой функции гарантированно улучшается по мере увеличения числа итераций, другими словами, генетический алгоритм на каждом шаге приближается к истинному минимуму целевой функции. Математически это можно выразить следующим образом:

$$N(h, t+1) \geq N(h, t)\frac{f(h, t)}{f(t)}\left(1 - \frac{\sigma(h)}{l-1}p_c - o(h)p_m\right), \qquad (13)$$

где $N(h, t)$ — количество примеров схемы h на шаге t; $N(h, t+1)$ — количество примеров схемы h на шаге $t+1$; $f(h, t)$ — функция пригодности схемы на шаге t; $f(t)$ — среднее значение функции пригодности по всей популяции на шаге t; $\sigma(h)$ — определяющая длина схемы h; $o(h)$ — порядок схемы h; p_c — вероятность скрещивания; p_m — вероятность мутации; l — длина последовательности.

На рис. 3 показана иллюстрация неравенства (13) для предлагаемого в работе решения. Видно, что на участке АБ отсутствуют коэффициенты, вносящие наибольший вклад в функцию пригодности, поэтому наблюдается спад, который в то же время не пересекает отметку нуля. Далее идет экспоненциальный рост и попадание в интервал со значениями от 807,5 (зеленая линия на рис. 3) до 950. Интервал обусловлен вероятностью функции мутации генетического алгоритма, которая составляет 15 %. Экспериментально нижняя граница не опускалась ниже значения 823 (красная линия на рис. 3). Видны небольшие колебания в точках *1*–*5*, которые связаны с попаданием алгоритма в локальные минимумы, где большую составляющую играет функция мутации. В данных точках также отсутствуют колебания больше 15 %. Таким образом, данный график иллюстрирует выполнение оценки (13) и подтверждает, что известные аналитические результаты о характере сходимости генетических алгоритмов выполнены для предложенного в работе алгоритма.

Вывод

Предложен подход для синтеза функции Ляпунова для нелинейных динамических систем путем разложения потенциальной функции в ряд Тейлора, постоянные коэффициенты которого предполагались неизвестными. Поиск коэффициентов осуществлен с использованием генетического алгоритма. Предложен метод определения функции затрат для оценки эффективности поиска параметров генетическим алгоритмом. Проведен сравнительный анализ предложенного подхода [18] с альтернативным решением [15], использующим для синтеза функции Ляпунова технологии машинного обучения. Новый метод продемонстрировал большую эффективность с точки зрения временных затрат.

Заключение

Предложен метод поиска функции Ляпунова, в основе которого лежит технология машинного обучения. Данный подход характеризуется более общим подходом, поскольку рассмотрено разложение потенциальной функции в ряд Тейлора с неизвестными коэффициентами, вместо использования контрпримеров или шаблонных функций Ляпунова. Возможно применение метода для синтеза сигнала управления нелинейными системами, в основе которого использована функция

Ляпунова, поиск которой происходит через предложенный метод. Наряду с этим, функция затрат требует учет дополнительных параметров системы, а генетический алгоритм имеет тенденцию попадания в локальный минимум. Отмечен рост времени поиска функции Ляпунова с увеличением степени разложения ряда, что является обоснованным, так как затрачивается больше вычислительных ресурсов.

Литература

1. Li X., Yang X. Lyapunov stability analysis for nonlinear systems with state-dependent state delay // Automatica. 2020. V. 112. P. 108674–108680. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108674
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Strelbytskyy Multimedia Publishing, 2018. 545 с.
3. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
4. Wu Y., Xie X. A new analysis approach to the output constraint and its application in high-order nonlinear systems // Science China Information Sciences. 2023. V. 66. N 5. P. 159206. https://doi.org/10.1007/s11432-022-3572-7
5. Иванов С.Е., Телевной А.Д. Численно-аналитический метод преобразований для анализа нелинейных математических моделей полиномиальной структуры // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 2. С. 97–109. https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-97-109
6. Srivastava Y., Srivastava S., Chaudhary D., Blanco Valencia X.P. Performance improvement and Lyapunov stability analysis of nonlinear systems using hybrid optimization techniques // Expert Systems. 2022. P. e13140. in press. https://doi.org/10.1111/exsy.13140
7. Giesl P., Hafstein S. Computational methods for Lyapunov functions // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B. 2015. V. 20. N 8. P. i-ii. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.8i
8. Papachristodoulou A., Anderson J., Valmorbida G., Prajna S., Seiler P., Parrilo P., Peet M.M., Jagt D. SOSTOOLS Version 4.00 Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB // arXiv. 2013. arXiv:1310.4716. https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.4716
9. Hernández-Solano Y., Atencia M. Numerical methods that preserve a Lyapunov function for ordinary differential equations // Mathematics. 2022. V. 11. N 1. P. 71. https://doi.org/10.3390/math11010071
10. Hafstein S., Giesl P. Review on computational methods for Lyapunov functions // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B. 2015. V. 20. N 8. P. 2291–2331. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.2291
11. Verdier C.F., Mazo M. Formal synthesis of analytic controllers for sampled-data systems via genetic programming // Proc. of the 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2018. P. 4896–4901. https://doi.org/10.1109/CDC.2018.8619121
12. Ben Sassi M.A., Sankaranarayanan S., Chen X., Ábrahám E. Linear relaxations of polynomial positivity for polynomial Lyapunov function synthesis // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2016. V. 33. N 3. P. 723–756. https://doi.org/10.1093/imamci/dnv003
13. Бородин И.Д. Метод статистического синтеза функции Ляпунова для исследования устойчивости искусственного спутника Земли // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2022. Т. 26. № 3(97). С. 14–23. https://doi.org/10.54708/19926502_2022_2639714
14. Феофилов С.В., Козырь А.В., Хапкин Д.Л. Синтез гарантированно устойчивых нейросетевых регуляторов с оптимизацией качества переходного процесса // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2022. № 12. С. 128–133. https://doi.org/10.24412/2071-6168-2022-12-128-134
15. Abate A., Ahmed D., Giacobbe M., Peruffo A. Formal synthesis of Lyapunov neural networks // IEEE Control Systems Letters. 2021. V. 5. N 3. P. 773–778. https://doi.org/10.1109/LCSYS.2020.3005328
16. Lambora A., Gupta K., Chopra K. Genetic algorithm- a literature review // Proc. of the 2019 International Conference on Machine Learning, Big Data, Cloud and Parallel Computing (COMITCon). 2019. P. 380–384. https://doi.org/10.1109/COMITCon.2019.8862255
17. Katoch S., Chauhan S.S., Kumar V. A review on genetic algorithm: past, present, and future // Multimedia Tools and Applications. 2021. V. 80. N 5. P. 8091–8126. https://doi.org/10.1007/s11042-020-10139-6
18. Zenkin A.M., Peregudin A.A., Bobtsov A.A. Lyapunov function search method for analysis of nonlinear systems stability using

References

1. Li X., Yang X. Lyapunov stability analysis for nonlinear systems with state-dependent state delay. *Automatica*, 2020, vol. 112, pp. 108674–108680. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108674
2. Lyapunov A.M. *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor & Francis, 1992, 270 p.
3. Miroshnik I.V., Nikiforov V.O., Fradkov A.L. *Nonlinear Adaptive Control of Complex Dynamic Systems*. St. Petersburg, Nauka Publ., 2000, 549 p. (in Russian)
4. Wu Y., Xie X. A new analysis approach to the output constraint and its application in high-order nonlinear systems. *Science China Information Sciences*, 2023, vol. 66, no. 5, pp. 159206. https://doi.org/10.1007/s11432-022-3572-7
5. Ivanov S.E., Televnoy A.D. Numerical-analytical transformation method of analyzing nonlinear mathematical models with polynomial structure. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*, 2022, no. 2, pp. 97–109. (in Russian). https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-97-109
6. Srivastava Y., Srivastava S., Chaudhary D., Blanco Valencia X.P. Performance improvement and Lyapunov stability analysis of nonlinear systems using hybrid optimization techniques. *Expert Systems*, 2022, pp. e13140. in press. https://doi.org/10.1111/exsy.13140
7. Giesl P., Hafstein S. Computational methods for Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B*, 2015, vol. 20, no. 8, pp. i-ii. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.8i
8. Papachristodoulou A., Anderson J., Valmorbida G., Prajna S., Seiler P., Parrilo P., Peet M.M., Jagt D. SOSTOOLS Version 4.00 Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB. *arXiv*, 2013, arXiv:1310.4716. https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.4716
9. Hernández-Solano Y., Atencia M. Numerical methods that preserve a Lyapunov function for ordinary differential equations. *Mathematics*, 2022, vol. 11, no. 1, pp. 71. https://doi.org/10.3390/math11010071
10. Hafstein S., Giesl P. Review on computational methods for Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B*, 2015, vol. 20, no. 8, pp. 2291–2331. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.2291
11. Verdier C.F., Mazo M. Formal synthesis of analytic controllers for sampled-data systems via genetic programming. *Proc. of the 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2018, pp. 4896–4901. https://doi.org/10.1109/CDC.2018.8619121
12. Ben Sassi M.A., Sankaranarayanan S., Chen X., Ábrahám E. Linear relaxations of polynomial positivity for polynomial Lyapunov function synthesis. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2016, vol. 33, no. 3, pp. 723–756. https://doi.org/10.1093/imamci/dnv003
13. Borodin I.D. The method of statistical synthesis of the Lyapunov function for the study of the stability of an artificial Earth satellite. *Vestnik UGATU*, 2022, vol. 26, no. 3(97), pp. 14–23. (in Russian). https://doi.org/10.54708/19926502_2022_2639714
14. Feofilov S.V., Kozyr A.V., Khapkin D.L. Synthesis of guaranteed stable neural network controllers with transient quality optimization. *Proceedings of the TSU. Technical Sciences*, 2022, no. 12, pp. 128–133. (in Russian). https://doi.org/10.24412/2071-6168-2022-12-128-134
15. Abate A., Ahmed D., Giacobbe M., Peruffo A. Formal synthesis of Lyapunov neural networks. *IEEE Control Systems Letters*, 2021, vol. 5, no. 3, pp. 773–778. https://doi.org/10.1109/LCSYS.2020.3005328
16. Lambora A., Gupta K., Chopra K. Genetic algorithm- a literature review. *Proc. of the 2019 International Conference on Machine Learning, Big Data, Cloud and Parallel Computing (COMITCon)*, 2019, pp. 380–384. https://doi.org/10.1109/COMITCon.2019.8862255
17. Katoch S., Chauhan S.S., Kumar V. A review on genetic algorithm: past, present, and future. *Multimedia Tools and Applications*, 2021, vol. 80, no. 5, pp. 8091–8126. https://doi.org/10.1007/s11042-020-10139-6
18. Zenkin A.M., Peregudin A.A., Bobtsov A.A. Lyapunov function search method for analysis of nonlinear systems stability using

genetic algorithm // arXiv. 2023. arXiv:2307.03030. https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.03030
19. Wright A. The exact schema theorem // arXiv. 2011. arXiv:1105.3538. https://doi.org/10.48550/arXiv.1105.3538
20. Holland J.H. Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence. MIT Press, 1992. 232 p.

genetic algorithm. *arXiv*, 2023, arXiv:2307.03030. https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.03030
19. Wright A. The exact schema theorem. *arXiv*, 2011, arXiv:1105.3538. https://doi.org/10.48550/arXiv.1105.3538
20. Holland J.H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. MIT Press, 1992, 232 p.

Авторы

Зенкин Артемий Михайлович — ассистент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, sc 57215585919, https://orcid.org/0000-0002-8871-3835, a.zenkin@itmo.ru
Перегудин Алексей Алексеевич — кандидат технических наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, sc 57205219288, https://orcid.org/0000-0002-9092-5482, peregudin@itmo.ru
Бобцов Алексей Алексеевич — доктор технических наук, профессор, директор мегафакультета, профессор факультета систем управления и робототехники, руководитель Международного научного центра «Нелинейные и адаптивные системы управления», Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, sc 8046819200, https://orcid.org/0000-0003-1854-6717, bobtsov@mail.ru

Authors

Artemii M. Zenkin — Assistant, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, sc 57215585919, https://orcid.org/0000-0002-8871-3835, a.zenkin@itmo.ru
Alexey A. Peregudin — PhD, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, sc 57205219288, https://orcid.org/0000-0002-9092-5482, peregudin@itmo.ru

Alexey A. Bobtsov — D.Sc., Professor, Head of the School of Computer Technologies and Control, Professor at the Faculty of Control Systems and Robotics, Head of the Adaptive and Nonlinear Control Systems Lab, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, sc 8046819200, https://orcid.org/0000-0003-1854-6717, bobtsov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 28.04.2023
Одобрена после рецензирования 13.07.2023
Принята к печати 15.09.2023

Received 28.04.2023
Approved after reviewing 13.07.2023
Accepted 15.09.2023