

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РОБОТОТЕХНИКА AUTOMATIC CONTROL AND ROBOTICS

doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-1-33-41

УДК 519.71

Алгоритмы прямого адаптивного управления линейной системой по выходу с конечным временем настройки

Дмитрий Николаевич Герасимов¹, Дмитрий Леонидович Подошкин²✉,
Владимир Олегович Никифоров³

^{1,2,3} Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

¹ dngerasimov@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8306-4138>

² dpodoshkin@itmo.ru✉, <https://orcid.org/0009-0000-5189-7696>

³ nikiforov_vo@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4860-5407>

Аннотация

Введение. Рассмотрена задача прямого адаптивного управления с эталонной моделью линейными параметрически неопределенными системами с недоступным измерению вектором состояния. В целях адаптивной настройки параметров регулятора предлагается модификация градиентного алгоритма адаптации со сходимостью за конечное время. Модификация осуществляется путем периодического пересчета значений настраиваемых параметров с последующей подстановкой в качестве начальных условий на интеграторах стандартного градиентного алгоритма адаптации. Пересчет выполняется при обеспечении условия интервального возбуждения на основе предсказания динамики алгоритма адаптации, в результате точно идентифицируются параметры регулятора. **Метод.** Задача управления решается с помощью метода расширенной ошибки и метода непосредственной компенсации. Анализ замкнутой системы проводится на основе метода функций Ляпунова. **Основные результаты.** Предложена модификация градиентного алгоритма адаптации с ускоренной параметрической сходимостью за конечное время. **Обсуждение.** Модификация обеспечивает сходимость параметров при условии интервального возбуждения, которое является более слабым по отношению к условию не исчезающего возбуждения. Представленный алгоритм обладает чувствительностью к вариациям неизвестных параметров объекта и не требует в отличие от множества аналогичных решений повышения динамического порядка регулятора. Дополнительной особенностью нового алгоритма является возможность его использования в схемах как непрямого, так и прямого адаптивного управления.

Ключевые слова

адаптивное управление с эталонной моделью, алгоритм адаптации с конечным временем сходимости

Ссылка для цитирования: Герасимов Д.Н., Подошкин Д.Л., Никифоров В.О. Алгоритмы прямого адаптивного управления линейной системой по выходу с конечным временем настройки // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 1. С. 33–41. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-1-33-41

Algorithms of direct output-feedback adaptive control of a linear system with finite time tuning

Dmitry N. Gerasimov¹, Dmitry L. Podoshkin²✉, Vladimir O. Nikiforov³

^{1,2,3} ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

¹ dngerasimov@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8306-4138>

² dpodoshkin@itmo.ru✉, <https://orcid.org/0009-0000-5189-7696>

³ nikiforov_vo@itmo.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4860-5407>

Abstract

A problem of direct model reference adaptive control of parametrically uncertain systems with inaccessible for measurement state is considered in this paper. With the purpose of adaptive tuning of the controller parameters, a modification of the gradient adaptation algorithm with finite time convergence is proposed. The modification is

implemented by periodic recalculation of the adjustable parameters and further their replacement in the integrators of the gradient adaptation algorithm. Preliminary calculation is accomplished under condition of interval excitation based on prediction of the adaptation algorithm dynamics; hence the controller parameters are identified precisely. The control problem is solved with the use of augmented error approach and certainty equivalence principle. Analysis of the closed-loop system is made using the Lyapunov functions method. The modification ensures parametric convergence under interval excitation condition which is weaker than the persistent excitation one, sensitive to variations of the unknown parameters, and, in comparison with the variety of analogous solutions, does not require the dynamic order increasing. The other distinguishing feature of the algorithm is opportunity of its use in schemes of both indirect and direct adaptation.

Keywords

model reference adaptive control, adaptation algorithm with finite time convergence

For citation: Gerasimov D.N., Podoshkin D.L., Nikiforov V.O. Algorithms of direct output-feedback adaptive control of a linear system with finite time tuning. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2025, vol. 25, no. 1, pp. 33–41 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-1-33-41

Введение

Несмотря на то, что за последние десятилетия теория адаптивного управления получила существенное развитие, ряд вопросов, связанных с практической реализацией, остается открытым. В частности, существует необходимость в повышении быстродействия адаптивных систем за счет ускорения параметрической настройки закона управления. Как известно, основной проблемой большинства схем адаптации является зависимость скорости настройки параметров от условия неисчезающего возбуждения, которое на практике далеко не всегда выполнимо (особенно в задачах стабилизации). При этом для базового градиентного алгоритма адаптации (АА) вида $\dot{\psi} = \gamma \varphi \varepsilon$ [1, 2] даже при выполнении условия неисчезающего возбуждения скорость сходимости может быть произвольно медленной. С 60-х годов прошлого века предлагалось множество решений, основанных преимущественно на ускоренной идентификации параметров объекта с последующей подстановкой оценок параметров в закон управления. Например, Лайоном в работе [3] предложено решение, основанное на множественной фильтрации модели объекта с целью получения матрицы регрессора расширенной размерности, что позволило ускорить сходимость оценок параметров путем увеличения коэффициента адаптации. В [4] описан подход, в котором вместо множества фильтров использован один, позволяющий накапливать информацию о прошлом поведении регрессора и, как следствие, обеспечить ускорение сходимости. Альтернативные подходы к обеспечению экспоненциальной параметрической сходимости в задачах адаптивного управления при выполнении условия неисчезающего возбуждения и основанные на использовании алгоритмов настройки, построенных по методу наименьших квадратов, приведены в [5–7].

Схема Лайона получила свое развитие в методе множественных моделей [8] (ее применение к рассматриваемой задаче адаптивного управления линейным объектом по выходу приведено в [9]) и в методе динамического расширения регрессора и смешивания (ДРРС) [10]. В методе ДРРС показано, что за счет множественной фильтрации и с последующим домножением на сопряженную матрицу регрессора можно получить ускоренную и поэлементную монотонную сходимость оценок при условии не принадлежности

регрессора пространству L_2 — условию более слабом, чем условие неисчезающего возбуждения.

Логическим развитием перечисленных методов стало появление алгоритмов адаптации, обладающих сходимостью за конечное и фиксированное (предписанное) время [11–18]. В [11–13] сходимость алгоритма за конечное время обеспечивается за счет физически реализуемой с помощью SVD-разложения (регуляризованной) инверсии грамиана регрессора

$$\int_0^t \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau.$$

Одной из проблем рассмотренных подходов является возможное вырождение грамиана, особенно при невыполнении условия неисчезающего возбуждения. В [14, 15] предложен подход к построению АА с конечным и фиксированным временем сходимости на базе свойства однородности систем и использованием в алгоритмах дробных степеней и функций переключения. В работе [16] описан подход, позволяющий обеспечить фиксированное время сходимости алгоритма за счет растущего в бесконечность коэффициента адаптации, что с одной стороны позволяет говорить о качестве замкнутой системы, но с другой — ограничивает практическую применимость метода. В [17, 18], применительно к задаче адаптивного управления по выходу предложена модификация метода ДРРС, сходящаяся за конечное время при выполнении условия интервального возбуждения, также более слабого чем условие неисчезающего возбуждения. При этом в случае невыполнения условия интервального возбуждения алгоритм управления не способен выполнить предписанную цель. Особый класс алгоритмов настройки представляют так называемые конечно-сходящиеся и конечно-решающие алгоритмы решения рекуррентных неравенств, обеспечивающие достижение за конечное время заданных целевых условий (но, в общем случае, не параметрической сходимости) [19].

В настоящей работе в рамках решения задачи адаптивного управления линейным параметрически неопределенным объектом по выходу предлагается новый алгоритм адаптации простой структуры, лишенный указанных недостатков и инспирированный работами [17, 18]. В основе решения лежит градиентный алгоритм адаптации с обновлением начальных условий, которые пересчитываются на основе предсказания ди-

намики этого алгоритма. Доказано, что новый алгоритм обеспечивает сходимость за конечное время как при выполнении условия неисчезающего возбуждения, так и более слабого условия интервального возбуждения. Если оба условия не выполняются, то алгоритм работает как градиентный и в задаче адаптивного управления сохраняет гарантированное свойство сходимости ошибки управления к нулю.

Введем следующие определения [1, 2].

Определение 1. Ограниченная вектор-функция $\Phi(t)$ удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения ($\Phi \in PE$), если существуют константы α , $T > 0$ что выполняется неравенство

$$\int_t^{t+T} \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau \geq \alpha \mathbf{I} > 0 \text{ для всех } t > 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. ■

Определение 2. Ограниченная вектор-функция $\Phi(t)$ удовлетворяет условию интервального возбуждения ($\Phi \in IE$), если существуют константы α , t_0 , $T > 0$, что выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau \geq \alpha \mathbf{I} > 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. ■

Замечание 1. Согласно определениям 1 и 2

$$\alpha \in (0, T^2 \|\Phi(t)\|_\infty^2]. \quad \blacksquare$$

Постановка задачи

Рассмотрим объект управления

$$y = \frac{b(s)}{a(s)}[u] = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_0} [u], \quad (3)$$

где $y \in \mathbb{R}$ — регулируемая переменная; $u \in \mathbb{R}$ — сигнал управления; $a_i, b_j \in (i \in 0, 1, \dots, n-1, j \in 0, 1, \dots, m)$ — неизвестные постоянные коэффициенты полиномов $a(s)$ и $b(s)$.

Примем следующее допущение.

Допущение 1. Класс объектов (3) ограничен следующими условиями:

Д1.1. Полиномы $a(s)$ и $b(s)$ не имеют общих корней;

Д1.2. Значения n и m известны;

Д1.3. Полином $b(s)$ гурвицев;

Д1.4. Знак коэффициента b_m известен. Без потери общности будем полагать, что $b_m \in \mathbb{R}_+$. Известна величина $\bar{b}_m : b_m \geq \bar{b}_m$. ■

Допущение является стандартным в задачах адаптивного управления по выходу [1, 2].

Сформулируем цель поставленной задачи:

— выполнение синтеза алгоритма адаптивного управления, который обеспечивает ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y_m(t) - y(t)) = 0,$$

где $\varepsilon(t)$ — ошибка управления; $y_m(t)$ — выход эталонной модели

$$y_m = \frac{a_{m0}}{a_m(s)}[g] = \frac{a_{m0}}{s^p + a_{mp-1}s^{p-1} + a_{mp-2}s^{p-2} + \dots + a_{m0}}[g]$$

с гурвицевым полиномом $a_m(s)$ порядка $p = n - m$, непрерывным и ограниченным сигналом задания g ;

— обеспечение возможности ускорения параметрической настройки регулятора и, как следствие, ускорения сходимости ошибки управления к нулю.

Предварительные результаты

Для построения настраиваемого регулятора осуществим параметризацию объекта управления.

Лемма 1 [1, 2, 20]. Введем в рассмотрение вспомогательные фильтры:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_1 &= \Lambda \mathbf{v}_1 + \xi_{n-1} u, \\ \dot{\mathbf{v}}_2 &= \Lambda \mathbf{v}_2 + \xi_{n-1} y, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — векторы состояния фильтров; $\xi_{n-1} = [0 \dots 0 \ 1]^T$; Λ — произвольная гурвицева матрица, которая имеет вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \dots & \dots & -\lambda_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Тогда для ошибки управления ε справедлива следующая параметризованная модель

$$\varepsilon = \frac{1}{a_m(s)} [a_{m0} g + \theta^T \omega - b_m u] + \epsilon, \quad (5)$$

где $\omega = [y, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^T - 2n-1$ -мерный вектор, включающий векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ состояния фильтров; $\theta \in \mathbb{R}^{2n-1}$ — вектор неизвестных параметров; $\epsilon(t)$ — экспоненциально затухающая функция, вызванная ненулевыми начальными условиями. ■

Замечание 2. Наличие экспоненциально затухающего сигнала $\epsilon(t)$ не влияет на устойчивость замкнутой адаптивной системы [1, 2, 21], однако влияет на скорость настройки параметров. Для упрощения изложения основного результата настоящей работы, гарантирующего сходимость параметров регулятора за конечное время, предположим, что $\epsilon(t) \equiv 0$ (что справедливо, например, после момента времени, когда $\epsilon(t)$ примет пренебрежимо малое в сравнении с вычислительной точностью системы управления значение). ■

На основе выражения (5) выберем настраиваемый закон управления

$$u = \frac{1}{\hat{b}_m} (\hat{\theta}^T \omega + a_{m0} g), \quad (6)$$

где $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{2n-1}$ и $\hat{b}_m \in \mathbb{R}$ — настраиваемые параметры, соответствующие вектору θ и постоянной b_m .

Подставляя (6) в (5) (исключая ϵ согласно замечанию 2), после простейших преобразований, получим модель ошибки управления

$$\varepsilon = \frac{1}{a_m(s)} [\tilde{\theta}^T \omega - \tilde{b}_m u], \quad (7)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ — $2n-1$ -мерный вектор параметрических ошибок; $\tilde{b}_m = b_m - \hat{b}_m$ — параметрическая ошибка.

Введем в рассмотрение расширенную ошибку [1, 2, 20]

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\theta}^T \bar{\omega} + \hat{b}_m \bar{u}$$

или

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\psi}^T \bar{\phi}, \quad (8)$$

где $\hat{\psi} = [\hat{\theta}^T, \hat{b}_m]^T$ — агрегированный $2n$ -мерный вектор настраиваемых параметров, соответствующих вектору $\psi = [\theta^T, b_m]^T$; $\bar{\phi} = [\bar{\omega}, -\bar{u}]$ — расширенный регрессор, состоящий из элементов

$$\bar{\omega} = \frac{1}{a_m(s)}[\omega], \quad \bar{u} = \frac{1}{a_m(s)}[u].$$

После подстановки (6) в (7) получаем статическую модель ошибки

$$\hat{\varepsilon} = \tilde{\psi}^T \bar{\phi}, \quad (9)$$

где $\tilde{\psi} = \psi - \hat{\psi}$ — вектор параметрических ошибок. Модель (8) позволяет синтезировать широкий спектр физически реализуемых алгоритмов адаптации, допускающих представление [20, 21]

$$\dot{\hat{\psi}} = \gamma F(\varepsilon, \hat{\psi}, t) \tilde{\psi}, \quad (10)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}_+$ — коэффициент адаптации; $F(\varepsilon, \hat{\psi}, t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ — физически реализуемая ограниченная по t положительно полуопределенная матричная функция, структура которой задает свойства алгоритму адаптации. Так функции $F(t) = \bar{\phi}(t) \bar{\phi}^T / (1 + \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t))$ соответствует градиентный алгоритм адаптации с нормированием

$$\dot{\hat{\psi}} = \gamma \frac{\bar{\phi}}{1 + \bar{\phi}^T \bar{\phi}} \hat{\varepsilon}, \quad \hat{\psi}(0) \quad (\hat{\psi}_{2n}(0) \geq \bar{b}_m), \quad (11)$$

где коэффициент адаптации γ определяется с учетом оператора проекции [1, 18] как

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0 \mathbf{I}_{2n}, & \text{если } \hat{b}_m \geq \bar{b}_m, \\ \gamma_0 (\mathbf{I}_{2n} - \varsigma_{2n} \varsigma_{2n}^T), & \text{если } \hat{b}_m < \bar{b}_m, \end{cases} \quad (12)$$

где $\gamma_0 \in \mathbb{R}_+$ — константа; $\varsigma_{2n} = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$ — координатный вектор размерности $2n$; $\mathbf{I}_{2n}$ — единичная матрица размерности $2n$.

Замечание 3. Форма записи выражения (10) охватывает широкий спектр алгоритмов адаптации, в том числе алгоритмов с ускоренной параметрической сходимостью [3, 4, 22]. ■

Оператор проекции необходим для предотвращения деления на ноль в выражении (6) и в соответствии со вторым выражением системы уравнений (12) «предотвращает» попадание $\hat{\psi}_{2n} = \hat{b}_m$ в область $\hat{\psi}_{2n}(t) < \bar{b}_m$. После подстановки (9) в (11) с учетом равенства $\dot{\hat{\psi}} = -\dot{\psi}$ формируется модель параметрических ошибок

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\gamma \frac{\bar{\phi} \bar{\phi}^T}{1 + \bar{\phi}^T \bar{\phi}} \tilde{\psi}, \quad (13)$$

которая позволяет проанализировать свойства алгоритма.

Для адаптивной системы управления, замкнутой АА (11), (12) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1 [1, 2]. Алгоритм управления (6) совместно с фильтрами (4), расширенной ошибкой (8) и алгоритмом адаптации (11), (12) обеспечивает следующие свойства замкнутой системы:

У1.1. $y, u, \varepsilon, \hat{\varepsilon}, \tilde{\psi}, \dot{\tilde{\psi}} \in L_\infty$;

У1.2. $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;

У1.3. Если $\bar{\omega} \in PE$, то $\hat{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t) \rightarrow 0$ экспоненциально при $t \rightarrow \infty$, и существует оптимальное значение коэффициента γ_0 , при котором скорость сходимости $\hat{\theta}(t) \rightarrow 0$ максимальна. ■

Свойство У1.3 отражает существенный недостаток алгоритма адаптации (11), (12), который заключается в том, что даже при экспоненциальной сходимости скорость автонастройки параметров регулятора может быть произвольно медленной и не может быть увеличена за счет повышения коэффициента адаптации. Выполним модификацию алгоритма (11), (12), обеспечивающую за счет предсказания динамики модели параметрических ошибок (13) настройку параметров регулятора за конечное время. Новый алгоритм позволит обеспечить и ускорить сходимость $\tilde{\psi}(t) \rightarrow 0$ (отметим, что свойство У1.3 исходного алгоритма адаптации предполагает настройку только по $\hat{\theta}(t)$ и ослабит условие неисчезающего возбуждения (1) до условия интервального возбуждения (2)).

Основной результат

Решение дифференциального уравнения (13) может быть представлено в виде:

$$\tilde{\psi}(t) = \Phi(t) \tilde{\psi}(0), \quad (14)$$

где $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ — фундаментальная матрица, которая является решением дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi} = -\gamma \frac{\bar{\phi} \bar{\phi}^T}{1 + \bar{\phi}^T \bar{\phi}} \Phi, \quad \Phi(0) = \mathbf{I}_{2n}.$$

Если $(\mathbf{I}_{2n} - \Phi(t))^{-1} \neq 0$, выражение (14) позволяет рассчитать точное значение вектора ψ в виде:

$$\psi = (\mathbf{I}_{2n} - \Phi(t))^{-1} (\hat{\psi}(t) - \Phi(t) \hat{\psi}(0)), \quad (15)$$

где оценка $\hat{\psi}$ генерируется алгоритмом адаптации (10).

Матричная функция $(\mathbf{I}_{2n} - \Phi(t))^{-1}$ является вырожденной в начальный момент времени $t = 0$, когда $\Phi(0) = \mathbf{I}_{2n}$, а ее дальнейшее поведение зависит от частотного богатства сигнала $\bar{\phi}(t)$. Для получения физически реализуемого АА с конечной сходимостью предлагается производить сброс и перерасчет начальных условий в соответствии с (15) на интеграторе алгоритма адаптации (11) в моменты времени, когда детерминант матрицы $\mathbf{I}_{2n} - \Phi(t)$ превышает предварительно

заданный порог. В этом случае форма алгоритма (11) принимает вид

$$\dot{\tilde{\Psi}}(t_i) = \gamma(t_i) \frac{\bar{\Phi}(t_i)}{1 + \bar{\Phi}^T(t_i)\bar{\Phi}(t_i)} \hat{\varepsilon}(t_i),$$

$$t_i \in [\tau_{i-1}, \tau_i], i = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

$$\dot{\Phi}(t_i) = -\gamma(t_i) \frac{\bar{\Phi}(t_i)\bar{\Phi}^T(t_i)}{1 + \bar{\Phi}^T(t_i)\bar{\Phi}(t_i)} \Phi(t_i), \quad (17)$$

в котором начальные условия обновляются согласно выражениям

$$\hat{\Psi}(\tau_{i+}) = (\mathbf{I}_{2n} - \Phi(\tau_{i-}))^{-1}(\hat{\Psi}(\tau_{i-}) - \Phi(\tau_{i-})\hat{\Psi}(\tau_{i-+})), \quad (18)$$

$$\Phi(\tau_{i+}) = \mathbf{I}_{2n}, \quad (19)$$

где

$$\tau_i : \delta(\tau_{i-}) = \mu, \quad (20)$$

$\delta(t) = \det(\mathbf{I}_{2n} - \Phi(t))$; $\mu \in (0, 1)$ — постоянный параметр, предварительно заданное пороговое значение $\delta(t)$; $f(\tau_{i-})$ и $f(\tau_{i+})$ — значения функции $f(t)$, определяемые левосторонним и правосторонним пределами

$$f(\tau_{i-}) = \lim_{t \rightarrow \tau_{i-}} f(t), f(\tau_{i+}) = \lim_{t \rightarrow \tau_{i+}} f(t).$$

Отметим, что в момент времени (20) обновления начальных условий в алгоритме адаптации (16), матрица $(\mathbf{I}_{2n} - \Phi(\tau_{i-}))^{-1}$ не является вырожденной, что говорит о физической реализуемости алгоритма адаптации.

В целях анализа свойств замкнутой системы и определения момента времени (20) сформулируем техническую лемму.

Лемма 2. Функция $\delta(t)$ обладает следующими свойствами:

Л2.1. Если $\exists t_0 \geq 0$: $\bar{\Phi} \in PE$ и $\hat{b}_m(t) \geq \bar{b}_m$ при $t \in [t_0, \infty)$, то $\forall \tilde{\Psi}(t_0) \|\tilde{\Psi}(t)\| \rightarrow 0$ и $\delta(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$;

Л2.2. Если $\exists t_0 \geq 0$: $\bar{\Phi} \in IE$ и $\hat{b}_m(t) \geq \bar{b}_m$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$, то $\forall \tilde{\Psi}(t_0) \|\tilde{\Psi}(t)\| < \|\tilde{\Psi}(t_0)\|$, и существует такая (возможно сколь угодно малая) константа $\mu \in (0, 1)$, что $\delta(t) \geq \mu$. ■

Доказательство. Так как $\hat{b}_m(t) \geq \bar{b}_m$, то коэффициент адаптации согласно (12) определяется константой γ_0 . В этом случае согласно доказательству, приведенному в [2, теорема 2.16] можно показать, что для функции Ляпунова $V = \tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi} / 2\gamma_0$ справедливо неравенство

$$V(t + T) \leq \kappa V(t), \quad (21)$$

где

$$\kappa = 1 - \frac{2\gamma_0\alpha}{1 + \gamma_0^2 T^4 \|\bar{\Phi}_n(t)\|_\infty^4},$$

$$\|\bar{\Phi}_n(t)\|_\infty = \left\| \frac{\bar{\Phi}(t)}{\sqrt{1 + \bar{\Phi}^T(t)\bar{\Phi}(t)}} \right\|_\infty = 1$$

константы $T > 0$, $\alpha \in (0, T^2)$ (согласно замечанию 1 с учетом новых обозначений) характеризуют условие неисчезающего возбуждения (см. Определение 1). Так как $\kappa \in (0, 1)$, то из (21) следует, что $\|\tilde{\Psi}(t)\| \rightarrow 0$,

$\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$, $\delta(t) \rightarrow 1$ экспоненциально при $t \rightarrow \infty$, если $\bar{\Phi} \in PE$. Свойство Л2.1 доказано.

Для доказательства свойства Л2.2 используем (21), в котором время t фиксировано константой t_0 из определения 2. Тогда, если $\bar{\Phi} \in PE$, то справедливо неравенство

$$V(t_0 + T) \leq \kappa V(t_0) < V(t_0). \quad (22)$$

Из неравенств (21) и (22) с учетом определения V имеем

$$\|\tilde{\Psi}(t + T)\|^2 \leq \|\tilde{\Psi}(t_0 + T)\|^2 \leq \kappa \|\tilde{\Psi}(t_0)\|^2 \leq \|\tilde{\Psi}(t_0)\|^2,$$

$$t \geq t_0, \bar{\Phi} \in IE. \quad (23)$$

Далее проанализируем с учетом (23) следующую квадратичную форму:

$$\tilde{\Psi}^T(t_0)(\mathbf{I}_{2n} - \Phi(t + T))\tilde{\Psi}(t_0) =$$

$$= \|\tilde{\Psi}(t_0)\|^2 - \tilde{\Psi}^T(t_0)\tilde{\Psi}(t + T) \geq \quad (24)$$

$$\geq \|\tilde{\Psi}(t_0)\|^2 - \|\tilde{\Psi}(t + T)\| \|\tilde{\Psi}(t_0)\| \geq (1 - \sqrt{\kappa}) \|\tilde{\Psi}(t_0)\|^2.$$

Из неравенства (24) следует, что так как $\kappa \in (0, 1)$, то при $t \geq t_0 + T$ и $\bar{\Phi} \in IE$ матрица $\mathbf{I}_{2n} - \Phi(t)$ положительно определена. Свойство Л2.2 и лемма доказаны. ■

Условия леммы 2 позволяют найти точные оценки неизвестных параметров Ψ с помощью (15) и впоследствии производить обновление начальных условий на интеграторе алгоритма адаптации.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Утверждение 2. Алгоритм управления (6) совместно с фильтрами (4), расширенной ошибкой (8) и алгоритмом адаптации (16)–(20) с коэффициентом адаптации (12) обеспечивает свойства У1.1–У1.3 и дополнительно:

У2.1. Если $\hat{b}_m(t) \geq \bar{b}_m$ и $\bar{\Phi} \in PE$ при $t \in [t_0, \infty)$, то $\forall \mu \in (0, 1)$, где μ — пороговое значение (20), $\exists t_f \geq t_0$: $\delta(t) = \det(\mathbf{I}_{2n} - \Phi(t)) \geq \mu$, $\tilde{\Psi}(t) \rightarrow 0$ за конечное время t_f и существует оптимальное значение коэффициента γ_0 , при котором t_f принимает наименьшее значение;

У2.2. Если $\hat{b}_m(t) \geq \bar{b}_m$ и $\bar{\Phi} \in IE$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$, то $\exists t_f \geq t_0$, $\mu \in (0, 1)$: $\delta(t) = \det(\mathbf{I}_{2n} - \Phi(t)) \geq \mu$, $\Psi(t) \rightarrow 0$ за конечное время t_f и существует оптимальное значение коэффициента γ_0 , при котором t_f принимает наименьшее значение. ■

Доказательство. Доказательство утверждения 2 базируется на результатах леммы 2. Из свойства Л2.1 следует, что, так как $\delta(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, то согласно свойству У2.1 $\forall \mu \in (0, 1)$ функция $\delta(t)$, меняясь от нуля до единицы, преодолест порог μ в указанном диапазоне в некоторый момент времени t_f . Из свойства Л2.2 и неравенства (24) следует, что $\delta(t)$ меняется от нуля до некоторого (возможно сколь угодно малого) постоянного положительного значения. Отсюда следует существование порога $\mu \in (0, 1)$: $\delta(t_f) = \mu$.

Доказательство наличия оптимального значения коэффициента γ_0 следует напрямую из свойств алгоритма адаптации (11), (12) [2, 3] (на базе которого построен ал-

горитм адаптации (16)–(20)) и анализа функции $\kappa(\gamma_0) = 1 - \frac{2\gamma_0\alpha}{1 + \gamma_0^2 T^4}$. ■

Замечание 4. Важно отметить, что свойство У2.2 гарантирует параметрическую сходимость градиентного алгоритма при более слабом условии интервального возбуждения (2). При этом факт существования порога μ дает возможность эмпирически определить это значение из диапазона $(0, 1)$.

Моделирование

Рассмотрим задачу управления объектом второго порядка

$$y = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} [u]$$

с неизвестными параметрами b_0 , a_0 , a_1 и эталонной моделью

$$y_m = \frac{6}{s^2 + 5s + 6} [g]$$

с сигналом задания

$$g(t) = \sin(t) + 2.$$

В соответствии с динамическим порядком объекта количество настраиваемых параметров регулятора (размерность вектора $\hat{\psi}$) равно $2n = 4$. Для обеспечения сходимости $\tilde{\psi}(t) = \psi - \hat{\psi}(t) \rightarrow 0$ и выполнения условия неисчезающего возбуждения средствами стандартного

градиентного АА требуется частотно богатый сигнал задания, содержащий как минимум две гармоники. Очевидно, что ввиду выбранного $g(t)$ условие неисчезающего возбуждения не выполняется, но за счет наличия переходных процессов в системе гарантировано более слабое условие интервального возбуждения, которое позволяет обеспечить параметрическую сходимость регулятора согласно свойству Л2.2. Выполнение условия неисчезающего возбуждения показано на рис. 1 для $\mu = 10^{-5}$, выбранного согласно замечанию 4.

В целях моделирования объекта используем параметры $b_0 = 5$, $a_0 = 0$, $a_1 = 3$. Для реализации закона управления (6) с фильтрами (4), расширенной ошибкой (8) и алгоритмом адаптации (16)–(20) с коэффициентом адаптации (12) выберем следующие параметры: $\Lambda = -1$, $\bar{b}_0 = 0,01$, $\gamma_0 = 1000$, $\hat{\psi}(0) = [0, 0, 0, 1]^T$. Все начальные условия на интеграторах (кроме $\hat{\psi}(0)$) приняты нулевыми.

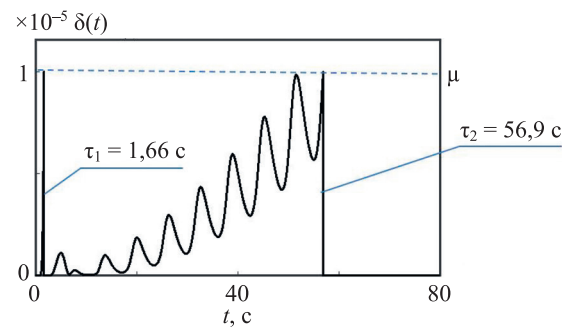


Рис. 1. График функции $\delta(t)$

Fig. 1. $\delta(t)$ function diagram

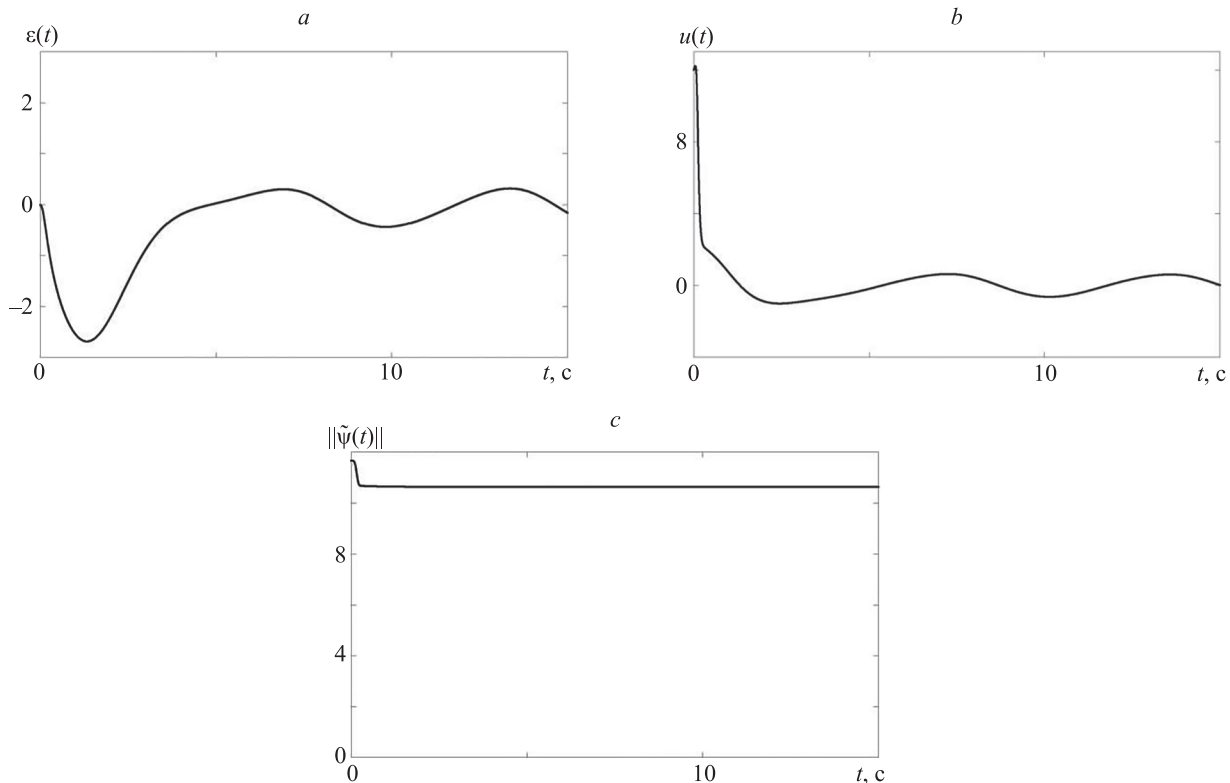


Рис. 2. Переходные процессы в системе, замкнутой градиентным алгоритмом адаптации (11), (12)

Fig. 2. Transient processes in system with gradient-based adaptation law (11), (12)

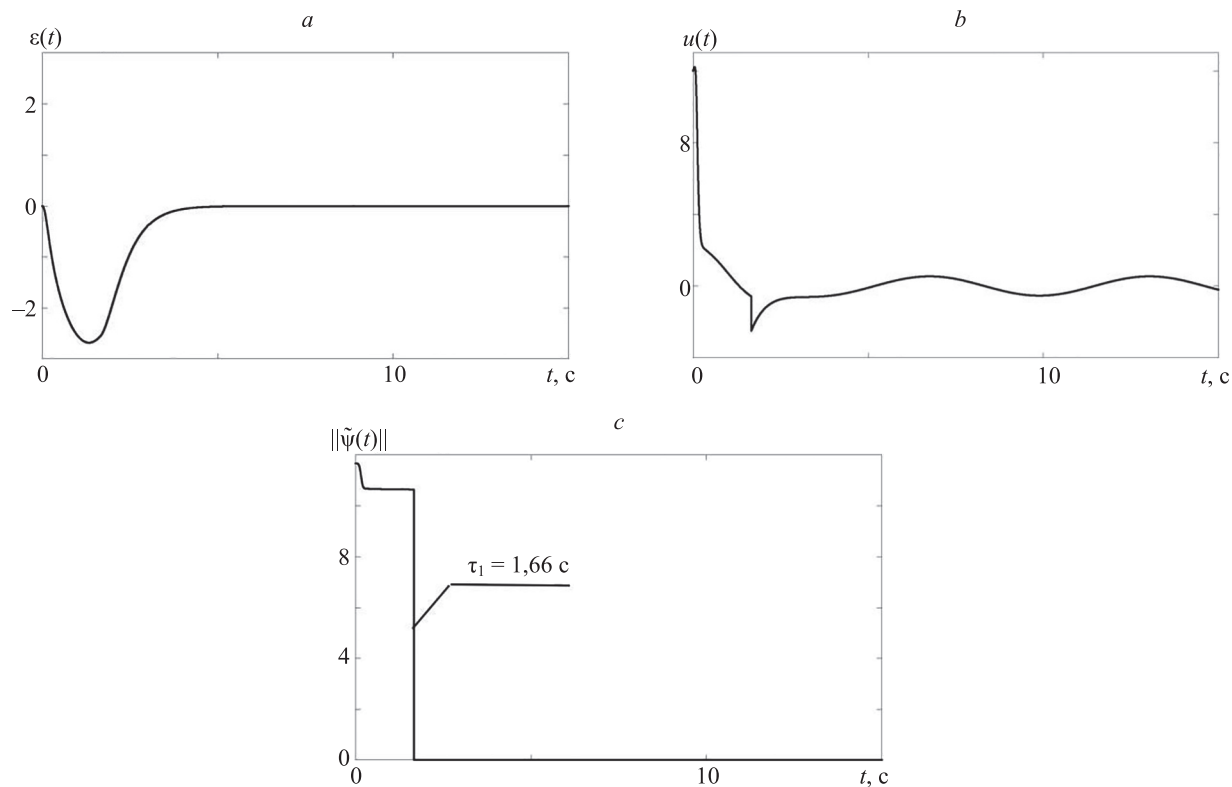


Рис. 3. Переходные процессы в системе, замкнутой градиентным алгоритмом адаптации (16)–(20), (12) с конечным временем настройки регулятора

Fig. 3. Transient processes in system with gradient-based adaptation law (16)–(20), (12) and finite-time convergence rate of the controller parameters

На рис. 2 и 3 приведены результаты моделирования систем, замкнутых базовым алгоритмом адаптации (11), (12) без обновления параметров и алгоритм адаптации (16)–(20), (12) с обновлением параметров и сходимостью за конечное время. Из результатов видно, что в отличие от алгоритма (11), (12) алгоритм (16)–(20), (12) обеспечивает в замкнутой системе точную и быструю настройку параметров регулятора за счет своевременного обновления начальных условий на интеграторе.

Из рис. 1 и 3 виден момент времени обновления параметров $\hat{\psi}(t)$, равный $\tau_1 = 1,66$ с, после которого алгоритм управления обеспечил ускоренную сходимость ошибки $\varepsilon(t)$ к нулю. Как показало моделирование, в системе управления происходит еще одно обновление параметров в момент $\tau_2 = 56,9$ с (рис. 1), после которого обновлений не происходит, что объясняется невыполнением условия интервального возбуждения (2) при $t_0 > \tau_2$ и вырождением матрицы $I_4 - \Phi(t)$.

Заключение

В работе предложен алгоритм прямого адаптивного управления линейными параметрически неопределенными системами по выходу. Для улучшения качества работы замкнутой системы разработан алгоритм адаптации, обеспечивающий ускоренную настройку параметров регулятора за конечное время без использования в системе больших или бесконечных коэффициентов усиления. Новый алгоритм адаптации синтезирован на базе градиентного алгоритма адаптации, в котором производится своевременное обновление начальных условий, полученных с помощью предсказания динамики градиентного алгоритма, и который может сходиться за конечное время даже при невыполнении условия неисчезающего возбуждения.

Литература

1. Ioannou P.A., Sun J. *Robust Adaptive Control*. NJ: Prentice-Hall, 1996. 825 p.
2. Narendra K.S., Annaswamy A.M. *Stable Adaptive Systems*. NJ: Prentice Hall, 1989. 494 p.
3. Lion P. M. Rapid identification of linear and nonlinear systems // *AIAA Journal*. 1967. V. 5. N 10. P. 1835–1842. <https://doi.org/10.2514/3.4313>
4. Kreisselmeier G. Adaptive observers with exponential rate of convergence // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1977. V. 22. N 1. P. 2–8. <https://doi.org/10.1109/TAC.1977.1101401>

References

1. Ioannou P.A., Sun J. *Robust Adaptive Control*. NJ: Prentice-Hall, 1996. 825 p.
2. Narendra K.S., Annaswamy A.M. *Stable Adaptive Systems*. NJ: Prentice Hall, 1989. 494 p.
3. Lion P. M. Rapid identification of linear and nonlinear systems. *AIAA Journal*, 1967, vol. 5, no. 10, pp. 1835–1842. <https://doi.org/10.2514/3.4313>
4. Kreisselmeier G. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, vol. 22, no. 1. pp. 2–8. <https://doi.org/10.1109/TAC.1977.1101401>

5. Andrievsky B.R., Fradkov A.L., Stotsky A.A. Shunt Compensation for Indirect Sliding-Mode Adaptive Control // *IFAC Proceedings Volumes*, 1996. V. 29. N 1. P. 5132–5137. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)58495-5](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)58495-5)
6. Fradkov A., Andrievsky B., Combined adaptive controller for UAV guidance // *European Journal of Control*, 2005. V. 11. N 1. P. 71–79. <https://doi.org/10.3166/ejc.11.71-79>
7. de Mathelin M., Lozano R. Robust adaptive identification of slowly time-varying parameters with bounded disturbances // *Automatica*, 1999. V. 35. N 7. P. 1291–1305. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00026-6](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00026-6)
8. Narendra K.S., Han Z. A new approach to adaptive control using multiple models // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2012. V. 26. N 8. P. 778–799. <https://doi.org/10.1002/acs.2269>
9. Герасимов Д.Н., Кошелев К.П., Беляев М.Е., Никифоров В.О. Алгоритм адаптивного управления по выходу линейной системой с улучшенной параметрической сходимостью // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2018. Т. 18. № 5. С. 771–779. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2018-18-5-771-779>
10. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017. V. 62. N 7. P. 3546–3550. <https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2614889>
11. Krause J., Khargonekar P. Parameter information content of measurable signals in direct adaptive control // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987. V. 32. N 9. P. 802–810. <https://doi.org/10.1109/TAC.1987.1104722>
12. Ortega R. An on-line least-squares parameter estimator with finite convergence time // *Proceedings of the IEEE*, 1988. V. 76. N 7. P. 847–848. <https://doi.org/10.1109/5.7153>
13. Adetola V., Guay M. Finite-time parameter estimation in adaptive control of nonlinear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008. V. 53. N 3. P. 807–811. <https://doi.org/10.1109/TAC.2008.919568>
14. Rios H., Efimov D., Moreno J. A., Perruquetti W., Rueda-Escobedo J. G. Time-Varying Parameter Identification Algorithms: Finite and Fixed-Time Convergence // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017. V. 62. N 7. P. 3671–3678. <https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2673413>
15. Wang J., Efimov D., Aranovskiy S., Bobtsov A. Fixed-time estimation of parameters for non-persistent excitation // *European Journal of Control*, 2020. V. 55. P. 24–32. <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2019.07.005>
16. Holloway J., Krstic M. Prescribed-time output feedback for linear systems in controllable canonical form // *Automatica*, 2019. V. 107. P. 77–85. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.05.027>
17. Ortega R., Gerasimov D.N., Barabanov N.E., Nikiforov V.O. Adaptive control of linear multivariable systems using dynamic regressor extension and mixing estimators: removing the high-frequency gain assumptions // *Automatica*, 2019. V. 110. P. 108589. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108589>
18. Gerasimov D.N., Ortega R., Nikiforov V.O. Adaptive control of multivariable systems with reduced knowledge of high frequency gain: application of dynamic regressor extension and mixing estimators // *IFAC-PapersOnLine*, 2018. V. 51. N 15. P. 886–890. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.09.108>
19. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 447 с.
20. Monopoli R. V. Model reference adaptive control with an augmented error signal // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974. V. 19. N 5. P. 474–484. <https://doi.org/10.1109/TAC.1974.1100670>
21. Nikiforov V.O., Gerasimov D.N. *Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection*. Springer-Verlag, 2022. 358 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-96091-9>
22. Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D. On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // *Annual Reviews in Control*, 2020. V. 50. P. 278–293. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.06.002>
5. Andrievsky B.R., Fradkov A.L., Stotsky A.A. Shunt Compensation for Indirect Sliding-Mode Adaptive Control. *IFAC Proceedings Volumes*, 1996, vol. 29, no. 1, pp. 5132–5137. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)58495-5](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)58495-5)
6. Fradkov A., Andrievsky B., Combined adaptive controller for UAV guidance. *European Journal of Control*, 2005, vol. 11, no. 1, pp. 71–79. <https://doi.org/10.3166/ejc.11.71-79>
7. de Mathelin M., Lozano R. Robust adaptive identification of slowly time-varying parameters with bounded disturbances. *Automatica*, 1999, vol. 35, no. 7, pp. 1291–1305. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00026-6](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00026-6)
8. Narendra K.S., Han Z. A new approach to adaptive control using multiple models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2012, vol. 26, no. 8, pp. 778–799. <https://doi.org/10.1002/acs.2269>
9. Gerasimov D.N., Koshelev K.P., Belyaev M.E., Nikiforov V.O. Algorithm of adaptive output control of linear system with improved parametric convergence. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, no. 5, pp. 771–779 (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2018-18-5-771-779>
10. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, vol. 62, no. 7, pp. 3546–3550. <https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2614889>
11. Krause J., Khargonekar P. Parameter information content of measurable signals in direct adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, vol. 32, no. 9, pp. 802–810. <https://doi.org/10.1109/TAC.1987.1104722>
12. Ortega R. An on-line least-squares parameter estimator with finite convergence time. *Proceedings of the IEEE*, 1988, vol. 76, no. 7, pp. 847–848. <https://doi.org/10.1109/5.7153>
13. Adetola V., Guay M. Finite-time parameter estimation in adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, vol. 53, no. 3, pp. 807–811. <https://doi.org/10.1109/TAC.2008.919568>
14. Rios H., Efimov D., Moreno J. A., Perruquetti W., Rueda-Escobedo J. G. Time-Varying Parameter Identification Algorithms: Finite and Fixed-Time Convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, vol. 62, no. 7, pp. 3671–3678. <https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2673413>
15. Wang J., Efimov D., Aranovskiy S., Bobtsov A. Fixed-time estimation of parameters for non-persistent excitation. *European Journal of Control*, 2020, vol. 55, pp. 24–32. <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2019.07.005>
16. Holloway J., Krstic M. Prescribed-time output feedback for linear systems in controllable canonical form. *Automatica*, 2019, vol. 107, pp. 77–85. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.05.027>
17. Ortega R., Gerasimov D.N., Barabanov N.E., Nikiforov V.O. Adaptive control of linear multivariable systems using dynamic regressor extension and mixing estimators: removing the high-frequency gain assumptions. *Automatica*, 2019, vol. 110, pp. 108589. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108589>
18. Gerasimov D.N., Ortega R., Nikiforov V.O. Adaptive control of multivariable systems with reduced knowledge of high frequency gain: application of dynamic regressor extension and mixing estimators. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 15, pp. 886–890. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.09.108>
19. Fomin V.N., Fradkov A.L., Yakubovich V.A. *Adaptive control of dynamic objects*. Moscow, Nauka Publ., 1981, 447 p.
20. Monopoli R. V. Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, no. 5, pp. 474–484. <https://doi.org/10.1109/TAC.1974.1100670>
21. Nikiforov V.O., Gerasimov D.N. *Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection*. Springer-Verlag, 2022, 358 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-96091-9>
22. Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D. On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes. *Annual Reviews in Control*, 2020, vol. 50, pp. 278–293. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.06.002>

Авторы

Dmitry N. Gerasimov — PhD, Associate Professor, Associate Professor, Senior Researcher, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 36637147000](https://orcid.org/0000-0001-8306-4138), <https://orcid.org/0000-0001-8306-4138>, dngerasimov@itmo.ru

Dmitry L. Podoshkin — PhD Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 58853949900](https://orcid.org/0009-0000-5189-7696), <https://orcid.org/0009-0000-5189-7696>, dpodoshkin@itmo.ru

Vladimir O. Nikiforov — D.Sc., Professor, Vice-Rector for Scientific Affairs, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 7103218872](https://orcid.org/0000-0003-4860-5407), <https://orcid.org/0000-0003-4860-5407>, nikiforov_vo@itmo.ru

Authors

Герасимов Дмитрий Николаевич — кандидат технических наук, доцент, доцент, старший научный сотрудник, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 36637147000](https://orcid.org/0000-0001-8306-4138), <https://orcid.org/0000-0001-8306-4138>, dngerasimov@itmo.ru

Подошкин Дмитрий Леонидович — аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 58853949900](https://orcid.org/0009-0000-5189-7696), <https://orcid.org/0009-0000-5189-7696>, dpodoshkin@itmo.ru

Никифоров Владимир Олегович — доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 7103218872](https://orcid.org/0000-0003-4860-5407), <https://orcid.org/0000-0003-4860-5407>, nikiforov_vo@itmo.ru

Статья поступила в редакцию 03.11.2024

Одобрена после рецензирования 09.12.2024

Принята к печати 22.01.2025

Received 03.11.2024

Approved after reviewing 09.12.2024

Accepted 22.01.2025



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»