doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-3-520-526
УДК 519.63

Критические нагрузки антисимметричных и смешанных форм защемленной нанопластины при двухосном сжатии

Михаил Васильевич Сухотерин[1]✉, Ирина Викторовна Войтко[2], Анна Анатольевна Сосновская[3]

[1,2,3] Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация

[1] sukhoterinmv@gumrf.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8295-7089
[2] voytkoiv@gumrf.ru, https://orcid.org/0000-0003-2342-2209
[3] sosnovskayaaa@gumrf.ru, https://orcid.org/0009-0000-6476-6783

Аннотация

Введение. Изучен процесс вычисления спектра критических нагрузок антисимметричных и смешанных форм равновесия после потери устойчивости защемленной по контуру высокоупругой прямоугольной нанопластины (CCCC-пластина) (C — clamped edge, защемленный край) при двухосном сжатии и различных значениях нелокального параметра Эрингена. **Метод.** Искомые формы закритического равновесия представлены двумя гиперболо-тригонометрическими рядами с неопределенными коэффициентами при соответствующих комбинациях нечетных и четных функций. Каждый из рядов подчинялся основному дифференциальному уравнению физического состояния Эрингена, а затем их сумма подчинялась всем граничным условиям задачи. В результате получена бесконечная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно одной последовательности неизвестных коэффициентов рядов, содержащая в качестве основного параметра величину сжимающей нагрузки. Для поиска собственных чисел (критических нагрузок) использован впервые предложенный итерационный процесс отыскания нетривиальных решений в сочетании с методом «стрельбы». **Основные результаты.** Для ряда значений нелокального параметра e_0A из рабочего диапазона [0–2] теории Эрингена (0 — классическая теория) с шагом 0,25 впервые получен спектр из 10 относительных критических нагрузок. Установлено, что с ростом нелокального параметра критические нагрузки уменьшались. Краевые эффекты не обнаружены. Анализировалась точность компьютерных вычислений. Изменяемыми параметрами вычислительной программы являются относительная сжимающая нагрузка, отношение сторон пластины, значения нелокального параметра Эрингена, число итераций, количество членов в рядах, количество значащих цифр вычислительного процесса. **Обсуждение.** Предложенная методика и полученные численные результаты могут быть использованы при проектировании чувствительных элементов различных датчиков в smart-конструкциях.

Ключевые слова
прямоугольная CCCC-нанопластина, устойчивость, теория Эрингена, ряды Фурье, спектр критических нагрузок

Ссылка для цитирования: Сухотерин М.В., Войтко И.В., Сосновская А.А. Критические нагрузки антисимметричных и смешанных форм защемленной нанопластины при двухосном сжатии // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 3. 520–526. С. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-3-520-526

Critical loads of antisymmetric and mixed forms of buckling of a CCCC-nanoplate under biaxial compression

Mikhail V. Sukhoterin[1]✉, Irina V. Voytko[2], Anna A. Sosnovskaya[3]

[1,2,3] Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation

[1] sukhoterinmv@gumrf.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8295-7089
[2] voytkoiv@gumrf.ru, https://orcid.org/0000-0003-2342-2209
[3] sosnovskayaaa@gumrf.ru, https://orcid.org/0009-0000-6476-6783

Abstract
The process of calculating the spectrum of critical loads of antisymmetric and mixed equilibrium forms after loss of stability of a contour-pinched highly elastic rectangular nanoplate (CCCC-plate) (C — clamped edge) under biaxial compression and various values of the nonlocal Eringen parameter is studied. The desired forms of supercritical equilibrium are represented by two hyperbolic-trigonometric series with indeterminate coefficients for corresponding combinations of odd and even functions. Each of the series obeyed the basic differential equation of the physical state of Eringen, and then their sum obeyed all the boundary conditions of the problem. As a result, an infinite homogeneous system of linear algebraic equations is obtained with respect to a single sequence of unknown coefficients of the series, containing as the main parameter the value of the compressive load. To find eigenvalues (critical loads), the iterative process of finding non-trivial solutions proposed by the authors in combination with the "shooting" method was used. For a number of values of the nonlocal parameter e_0A [nm] from the operating range [0–2] of the Ehringen theory (0 is the classical theory) with a step of 0.25, a spectrum of 10 relative critical loads was obtained for the first time. It was found that with an increase in the nonlocal parameter critical loads decreased. No edge effects were detected. The accuracy of computer calculations was analyzed. The variable parameters of the computational program are the relative compressive load, the ratio of the sides of the plate, the values of the non-local Eringen parameter, the number of iterations, the number of members in the rows, the number of significant digits of the computational process. The proposed technique and the numerical results obtained can be used in the design of sensitive elements of various sensors in smart structures.

Keywords
rectangular CCCC-nanoplate, buckling, Eringen theory, Fourier series, critical load spectrum

For citation: Sukhoterin M.V., Voytko I.V., Sosnovskaya A.A. Critical loads of antisymmetric and mixed forms of buckling of a CCCC-nanoplate under biaxial compression. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2025, vol. 25, no. 3, pp. 520–526 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-3-520-526

Введение

В настоящее время нанопластины широко применяются в различных областях техники, а также в биологии и медицине. Особый интерес вызывает их использование в smart-конструкциях в качестве чувствительных элементов различных датчиков. Smart-конструкции представляют собой различные системы, включающие сенсоры, датчики, актуаторы, устройства обработки данных и выработки управляющих сигналов. Такие конструкции могут изменять свои свойства под действием электрических, магнитных или температурных полей и самостоятельно осуществлять ответные действия. Важными задачами при этом являются исследования колебаний и устойчивости, используемых для этих целей нанопластин. Современные технологии изготовления нанопластин позволяют задавать им нужные свойства и, в частности, высокую упругость. Высокоупругие пластины под действием сжимающих нагрузок в их плоскости могут несколько раз терять устойчивость при возрастании нагрузки и приобретать новые формы закритического равновесия. Изменение формы нанопластины через актуаторы фиксируется следящей smart-системой и инициирует соответствующий управляющий сигнал.

Условия закрепления граней нанопластины, так же как и тонкой пластины Кирхгоффа, обычно представляют собой различные сочетания свободно-опертых (S — supported), защемленных (C — clamped) и свободных (F — free) граней.

При анализе изгиба, колебаний и устойчивости наноразмерных структур широко используется нелокальная теория упругости А.С. Эрингена [1, 2], которая учитывает размерный эффект нанообъекта, а также взаимное влияние соседних точек на напряженное состояние, за счет введения так называемого нелокального параметра Эрингена (e_0A). Физическое обоснование этой теории с атомистической точки зрения динамики кристаллической решетки и с помощью метода моделирования молекулярной динамики описано в работе [3]. Данным методом в [4] был найден диапазон изменения нелокального параметра Эрингена e_0A от 0 до 2 нм для нанотрубок и нанопластин.

Вопросам устойчивости прямоугольных нанопластин посвящен большой ряд исследований, из которых отметим [5–14].

В [5] применен метод конечных разностей, найдены первые две критические нагрузки и получены соответствующие 3D-формы потери устойчивости SSSS- и CCCC-нанопластин.

Энергетические методы использовались в работах [6–11]. В [6] исследовалась устойчивость нанопластин при двухосном сжатии с учетом деформации поперечного сдвига. Для решения применялся принцип Гамильтона и модифицированная теория парных напряжений. В [7] рассматривалась нанопластина на упругом основании. Задача устойчивости решена методом Ритца. В [8] задача устойчивости магнито-электроупругой фукционально градуированной нанопластины с пьезоэлектрическим актуатором решена с использованием тригонометрических функций. Первые (эйлеровые) критические нагрузки для 17 видов закрепления нанопластины найдены в работе [9] при различных значениях нелокального параметра Эрингена. Последующие критические значения не вычислялись. В [10] применялся метод Рэлея–Ритца и принцип Гамильтона для нанопластин средней толщины с учетом сдвиговой теории. В работе [11] устойчивость и колебания нанопластин Кирхгоффа исследованы с помощью модифицированной теории парных напряжений.

В [12] к задаче устойчивости нанопластины применялся метод симплектической суперпозиции. Получены численные результаты для некоторых видов закрепления нанопластин. Этот же метод реализован в работе [13] для консольной пластины на упругом основании в плоском магнитном поле.

При использовании различных приближенных методов остается открытым вопрос об их сходимости к точному решению задачи, а также о точности вычислений по этим методам.

Целью настоящей работы является построение вычислительного алгоритма, позволяющего с высокой точностью находить спектр критических нагрузок для различных значений нелокального параметра Эрингена при выполнении всех условий задачи. Рассмотрены антисимметричные (A-A) и смешанные (A-S, S-A) формы равновесия после потери устойчивости защемленной по контуру прямоугольной нанопластины. При этом использовались гиперболо-тригонометрические ряды, итерационный метод поиска нетривиальных решений бесконечной системы в сочетании с методом «стрельбы» при переборе значений нагрузки. Симметричные формы (S-S) исследовались в [14]. Подобный прием применялся также и в работе [15].

Постановка задачи

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности защемленной прямоугольной нанопластины (рисунок) после потери устойчивости от действия биаксиальных равномерных сжимающих сил одинаковой интенсивности N имеет вид [1, 2, 9]

$$D\nabla^2\nabla^2 w + N\nabla^2 w - \varepsilon^* N\nabla^2\nabla^2 w = 0, \quad (1)$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины, E — модуль Юнга, h — толщина пластины, ν — коэффициент Пуассона; ∇^2 — двумерный оператор Лапласа; $w(x, y)$ — прогиб пластины; $\varepsilon^* = (e_0A)^2$ — постоянная наноматериала, e_0A — нелокальный параметр, e_0 – безразмерная нелокальная упругая константа Эрингена, A — внутренний характерный (обобщенный) размер нановещества, например, размер атомной решетки, расстояние между гранулами или атомами дискретной структуры (в зависимости от внутреннего строения вещества).

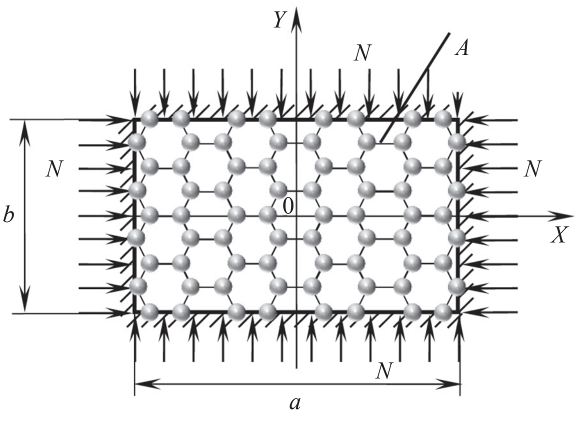

Рисунок. Расчетная схема СССС-нанопластины.

a и b — размеры пластины в плане; A — внутренний характерный размер нановещества; N — интенсивность сжимающих усилий

Figure. Calculation scheme of CCCC-nanoplates.

Here, a and b are the dimensions of the plate in plan, A is the internal characteristic size of the nanomaterial, and N is the intensity of compressive forces

Отнесем координаты пластины к ее размеру b: $x = X/b$, $y = Y/b$, тогда размеры пластины будут такими: $-\gamma/2 \le x \le \gamma/2$, $-1/2 \le y \le 1/2$ ($\gamma = a/b$), а уравнение равновесия (1) примет вид

$$(1 - \varepsilon P)\nabla^2\nabla^2 w + P\nabla^2 w = 0, \quad (2)$$

где $P = Nb^2/D$ — относительная сжимающая нагрузка; $\varepsilon = \varepsilon^*/b^2$ — безразмерная константа наноматериала.

Граничные условия выражают требования отсутствия прогибов и углов поворота защемленных граней:

$$w = 0,\ \partial w/\partial x \text{ при } x = \pm\gamma/2, \quad (3)$$

$$w = 0,\ \partial w/\partial y \text{ при } y = \pm 1/2. \quad (4)$$

Сформулируем задачу: найти некоторый спектр критических нагрузок P_{icr} и получить соответствующие формы (A-A, A-S, S-A) изогнутой поверхности $w_i(x, y)$ нанопластины, удовлетворяющие уравнениям (2)–(4). Данная задача является целью поиска собственных значений и должна иметь бесчисленное множество нетривиальных решений, из которых наиболее важны несколько первых значений.

Построение решения для антисимметричных форм равновесия (A-A-формы)

Искомую функцию прогибов выберем в виде суммы двух гиперболо-тригонометрических рядов по двум координатам, содержащих только нечетные функции:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k[A_k \operatorname{sh}(\alpha_{k1}x) + B_k \operatorname{sh}(\alpha_{k2}x)]\sin(\lambda_k y), \quad (5)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s[C_s \operatorname{sh}(\xi_{s1}y) + D_s \operatorname{sh}(\xi_{s2}y)]\sin(\mu_s x), \quad (6)$$

где A_k, α_{k1}, B_k, α_{k2}, C_s, ξ_{s1}, D_s, ξ_{s2} — неопределенные коэффициенты; $\lambda_k = 2\pi k$; $\mu_s = 2\pi s/\gamma$.

Заметим, что функция (5) удовлетворяет условию отсутствия прогибов на гранях $y = \pm 1/2$, а функция (6) — условию отсутствия прогибов на гранях $x = \pm\gamma/2$.

Коэффициенты α_{ki}, ξ_{si} ($i = 1,2$) найдем из основного уравнения (2). Подставляя в него поочередно ряды (5) и (6) и избавившись от знака суммирования, получим два биквадратных уравнения для определения указанных коэффициентов (как и в [14]):

$$(1 - \varepsilon P)(\alpha_k^4 + \lambda_k^4) + \left[P - 2(1 - \varepsilon P)\lambda_k^2\right]\alpha_k^2 - P\lambda_k^2 = 0,$$

$$(1 - \varepsilon P)(\xi_s^4 + \mu_s^4) + \left[P - 2(1 - \varepsilon P)\mu_s^2\right]\xi_s^2 - P\mu_s^2 = 0,$$

корни которых

$$\alpha_{k1} = \lambda_k,\ \alpha_{k2} = \sqrt{\lambda_k^2 - P/(1 - \varepsilon P)},$$
$$\xi_{s1} = \mu_s,\ \xi_{s2} = \sqrt{\mu_s^2 - P/(1 - \varepsilon P)}. \quad (7)$$

Отрицательные корни не будем учитывать, так как ряды (5), (6) изменят лишь знак, а формы изменят направление на противоположное.

Потребуем теперь, чтобы ряды (5), (6) удовлетворяли и условиям отсутствия прогибов на гранях $x = \pm\gamma/2$

и $y = \pm 1/2$ соответственно (выражения в квадратных скобках должны при этом обратиться в нуль). Это дает

$$B_k = -A_k \operatorname{sh} \alpha_{k1}^* / \operatorname{sh} \alpha_{k2}^*,\ D_s = -\operatorname{sh} \xi_{s1}^* / \operatorname{sh} \xi_{s2}^*,$$

где $\alpha_{k1}^* = \alpha_{k1}\gamma/2$; $\alpha_{k2}^* = \alpha_{k2}\gamma/2$; $\xi_{s1}^* = \xi_{s1}/2$; $\xi_{s2}^* = \xi_{s2}/2$, и функции прогибов примут вид:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k^* \left[\frac{\operatorname{sh}(\alpha_{k1}x)}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}^*} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha_{k2}x)}{\operatorname{sh}\alpha_{k2}^*}\right] \sin(\lambda_k y), \quad (8)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s C_s^* \left[\frac{\operatorname{sh}(\xi_{s1}y)}{\operatorname{sh}\xi_{s1}^*} - \frac{\operatorname{sh}(\xi_{s2}y)}{\operatorname{sh}\xi_{s2}^*}\right] \sin(\mu_s x), \quad (9)$$

где $A_k^* = A_k \operatorname{sh} \alpha_{k1}^*$; $C_s^* = C_s \operatorname{sh} \xi_{s1}^*$.

Подчиним функции (8) и (9) вторым условиям (3), (4), т. е. условиям отсутствия поворотов защемленных граней, что дает систему двух уравнений для определения коэффициентов A_k^* и C_s^*:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k^* \left(\alpha_{k1} \operatorname{cth} \alpha_{k1}^* - \alpha_{k2} \operatorname{cth} \alpha_{k2}^*\right) \sin(\lambda_k y) + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} C_s^* \mu_s \left(\frac{\operatorname{sh}(\xi_{s1}y)}{\operatorname{sh}\xi_{s1}^*} - \frac{\operatorname{sh}(\xi_{s2}y)}{\operatorname{sh}\xi_{s2}^*}\right) = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \lambda_k \left(\frac{\operatorname{sh}(\alpha_{k1}x)}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}^*} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha_{k2}x)}{\operatorname{sh}\alpha_{k2}^*}\right) + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s C_s^* \left(\xi_{s1} \operatorname{cth} \xi_{s1}^* - \xi_{s2} \operatorname{cth} \xi_{s2}^*\right) \sin(\mu_s x) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Чтобы упростить систему (10), надо второй ряд в первом уравнении представить рядом Фурье по $\sin(\lambda_k y)$, а первый ряд во втором уравнении — рядом Фурье по $\sin(\mu_s x)$. Затем можно избавиться от знаков суммирования.

Разложим гиперболические функции в соответствующие ряды Фурье

$$\operatorname{sh}(\alpha_k x) = \frac{-4\operatorname{sh}\alpha_k^*}{\gamma} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \mu_s \sin(\mu_s x)}{\alpha_k^2 + \mu_s^2};$$

$$\operatorname{sh}(\xi_s y) = -4\operatorname{sh}\xi_s^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda_k \sin(\lambda_k y)}{\xi_s^2 + \lambda_k^2}$$

и подставим их в систему (10). С учетом формулы (7) после перестановки знаков суммирования и освобождения от знака внешней суммы получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_k^* \left(\alpha_{k1} \operatorname{cth} \alpha_{k1}^* - \alpha_{k2} \operatorname{cth} \alpha_{k2}^*\right) + \\ + 4\lambda_k P_\varepsilon \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_s^* \mu_s}{(\xi_{s1}^2 + \lambda_k^2)(\xi_{s2}^2 + \lambda_k^2)} = 0, \\ \frac{4}{\gamma} \mu_s P_\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^* \lambda_k}{(\alpha_{k1}^2 + \mu_s^2)(\alpha_{k2}^2 + \mu_s^2)} + \\ + C_s^* \left(\xi_{s1} \operatorname{cth} \xi_{s1}^* - \xi_{s2} \operatorname{cth} \xi_{s2}^*\right) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $P_\varepsilon = P/(1 - \varepsilon P)$.

Из второго уравнения системы (11) выразим C_s^* через A_k^*:

$$C_s^* = \frac{-4P_\varepsilon \mu_s}{\gamma\theta_s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^* \lambda_k}{\sigma_{ks}(\sigma_{ks} - P_\varepsilon)}, \quad (12)$$

где $\theta_s = \xi_{s1} \operatorname{cth} \xi_{s1}^* - \xi_{s2} \operatorname{cth} \xi_{s2}^*$; $\sigma_{ks} = \lambda_k^2 + \mu_s^2$.

Подставим (12) в первое уравнение системы (11) и получим разрешающее однородное линейное алгебраическое уравнение:

$$A_k^* = \frac{16P_\varepsilon^2 \lambda_k}{\gamma\varphi_k} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_s^2}{\sigma_{ks}(\sigma_{ks} - P_\varepsilon)\theta_s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_k^*}{\sigma_{ks}(\sigma_{ks} - P_\varepsilon)}, \quad (13)$$

где $\varphi_k = \alpha_{k1} \operatorname{cth} \alpha_{k1}^* - \alpha_{k2} \operatorname{cth} \alpha_{k2}^*$.

Уравнение (13) фактически представляет собой бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно одной последовательности неизвестных коэффициентов A_k^*. В качестве параметра система (12) содержит величину сжимающей нагрузки P. Искомые критические значения (собственные числа задачи) обеспечат нетривиальные решения этой системы и соответствующие формы закритического равновесия.

Система (13) записана в стандартной форме, позволяющей считать коэффициенты A_k^* под знаком суммы в правой части равенства предыдущей итерацией и организовать процесс последовательных приближений для отыскания коэффициентов последующей итерации при заданном значении нагрузки. Если нагрузка подобрана такой, что является критической, то, начиная с некоторой итерации, все соответствующие коэффициенты будут совпадать. Этого можно достичь простым перебором значений P, используя «метод стрельбы». Данный итерационный процесс более эффективен, чем традиционный метод поиска собственных чисел из условия равенства нулю определителя бесконечной однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Сходимость числовых рядов разрешающего уравнения

Оценим порядок и быстроту сходимости рядов, входящих в выражение (13).

Если все коэффициенты A_{k0}^* в правой части для начального приближения положить равными $1/\lambda_k$, то внутренний ряд мажорируется рядом, точная сумма которого известна [16, 17]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2} = -\frac{1}{2\mu_s^4} + \frac{1}{8\mu_s^3}\left(\operatorname{cth}\mu_s^* + \frac{\mu_s^*}{\operatorname{sh}^2\mu_s^*}\right), \quad (14)$$

где $\mu_s^* = \mu_s/2$. Следовательно оценка суммы ряда (14) по индексу s:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2} = 0\left(\frac{1}{\mu_s^3}\right). \quad (15)$$

С учетом (15) внешняя сумма в формуле (13) будет мажорироваться рядом

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_s(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2\theta_s}. \qquad (16)$$

Оценим теперь θ_s:

$$\theta_s = \xi_{s1}\mathrm{cth}\xi_{s1}^* - \xi_{s2}\mathrm{cth}\xi_{s2}^* \approx \xi_{s1} - \xi_{s2} = \frac{\xi_{s1}^2 - \xi_{s2}^2}{\xi_{s1} + \xi_{s2}} =$$

$$= \frac{P_\varepsilon}{\mu_s + \sqrt{\mu_s^2 - P_\varepsilon}} = \frac{P_\varepsilon}{\mu_s\left(1 + \sqrt{1 - P_\varepsilon/\mu_s^2}\right)},$$

поэтому $\theta_s = 0(1/\mu_s)$. Тогда мажорантный ряд (16) преобразуется к виду, аналогичному (14) с соответствующей оценкой его суммы:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k^2 + \mu_s^2)^2} = 0\left(\frac{1}{\lambda_k^3}\right).$$

Оценка $\varphi_k = 0(1/\lambda_k)$ аналогична θ_s. Тогда порядок коэффициентов в левой части формулы (13) будет $A_k^* = 0(1/\lambda_k)$, т. е. такой же, как и для начальных значений A_{k0}^*.

Это означает, что ряды в разрешающей системе (13) быстро сходятся: не хуже ряда с общим членом $1/k^3$ или $1/s^3$.

Решение для антисимметрично-симметричных форм (A-S-формы)

Функции прогибов будут содержать в случае A-S-формы нечетные функции по переменной x и четные — по переменной y:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}}[A_k\,\mathrm{sh}(\alpha_{k1}x) + B_k\mathrm{sh}(\alpha_{k2}x)]\cos(\lambda_k y),$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s[C_s\,\mathrm{ch}(\xi_{s1}y) + D_s\mathrm{ch}(\xi_{s2}y)]\sin(\mu_s x),$$

где $\lambda_k = \pi k$ $(k = 1, 3, \ldots)$; $\mu_s = 2\pi s/\gamma$ $(s = 1, 2, \ldots)$; $\tilde{k} = (k + 1)/2$; α_k, ξ_s — коэффициенты, которые определяются формулами (7). Отрицательные значения коэффициентов не рассматривались, так как формы равновесия отличаются только противоположным направлением.

По аналогии со случаем A-A-формы после аналогичных действий была получена разрешающая система

$$A_k^* = \frac{16P_\varepsilon^2\lambda_k}{\gamma\varphi_k} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_s^2}{\sigma_{ks}(\sigma_{ks} - P_\varepsilon)\theta_s} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\lambda_k A_k^*}{\sigma_{ks}(\sigma_{ks} - P_\varepsilon)}, \qquad (17)$$

где $A_k^* = A_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_{k1}^*$; $\sigma_{ks} = \lambda_k^2 + \mu_s^2$; $\varphi_k = \alpha_{k1}\mathrm{cth}\,\alpha_{k1}^* - \alpha_{k2}\mathrm{cth}\,\alpha_{k2}^*$; $\theta_s = \xi_{s1}\,\mathrm{th}\,\xi_{s1}^* - \xi_{s2}\,\mathrm{th}\,\xi_{s2}^*$.

Система (17) имеет такое же выражение, как и (13), которое отличается тем, что имеет $k = 1, 3, \ldots$, и в выражении для θ_s функции cth заменены на th.

Решение для симметрично-антисимметричных форм (S-A-формы)

Функции прогибов выбираются такими

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k[A_k\,\mathrm{ch}(\alpha_{k1}x) + B_k\mathrm{ch}(\alpha_{k2}x)]\sin(\lambda_k y),$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}}[C_s\,\mathrm{sh}(\xi_{s1}y) + D_s\mathrm{sh}(\xi_{s2}y)]\cos(\mu_s x),$$

где $\lambda_k = 2\pi k$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $\mu_s = \pi s/\gamma$ $(s = 1, 3, \ldots)$; $\tilde{s} = (s + 1)/2$.

В случае S-A-формы по сравнению с A-A-формой все нечетные и четные функции поменялись местами.

Разрешающая система будет аналогична выражению (17):

$$A_k^* = \frac{16P_\varepsilon^2\lambda_k}{\gamma\varphi_k} \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\mu_s^2}{\sigma_{ks}(\sigma_{ks} - P_\varepsilon)\theta_s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k A_k^*}{\sigma_{ks}(\sigma_{ks} - P_\varepsilon)},$$

где $A_k^* = A_k\,\mathrm{ch}\,\alpha_{k1}^*$; $\varphi_k = \alpha_{k1}\,\mathrm{th}\,\alpha_{k1}^* - \alpha_{k2}\,\mathrm{th}\,\alpha_{k2}^*$; $\theta_s = \xi_{s1}\,\mathrm{cth}\,\xi_{s1}^* - \xi_{s2}\,\mathrm{cth}\,\xi_{s2}^*$.

Численные результаты. Обсуждение

Для получения спектра критических нагрузок и соответствующих форм равновесия были разработаны вычислительные программы в среде Maple, в которых был предусмотрен вывод на печать коэффициентов A_k^* и C_s^* на каждой итерации при заданной нагрузке. Программы позволяли менять отношение сторон нанопластины, число итераций и количество членов в рядах. Основным изменяемым параметром являлась сжимающая нагрузка, перебором которой методом «стрельбы» выявлялись критические ее значения. Для каждого значения нелокального параметра $e_0A \in [0–2]$ нм с шагом 0,25 получены первые 10 относительных критических нагрузок и соответствующие формы (здесь не приводятся) закритического равновесия для квадратной нанопластины со стороной 5 нм (включая результаты для симметричных форм, полученные в работе [14]). Значение $e_0A = 0$ соответствует классической пластине Кирхгоффа.

Заметим, что для квадратной пластины в силу симметрии S-A- и A-S-форм и критические нагрузки совпадают.

В таблице приведены значения первых 10 относительных критических нагрузок для различных значений нелокального параметра e_0A, а также для сравнения значения первых критических нагрузок, полученных в работе [9].

При реализации вычислительного процесса число итераций, количество членов в рядах и количество значащих цифр увеличивалось для оценки точности вычислений критических нагрузок и коэффициентов гиперболо-тригонометрических рядов. Окончательно приняты значения этих параметров соответственно 20, 99 и 30. Это обеспечивало совпадение до 4–5 значащих цифр соответствующих коэффициентов последних соседних итераций при «попадании» на критическую нагрузку, которая при этом содержала четыре знака после запятой. Дальнейшее увеличение этих параметров не оказывало существенного влияния на точность вычислений.

Данные, приведенные в таблице, показывают, что с увеличением нелокального параметра критические нагрузки убывают. При анализе полученных 3D-форм равновесия каких-либо краевых эффектов не обнаруже-

Таблица. Критические безразмерные сжимающие нагрузки $P = Nb^2/D$ квадратной нанопластины для S-S-, A-A- и S-A-форм равновесия при различных значениях нелокального параметра

Table. Critical dimensionless compressive loads $P = Nb^2/D$ of a square CCCC-nanoplate for S-S, A-A и S-A equilibrium forms at different values of the nonlocal parameter

Форма	e_0A, нм								
	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
S-S	52,3450	46,2875	34,3594	24,0361	16,9193	12,2543	9,1656	7,0619	5,5833
S-A	92,1244	74,8790	47,9504	29,9806	19,6638	13,6324	9,9152	7,4988	5,8529
A-A	128,2100	97,0900	56,1805	33,0036	20,9206	14,2248	10,2250	7,6746	5,9595
S-S	167,0292	117,8276	62,5509	35,1038	21,7453	14,6013	10,4180	7,7828	6,0246
S-A	189,5720	128,6170	65,4665	36,0035	22,0872	14,7547	10,4959	7,8263	6,0505
S-S	246,3270	152,4470	71,1255	37,6511	22,6965	15,0241	10,6316	7,9014	6,0953
A-A	279,0810	164,3875	73,6207	38,3389	22,9447	15,1324	10,6857	7,9313	6,1131
S-A	326,6430	179,8095	76,5612	39.1214	23,2226	15,2529	10,7456	7,9642	6,1327
S-S	434,7870	208,3342	81,3010	40,3226	23,6407	15,4321	10,8342	8,0128	6,1614
A-A	630,4320	244,7240	86,3092	41,5175	24,3512	15,6040	10,9187	8,0589	6,1886
P_1 [9]	52,4550	46,3739	—	24,0594	16,9308	—	—	—	5,5846

Примечание. Прочерки в таблице означают, что эти результаты в работе [9] отсутствуют.

но. Возможно, они будут проявляться, если уравнение состояния Эрингена (1) брать в более точной интегральной форме [14].

В работе [9] получены только эйлеровые значения. Последующие критические нагрузки в этой работе не вычислялись. Сравнение показывает очень хорошее совпадение, хотя результаты [9] несколько выше соответствующих значений настоящей работы. Заметим, что энергетические методы дают, как правило, завышенные результаты при вычислениях.

Заключение

Полученные результаты могут быть использованы в проектировании smart-конструкций с нанопластинами в качестве чувствительных элементов различных датчиков, реагирующих на биаксиальное сжатие пластины в ее срединной плоскости.

Предполагается в дальнейшем исследовать устойчивость нанопластин с использованием разрешающего уравнения состояния Эрингена в интегральной форме для выявления возможных краевых эффектов.

Литература

1. Eringen A.C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves // International Journal of Engineering Science. 1972. V. 10. N 5. P. 425–435. https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90050-X
2. Eringen A.C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves // Journal of Applied Physics. 1983. V. 54. N 9. P. 4703–4710. https://doi.org/10.1063/1.332803
3. Chen Y., Lee J.D., Eskandarian A. Atomistic viewpoint of the applicability of microcontinuum theories // International Journal of Solids and Structures. 2004. V. 41. N 8. P. 2085–2097. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.11.030
4. Duan W.H., Wang C.M., Zhang Y.Y. Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics // Journal of Applied Physics. 2007. V. 101. N 2. P. 024305. https://doi.org/10.1063/1.2423140
5. Ravari M.R.K., Talebi S., Shahidi A.R. Analysis of the buckling of rectangular nanoplates by use of finite-difference method // Meccanica. 2014. V. 49. N 6. P. 1443–1455. https://doi.org/10.1007/s11012-014-9917-x
6. Malikan M. Analytical predictions for the buckling of a nanoplate subjected to non-uniform compression based on the four-variable plate theory // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2017. V. 3. N 3. P. 218–228. https://doi.org/10.22055/jacm.2017.21757.1115
7. Bastami M., Behjat B. Ritz solution of buckling and vibration problem of nanoplates embedded in an elastic medium // Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences. 2017. V. 35. N 2. P. 285–302.
8. Ebrahimi F., Barati M.R. Buckling analysis of piezoelectrically actuated smart nanoscale plates subjected to magnetic field // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2017. V. 28. N 11. P. 1472–1490. https://doi.org/10.1177/1045389x16672569
9. Wang Z., Xing Y., Sun Q., Yang Y. Highly accurate closed-form solutions for free vibration and eigenbuckling of rectangular

References

1. Eringen A.C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, 1972, vol. 10, no. 5, pp. 425–435. https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90050-X
2. Eringen A.C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 1983, vol. 54, no. 9, pp. 4703–4710. https://doi.org/10.1063/1.332803
3. Chen Y., Lee J.D., Eskandarian A. Atomistic viewpoint of the applicability of microcontinuum theories. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, vol. 41, no. 8, pp. 2085–2097. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.11.030
4. Duan W.H., Wang C.M., Zhang Y.Y. Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics. *Journal of Applied Physics*, 2007, vol. 101, no. 2, pp. 024305. https://doi.org/10.1063/1.2423140
5. Ravari M.R.K., Talebi S., Shahidi A.R. Analysis of the buckling of rectangular nanoplates by use of finite-difference method. *Meccanica*, 2014, vol. 49, no. 6, pp. 1443–1455. https://doi.org/10.1007/s11012-014-9917-x
6. Malikan M. Analytical predictions for the buckling of a nanoplate subjected to non-uniform compression based on the four-variable plate theory. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2017, vol. 3, no. 3, pp. 218–228. https://doi.org/10.22055/jacm.2017.21757.1115
7. Bastami M., Behjat B. Ritz solution of buckling and vibration problem of nanoplates embedded in an elastic medium. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 2017, vol. 35, no. 2, pp. 285–302.
8. Ebrahimi F., Barati M.R. Buckling analysis of piezoelectrically actuated smart nanoscale plates subjected to magnetic field. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2017, vol. 28, no. 11, pp. 1472–1490. https://doi.org/10.1177/1045389x16672569

nanoplates // Composite Structures. 2019. V. 210. P. 822–830. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.094

10. Chwał M., Muc A. Buckling and free vibrations of nanoplates—comparison of nonlocal strain and stress approaches // Applied Sciences. 2019. V. 9. N 7. P. 1409. https://doi.org/10.3390/app9071409
11. Shahraki M.E., Jam J.E. Investigating the buckling and vibration of a Kirchhoff rectangular nanoplate using modified couple stress theory // University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. 2023. N 4 (68). P. 75–89. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-4-7
12. Zheng X., Huang M., An D., Zhou C., Li R. New analytic bending, buckling, and free vibration solutions of rectangular nanoplates by the symplectic superposition method // Scientific Reports. 2021. V. 11. N 1. P. 2939. https://doi.org/10.1038/s41598-021-82326-w
13. Wang W., Rong D., Xu C., Zhang J., Xu X., Zhou Z. Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields // Journal of Vibration Engineering & Technologies. 2020. V. 8. N 4. P. 505–515. https://doi.org/10.1007/s42417-019-00106-3
14. Сухотерин М.В., Сосновская А.А. Потеря устойчивости защемленной по контуру прямоугольной нанопластины // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24. № 4. С. 629–636. https://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-4-629-636
15. Сухотерин М.В., Распутина Е.И., Пижурина Н.Ф. Смешанные формы свободных колебаний прямоугольной CFCF-пластины // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23. № 2. С. 413–421. https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-2-413-421
16. Сухотерин М.В. Изгиб консольных пластин поперечной нагрузкой: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Ленинградский Политехнический институт им. М.И. Калинина. Л., 1978. 16 с.
17. Абрамян Б.Л. Об одной осесимметричной задаче для сплошного весомого цилиндра конечной длины // Механика твердого тела. 1983. № 1. С. 55–62.

9. Wang Z., Xing Y., Sun Q., Yang Y. Highly accurate closed-form solutions for free vibration and eigenbuckling of rectangular nanoplates. *Composite Structures*, 2019, vol. 210, pp. 822–830. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.094
10. Chwał M., Muc A. Buckling and free vibrations of nanoplates—comparison of nonlocal strain and stress approaches. *Applied Sciences*, 2019, vol. 9, no. 7, pp. 1409. https://doi.org/10.3390/app9071409
11. Shahraki M.E., Jam J.E. Investigating the buckling and vibration of a Kirchhoff rectangular nanoplate using modified couple stress theory. University Proceedings. Volga Region. *Physical and Mathematical Sciences*, 2023, no. 4 (68), pp. 75–89. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-4-7
12. Zheng X., Huang M., An D., Zhou C., Li R. New analytic bending, buckling, and free vibration solutions of rectangular nanoplates by the symplectic superposition method. *Scientific Reports*, 2021, vol. 11, no. 1, pp. 2939. https://doi.org/10.1038/s41598-021-82326-w
13. Wang W., Rong D., Xu C., Zhang J., Xu X., Zhou Z. Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2020, vol. 8, no. 4, pp. 505–515. https://doi.org/10.1007/s42417-019-00106-3
14. Sukhoterin M.V., Sosnovskaya A.A. Instability of a rectangular CCCC-nanoplate. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 4, pp. 629–636. (in Russian). https://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-4-629-636
15. Sukhoterin M.V., Rasputina E.I., Pizhurina N.F. Mixed forms of free oscillations of a rectangular CFCFplate. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 2, pp. 413–421. (in Russian). https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-2-413-421
16. Sukhoterin M.V. *Bending of cantilever plates under transverse load*. Abstract of a dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences. Leningrad, 1978, 16 p. (in Russian)
17. Abramian B.L. On an axisymmetric problem for a solid weighty cylinder of finite length. *Mechanics of Solids*, 1983, no. 1, pp. 55–62. (in Russian)

Авторы

Сухотерин Михаил Васильевич — доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, sc 16496923700, https://orcid.org/0000-0002-8295-7089, sukhoterinmv@gumrf.ru

Войтко Ирина Викторовна — кандидат технических наук, доцент, доцент, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, https://orcid.org/0000-0003-2342-2209, voytkoiv@gumrf.ru

Сосновская Анна Анатольевна — старший преподаватель, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, 198035, Российская Федерация, sc 59171016800, https://orcid.org/0009-0000-6476-6783, sosnovskayaaa@gumrf.ru

Authors

Mikhail V. Sukhoterin — D.Sc., Associate Professor, Head of Department, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation, sc 16496923700, https://orcid.org/0000-0002-8295-7089, sukhoterinmv@gumrf.ru

Irina V. Voytko — PhD, Associate Professor, Associate Professor, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation, https://orcid.org/0000-0003-2342-2209, voytkoiv@gumrf.ru

Anna A. Sosnovskaya — Senior Lecturer, Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation, sc 59171016800, https://orcid.org/0009-0000-6476-6783, sosnovskayaaa@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 19.12.2024
Одобрена после рецензирования 17.03.2025
Принята к печати 22.05.2025

Received 19.12.2024
Approved after reviewing 17.03.2025
Accepted 22.05.2025