

doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-4-789-796

УДК 51-74; 004.02

## Вейвлеты Эрмита–Гаусса: синтез дискретных форм и исследование свойств

Алексей Юрьевич Гришенцев<sup>1</sup>✉, Николай Владимирович Коровкин<sup>2</sup>,  
Данил Павлович Островский<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация

<sup>1</sup> [AGrishentsev@yandex.ru](mailto:AGrishentsev@yandex.ru)✉, <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>

<sup>2</sup> [Nikolay.Korovkin@gmail.com](mailto:Nikolay.Korovkin@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-1173-8727>

<sup>3</sup> [dan97\\_@mail.ru](mailto:dan97_@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5397-5475>

### Аннотация

**Введение.** Изложены результаты исследований собственных векторов и вектор-функций дискретного и непрерывного преобразования Фурье. Известно, что такими собственными векторами являются произведения функции Гаусса на полиномы Эрмита, предлагается название для полученных на основе указанного произведения функций: вейвлеты Эрмита–Гаусса. **Метод.** В работе применены методы математического анализа непрерывных функций и численные методы для исследования свойств и методов синтеза собственных векторов и вектор-функций дискретного и непрерывного преобразования Фурье. **Основные результаты.** Получены выражения вычисления масштабного параметра и нормирующего множителя для дискретных форм вейвлетов Эрмита–Гаусса. Выполненные исследования позволяют утверждать, что масштабный параметр дискретной формы вейвлетов Эрмита–Гаусса зависит от числа отсчетов, а норма зависит от числа отсчетов и номера вейвлета. Сформирована форма матриц преобразования Фурье, обладающая хорошей обусловленностью при вычислении собственных векторов в форме вейвлетов Эрмита–Гаусса. **Обсуждение.** Вейвлеты Эрмита–Гаусса образуют базис, и потому могут быть использованы в задачах декомпозиции и синтеза сигналов. При выборе материнского вейвлета для декомпозиции и синтеза в первую очередь следует руководствоваться особенностями и свойствами образуемых им форм. Отмечено, что для некоторых сигналов могут дать компактное разложение вейвлеты Морле или Добеши, для других — вейвлеты Хара, есть и такие сигналы, для спектральной декомпозиции которых наиболее эффективны вейвлеты Эрмита–Гаусса.

### Ключевые слова

вейвлеты, полиномы Эрмита, функция Гаусса, волновая функция, спектральная декомпозиция, собственные числа, собственные векторы, матрицы, преобразование Фурье, синтез оптимальных сигналов

**Ссылка для цитирования:** Гришенцев А.Ю., Коровкин Н.В., Островский Д.П. Вейвлеты Эрмита–Гаусса: синтез дискретных форм и исследование свойств // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 4. С. 789–796. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-4-789-796

## Hermite–Gauss wavelets: synthesis of discrete forms and investigation of properties

Alexey Yu. Grishentsev<sup>1</sup>✉, Nikolay V. Korovkin<sup>2</sup>, Danil P. Ostrovskii<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

<sup>2</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation

<sup>1</sup> [AGrishentsev@yandex.ru](mailto:AGrishentsev@yandex.ru)✉, <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>

<sup>2</sup> [Nikolay.Korovkin@gmail.com](mailto:Nikolay.Korovkin@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-1173-8727>

<sup>3</sup> [dan97\\_@mail.ru](mailto:dan97_@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5397-5475>

**Abstract**

Considered new results of studies of eigenvectors and vector functions of discrete and continuous Fourier transforms. It is known that such eigenvectors are products of the Gauss function on Hermite polynomials, a name is proposed for the functions obtained on the basis of this product: Hermite-Gauss wavelets. In the paper studies on the base of mathematical analysis methods of continuous functions and numerical methods, the properties and methods of synthesis of eigenvectors and vector functions of discrete and continuous Fourier transforms are investigated. Expressions for calculating the scale parameter and the normalizing factor for discrete forms of Hermite-Gauss wavelets are obtained. The studies performed to prompt that the scale parameter of the discrete form of Hermite-Gauss wavelets depends on the number of samples, and the norm depends on the number of samples and the number of the wavelet. The form of the Fourier transform matrices is obtained which has good conditionality when calculating eigenvectors in the form of Hermite-Gauss wavelets. Hermite-Gauss wavelets form a basis, and therefore can be used in tasks of signal decomposition and synthesis. For choosing a mother wavelet for decomposition and synthesis, firstly one should be guided by the features and properties of the shapes formed by it. For some signals, Morlaix or Daubechey wavelets can give compact decomposition, for others, Hare wavelets, and there are also signals for which Hermite-Gauss wavelets are most effective for spectral decomposition.

**Keywords**

wavelets, Hermite polynomials, Gauss function, wave function, spectral decomposition, eigenvalues, eigenvectors, matrices, Fourier transform, synthesis of optimal signals

**For citation:** Grishentsev A. Yu., Korovkin N.V., Ostrovskii D.P. Hermite-Gauss wavelets: synthesis of discrete forms and investigation of properties. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2025, vol. 25, no. 4, pp. 789–796 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-4-789-796

**Введение**

Одной из актуальных задач цифровой и смешанной обработки и синтеза сигналов, является разработка функциональных форм называемых вейвлетами и обладающих сосредоточением энергии в частотном и временном пространствах одновременно. Интересно получение и исследование как непрерывных, так и дискретных форм. В задачах обработки сигналов [1] такие вейвлеты используются для построения фильтров [2], сжатия сигналов [3, 4], распознавания образов [5, 6], спектрально-пространственной декомпозиции [7, 8], в задачах радиосвязи подобные вейвлеты применимы для синтеза радиочастотных сигналов [9–13]. Свойством преобразования Фурье является неограниченность спектра ограниченной во времени функции и ограниченность спектра функции, неограниченной во временном пространстве. Это определяет невозможность существования функций, одновременно ограниченных в частотном и временном пространствах, но не запрещает существование функций, которые затухают относительно быстро, при удалении от области максимальных значений в данных пространствах. Анализ работ [14–16] показал, что на сегодняшний день существует достаточно много вейвлетов, обладающих указанным свойством, но обойдены вниманием вейвлет-функции, которые исследуются в настоящей работе. При этом есть основание полагать, что именно исследуемые функции являются оптимальными с точки зрения эквивалентности затухания в частотной и временной областях.

**Определение вейвлет-функций**

Предлагается следующая идея поиска вейвлетов. Пусть в гильбертовом пространстве задана матричная функция следующего вида:  $(F(\omega, t)) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-j\omega t) \right)$ , где  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота;  $t$  — время;  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Тогда для собственных значений  $\lambda_\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$  и собственных векторов-функций  $\psi(\omega, \nu)$  и  $\psi(t, \nu)$ , можно записать уравнение:

$$\lambda_\nu \psi(\omega, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, t) \psi(t, \nu) dt. \tag{1}$$

Правую часть выражения (1) можно записать в виде:

$$\lambda_\nu \psi(\omega, \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \psi(t, \nu) dt. \tag{2}$$

Несложно заметить, что  $\psi(t, \nu)$  является собственной вектор-функцией матричной функции преобразования Фурье (2), что определяет соответствие форм  $\psi(\omega, \nu)$  и  $\psi(t, \nu)$ , в том числе и затухание в частотном и временном пространствах соответственно.

Такая функция  $\psi(t, \nu)$  — известна, это произведение полиномов Эрмита

$$H(t, \nu) = \sum_{k=0}^{\nu/2} \left( (-1)^k \frac{\nu!}{k!(\nu-2k)!} (2t)^{\nu-2k} \right)$$

и функции Гаусса

$$G(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где  $\mu$  — математическое ожидание;  $\sigma$  — среднеквадратическое отклонение. При  $\mu = 0$  и  $\sigma = 1$  получим:

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Назовем такие функции вейвлетами Эрмита–Гаусса.

Уравнения вейвлетов Эрмита–Гаусса  $\psi(t, \nu)$  имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \psi(t, \nu) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{k=0}^{\nu/2} \left( (-1)^k \frac{\nu!}{k!(\nu-2k)!} (2t)^{\nu-2k} \right), \\ \|\psi\| = \sqrt{2^{\nu} \nu! \sqrt{\pi}}, \\ \bar{\psi}(t, \nu) = \frac{1}{\|\psi\|} \psi(t, \nu), \end{cases} \tag{3}$$

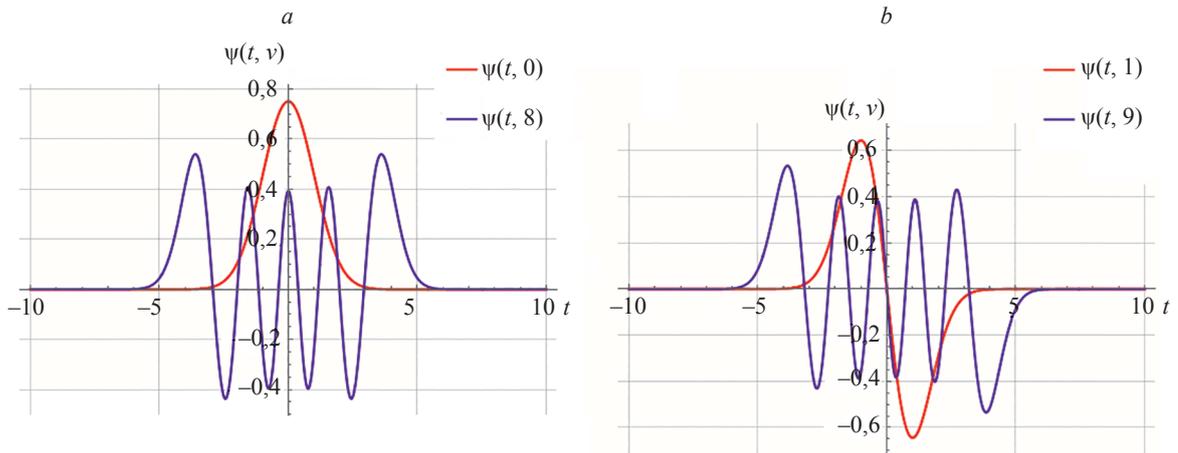


Рис. 1. Примеры графиков двух пар нормированных вейвлетов Эрмита–Гаусса:  $\psi(t, 0), \psi(t, 8)$  (а);  $\psi(t, 1), \psi(t, 9)$  (б)  
 Fig. 1. Examples of graphs of normalized Hermite-Gauss wavelets: a pair of wavelets  $\psi(t, 0), \psi(t, 8)$  (a); a pair of wavelets  $\psi(t, 1), \psi(t, 9)$  (b)

где  $\psi(t, v)$  — не нормированная функция;  $\|\psi\|$  —  $L^2(\mathbb{R})$  норма функции  $\psi(t, v)$ ;  $\bar{\psi}(t, v)$  — нормированная функция;  $v$  — номер вейвлета Эрмита–Гаусса. На рис. 1 приведены примеры вейвлетов Эрмита–Гаусса.

В физике  $\psi(t, v)$  называется волновой функцией и является решением уравнения Шредингера [17, 18]. Собственные числа  $\lambda_v$  в (1) и (2) образованы циклической последовательностью  $(1, -j, 1, j, -1, -j, \dots)$ , выражаются как  $\lambda_v = (-j)^v$  и являются кратными корнями векового уравнения матрицы  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-j\omega t)\right)$ .

Отметим, что  $|\lambda_v| = 1$ , в силу того, что эта матрица является унитарной, так как  $\left|\det\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-j\omega t)\right)\right| = 1$ .

Семейство функций (3) образует ортонормированный базис в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$ , т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(t, v) \bar{\psi}(t, q) dt = \delta_q^v$ , где  $\delta_q^v = \begin{cases} 1, & v = q \\ 0, & v \neq q \end{cases}$  — символ Кронекера, а потому является единственным решением уравнения (2). Подчеркнем, что  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \psi(t, v) \rightarrow 0$ , т. е. при любом значении  $v$  (включая  $v \rightarrow \infty$ ) значение функции  $\psi(t, v)$  стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат. Таким образом,  $\bar{\psi}(t, v)$  образуют семейство вейвлет-функций и одновременно являются собственными вектор-функциями преобразования Фурье. Функция  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(t, v)$

при  $v = 0$  образует распределение Гаусса  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(t, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), t \in (-\infty, \infty)$  с математическим ожиданием  $\mu = 0$  и стандартным отклонением  $\sigma = 1$ ; при  $v = 1$  функция  $\frac{1}{2} \psi(t, v)$  образует распределение Релея  $\frac{1}{2} \psi(t, v) = t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), t \in (0, \infty)$ , с модой  $\sigma = 1$  и математическим ожиданием  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . Совокупность перечисленных свойств

позволяет ожидать эффективного применения исследуемых вейвлетов в различных задачах анализа и синтеза дискретных и непрерывных сигналов.

### Собственные векторы конечномерной формы матрицы преобразования Фурье

Одна из наиболее часто используемых форм матриц преобразования Фурье [19] имеет вид:

$$\mathbf{V} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{j2\pi nm}{N}\right)\right), n, m = \overline{0, N-1}, \quad (4)$$

где  $n$  и  $m$  — индексы строк и столбцов матрицы  $\mathbf{V}$ . Матрица преобразования Фурье  $\mathbf{V}$  является: симметрической, т. к.  $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}$ ; нормальной, т. к.  $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^H$ , где  $\mathbf{V}^H$  — матрица эрмитово-сопряженная к  $\mathbf{V}$ ; унитарной в силу  $|\det(\mathbf{V})| = 1$ ; не эрмитовой, т. к.  $\mathbf{V}^H \neq \mathbf{V}$ .

Для оценки ошибки вычисления собственных значений матрицы, в зависимости от ее возмущения, вводят понятие обусловленности. Понятие обусловленности матрицы при вычислении собственных значений отличается от обусловленности при решении систем линейных уравнений, так как задача вычисления собственных значений в общем случае сводится к определению корней нелинейного полинома. При решении задачи определения собственных векторов и собственных чисел нормальных матриц различают обусловленность при малых возмущениях (возмущениях высших порядков) и относительно больших возмущениях (возмущениях первого порядка). Возмущения высших порядков обычно ассоциируют с машинной точностью записи чисел с плавающей точкой. Следует отметить, что критерий хорошей или плохой обусловленности матрицы по отношению к собственным значениям, может не совпадать с критерием обусловленности по отношению к задаче вычисления собственных векторов, так как задача вычисления собственных векторов (при известных собственных значениях) сводится к решению системы линейных уравнений [20]. Например, матрица  $\mathbf{V}$  относится к классу матриц, которые хорошо обусловлены

по отношению к задаче на собственные значения, но за счет близких по величине собственных значений плохо обусловлена по отношению к задаче на собственные векторы. Исследования подтверждают, что матрица  $\mathbf{V}$  плохо обусловлена для задачи вычисления собственных векторов, и возмущения  $\Delta\mathbf{V}$  высших порядков матрицы  $\mathbf{V}$  не позволяют получить адекватные величины собственных векторов.

Относительная ошибка расчета собственных векторов для произвольной симметрической матрицы  $\mathbf{H}$  [20, 21] может быть оценена с помощью следующего выражения:

$$\Delta = \frac{\|\Delta\boldsymbol{\Psi}\|}{\|\boldsymbol{\Psi}\|} \leq \|\Delta\mathbf{H}\| \sum_{\substack{q=1, \\ v \neq q}}^N \frac{1}{|\lambda_q - \lambda_v|}, \quad (5)$$

где  $\boldsymbol{\Psi}$  — собственный вектор;  $\Delta\boldsymbol{\Psi}$  — ошибки собственного вектора для матрицы  $\mathbf{H}$ ;  $\Delta\mathbf{H}$  — матрица возмущения ( $\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H}$ );  $\lambda_q, \lambda_v, q, v = 0, N-1$  — собственные числа матрицы  $\mathbf{H}$ .

Запишем выражение для модифицированной матрицы (4):

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{j(\pi \pm \varepsilon)(2n - N + 1)(2m - N + 1)}{2N}\right), \quad (6)$$

$$n, m = \overline{0, N-1},$$

где  $\varepsilon$  — аддитивная компонента аргумента, возмущающая матрицу  $\mathbf{F}$ . Матрица  $\mathbf{F}$ , так же, как и  $\mathbf{V}$ , является: симметрической, нормальной, унитарной, не эрмитовой. Матрица (6) позволяет получать вектор преобразования Фурье с нулевой частотой по центру, и расположенными по возрастанию от центра положительными частотами справа и отрицательными — слева, соответственно, т. е. в виде который обеспечит соответствие формы функции  $\psi(t, \nu)$  и ее дискретного преобразования Фурье  $\mathcal{F}\{\psi(t, \nu)\}$ .

Обусловленность матрицы (6) в задачах собственных значений и собственных векторов аналогична обусловленности матрицы (4), т. е. матрица  $\mathbf{F}$  имеет хорошую обусловленность для задачи собственных значений. При возмущениях высших порядков матрицы  $\mathbf{F}$  собственные значения  $\lambda_v$  также имеют возмущения высших порядков, т. е.  $|\lambda_v| \neq 1$ , что, в свою очередь, дает  $|\lambda_q - \lambda_v| \approx 0 \Rightarrow |\lambda_q - \lambda_v|^{-1} \rightarrow \infty$  при некоторых значениях  $q$  и  $v$ . Следовательно, для матрицы  $\mathbf{F}$  среди слагаемых (5) будут встречаться величины, близкие по значению к максимальным в используемом формате или переполнения (infinity — в формате стандарта IEEE 754<sup>1</sup>), что, в свою очередь, ухудшает обусловленность матрицы  $\mathbf{F}$  в задаче вычисления собственных векторов. Заметим, что для матриц  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{F}$  при вычислениях собственных чисел  $\lambda_v$  они принимают значения, близкие с машинной точностью к элементам множества  $\{-1, -j, 1, j\}$ , но не упорядоченные по правилу  $(-j)^v$ .

При относительно малых возмущениях первого порядка  $\Delta\mathbf{F}$  и относительно небольших размерах матрицы  $\mathbf{F}$  ошибка вычисления собственных значений возрастает,

но может быть допустимой, и потому возрастает величина  $|\lambda_q - \lambda_v|$ , что способствует уменьшению знаменателя (5), и следовательно приводит к снижению относительной ошибки  $\Delta$ . Дальнейшее увеличение возмущения  $\Delta\mathbf{F}$  или увеличение размеров матрицы (6) приведет к недопустимому росту ошибки  $\Delta$ . Например, в вычислительных экспериментах с матрицей (6) использовали возмущения порядка  $\varepsilon \approx \pm(10^{-7}-10^{-3})$ . Исследования показали, что при малых размерах матрицы  $\mathbf{F}$  ( $N \sim 2^2-2^5$ ) можно улучшить обусловленность за счет некоторого возмущения (первого порядка) матрицы  $\mathbf{F}$ , например, с помощью задания не нулевого значения  $\varepsilon$  в (6). Но при увеличении размеров матрицы  $\mathbf{F}$  или увеличении возмущения  $\Delta\mathbf{F}$  обусловленность ухудшается.

Особенность возмущения  $\Delta\boldsymbol{\Psi}$  собственных векторов  $\boldsymbol{\Psi}$  для матрицы  $\mathbf{F}$ , проявляется как ненулевая мнимая компонента и искажение вещественной части для всегда вещественных векторов  $\boldsymbol{\Psi}$ . Для решения проблемы вычисления собственных векторов матрицы преобразования Фурье, предлагается: разделение матрицы (6) на вещественную и мнимую части, или, другими словами, разделение на четные и нечетные функции, образующие матрицу; формирование таких матриц (вещественной и мнимой частей), для которых все собственные значения будут различны.

В ходе исследований такие матрицы были определены:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{j\pi(2n - N)(2m - N + 1)}{2N}\right), \\ n, m = \overline{0, N-1}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \text{Re}(\mathbf{W}) \\ \mathbf{B} = \text{Im}(\mathbf{W}) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7)$$

где  $\text{Re}(\dots)$  и  $\text{Im}(\dots)$  — операторы взятия вещественной и мнимой частей.

Матрица  $\mathbf{W}$  является не симметрической, не эрмитовой, нормальной и унитарной. Обратим внимание на отличие  $\mathbf{W}$  по (7) от  $\mathbf{F}$  по (6), в числителе степени экспоненты: отсутствует возмущающее слагаемое  $\varepsilon$  и на единицу отличается множитель  $(2n - N)$ , что приводит к фазовому изменению строковых гармонических компонент в матрице  $\mathbf{W}$  по отношению к  $\mathbf{F}$ . Фазовое смещение гармонических компонент в матрице  $\mathbf{W}$ , и, соответственно, в матрицах  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , позволяет сделать различными все собственные числа матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  (рис. 2, б). По этой причине матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  хорошо обусловлены для решения задачи вычисления собственных векторов. Собственные числа матрицы  $\mathbf{W}$  с машинной точностью принимают значения  $|\lambda_v(\mathbf{W})| = 1$ , но не всегда являются элементами множества  $\{-1, -j, 1, j\}$  (рис. 2, а). При использовании матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  собственные вектора делятся на два класса: четные для  $\mathbf{A}$  и нечетные для  $\mathbf{B}$ . Вместе с разделением собственных векторов по матрицам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  происходит разделение собственных чисел, связанных уравнениями с собственными векторами. Потому возможно либо принять отдельную независимую нумерацию собственных чисел и векторов для  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ; либо придерживаться введен-

<sup>1</sup> 754-2019 — IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. Revision of IEEE Std 754. 2008.

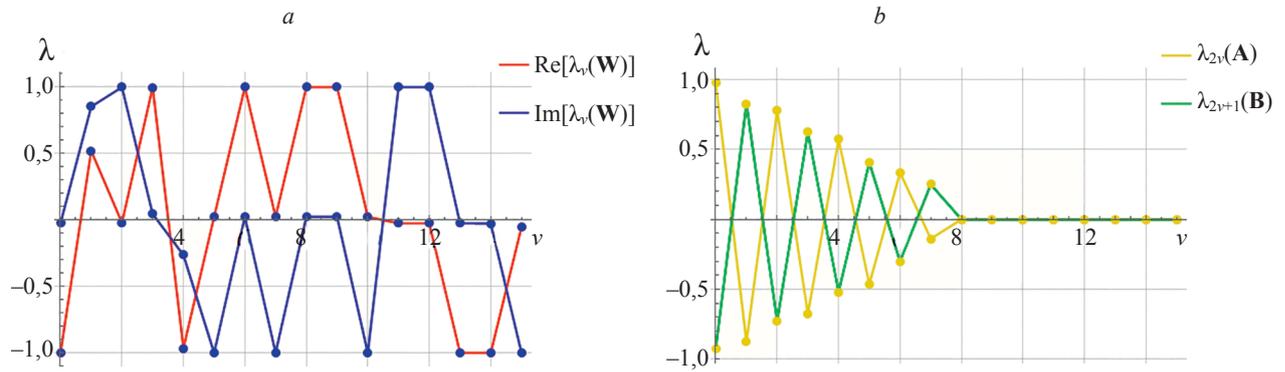


Рис. 2. Распределение собственных чисел для матриц размером  $16 \times 16$ : для действительной и мнимой частей матрицы  $\mathbf{W}$  (a); для матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  (b).

Значения в точках, соединительные линии отображены для удобства восприятия

Fig. 2. The distribution of eigenvalues for  $16 \times 16$  matrices, values in points, connecting lines are displayed for ease of perception: for a matrix  $\mathbf{W}$  (a); for matrices  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  (b)

ной ранее общей нумерации. Договоримся придерживаться общей нумерации, это позволит сохранить ранее принятые обозначения и согласованность изложения.

В качестве примера исследуем матрицы размером  $16 \times 16$ . Из рис. 2, b очевидна тенденция распределения собственных значений  $\lambda_{2\nu}(\mathbf{A})$  и  $\lambda_{2\nu+1}(\mathbf{B})$  при  $\nu = 0, N-1$ : в случае  $\nu \leq (N/2) - 1$  все собственные числа различны, как для каждой из матриц  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{B}$ , так и двух матриц. Различие собственных чисел для каждой матрицы обеспечивает хорошую обусловленность  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  при решении задачи определения собственных векторов. При  $\nu > (N/2) - 1$  все собственные числа обращаются в нули. Общее число собственных чисел для матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  отличных от нуля  $N$ , из чего следует, что общее число собственных векторов для  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  так же  $N$ .

Соответствующие ненулевым значениям собственных вектора обозначим  $\psi_{\mathbf{A}}(t, 2\nu)$ ,  $\psi_{\mathbf{B}}(t, 2\nu + 1)$  для  $\nu = 0, N/2 - 1$ ; причем матрица  $\mathbf{A}$  в качестве собственных векторов имеет четные вейвлеты Эрмита-Гаусса  $\psi_{\mathbf{A}}(t, 2\nu)$ , а матрица  $\mathbf{B}$  — нечетные  $\psi_{\mathbf{B}}(t, 2\nu + 1)$ .

### Дискретная форма вейвлетов Эрмита-Гаусса, интервал совпадения формы в частотном и временном пространствах

С точки зрения исследования свойств дискретных форм вейвлетов Эрмита-Гаусса значительным вопросом является их нормирование и определение интервалов задания. При поиске интервала можно руководствоваться различными соображениями, например, выбор интервала  $[-a, a]$  можно осуществлять на основании энергетического критерия:  $\left( \int_{-a}^a \psi^2(t, \nu) dt \right) \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t, \nu) dt \right)^{-1} = p$ , где  $p = 0 \dots 1$  — показатель соотношения энергий вейвлетов заданных на интервалах  $[-a, a]$  и  $(-\infty, \infty)$ ; или критерия полного масштабного соответствия вейвлет-функций во временном пространстве  $\psi(t, \nu)$  и их частотного образа  $\mathcal{F}\{\psi(t, \nu)\}$  полученного в результате дискретного преобразования Фурье. Критерий масштабного соответствия является приори-

тетным, так как в отличие от энергетического не содержит некоторого произвола при выборе соотношения  $p$ . Выполненные исследования позволяют утверждать, что масштабный параметр  $[-a, a]$  дискретной формы вейвлетов Эрмита-Гаусса зависит от числа отсчетов  $N$ , а норма зависит от числа отсчетов  $N$  и номера вейвлета  $\nu$ .

Для поиска выражения определения масштабного параметра  $[-a, a]$  запишем уравнение:

$$\begin{cases} \psi = \psi\left(\frac{2al}{(N-1)} - a, \nu\right), l = \overline{0, N-1}, \\ \bar{\psi} = \frac{\psi}{\|\psi\|}, \\ \mathbf{F} = \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{j\pi(2n-N+1)(2m-N+1)}{2N}\right) \right), \\ n, m = \overline{0, N-1}, \\ d_E(\bar{\psi}, \text{Re}(\mathbf{F}\bar{\psi})) \rightarrow \min, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\bar{\psi}$  — нормированный вейвлет Эрмита-Гаусса, т. е. собственный вектор;  $\mathbf{F}$  — матрица преобразования Фурье (5) без возмущающей аддитивной компоненты  $\varepsilon$ ;  $d_E(\bar{\psi}, \text{Re}(\mathbf{F}\bar{\psi}))$  — функция евклидова расстояния между  $\bar{\psi}$  и  $\text{Re}(\mathbf{F}\bar{\psi})$ .

Решая задачу (8) минимизации  $d_E(\bar{\psi}, \text{Re}(\mathbf{F}\bar{\psi}))$  и изменяя параметр  $a$ , будем производить поиск интервала  $[-a, a]$ , для различных значений  $N$ , т. е. получим последовательность  $a = \alpha(N)$ , причем значение  $a$  не зависит от номера вейвлета  $\nu$ .

На основании анализа последовательности  $a = \alpha(N)$  был произведен подбор аппроксимирующего выражения:

$$a = \sqrt{\frac{8,00922}{4N-2,69}} \sum_{m=1}^N \sqrt{\ln\left(\frac{N}{m}\right)} \pm \Delta a, \quad (9)$$

где  $\Delta a$  — ошибка аппроксимации. Среднее значение относительной ошибки при  $N = 3,2048$  имеет порядок  $\frac{\Delta a}{a} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ , что можно охарактеризовать как высокая

точность. Следует отметить, что для большинства практических расчетов границы интервала  $[-a, a]$  можно определить с меньшей точностью, на основании выражения:  $a = \sqrt{\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \sqrt{\ln\left(\frac{N}{m}\right)}} \pm \Delta a'$ , где  $\Delta a' > \Delta a$ .

Далее произведем поиск нормирующего множителя дискретной формы вейвлет-функций. Исследования позволяют получить следующее выражение нормы:

$$\|\Psi\| = \left\| \left( \Psi\left(\frac{2al}{(N-1)} - a, v\right) \right) \right\| = \sqrt{2^{v!}} \sqrt[4]{\frac{N}{2}}, \quad l = \overline{0, N-1}. \quad (10)$$

Обобщая полученные результаты (8), (9) и (10) запишем выражения для дискретных форм семейства нормированных вейвлетов Эрмита–Гаусса:

$$\begin{cases} \Psi(t, v) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{v/2} \left( (-1)^k \frac{v!}{k!(v-2k)!} (2t)^{v-2k} \right), \\ a = \sqrt{\frac{8,00922}{4N-2,69} \sum_{m=1}^N \sqrt{\ln\left(\frac{N}{m}\right)}}, \|\Psi_v\| = \sqrt{2^{v!}} \sqrt[4]{\frac{N}{2}}, \\ \bar{\Psi}_v = \frac{1}{\|\Psi_v\|} \left( \Psi\left(-a + \frac{2al}{(N-1)}, v\right) \right), l, v = \overline{0, N-1}. \end{cases} \quad (11)$$

В качестве примера исследуем матрицу  $\mathbf{M}$  размером  $64 \times 64$ , каждая строка которой образована вейвлетом  $\bar{\Psi}_v, v = \overline{0, N-1}$ . Обратим внимание на изображение (рис. 3) автокорреляционной матрицы  $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ . Матрица  $\mathbf{M}$  содержит все четные и нечетные вейвлеты, упорядоченные по номерам строк, так что первая строка матрицы  $\mathbf{M}$  соответствует нулевому вейвлету. На рис. 3 видно, что на матрице  $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$  для вейвлетов имеющих порядковый номер более 32 наблюдается «рябь», что говорит о потере ортогональности, так как скалярное произведение перестает быть равным нулю. Но при этом главная диагональ автокорреляционной матрицы  $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$  остается доминирующей, что говорит о неравенстве нулю ее определителя и о том, что  $\mathbf{M}$  образует базис. Дело в том, что в отличие от гармонических функций, для которых на каждой частоте есть вариант четной и нечетной, вейвлеты Эрмита–Гаусса при уве-

личении номера и переходе от четной функции к нечетной и опять с четной и т. д. постоянно увеличивают частоту. В результате при достижении номера вейвлета  $(N/2) \leq v$  нарушается условие обобщенной теоремы Котельникова, ортогональность по критерию скалярного произведения утрачивается, базис становится не ортогональным, но нормированным. Аналогичный вывод позволяет сделать исследование графика распределения собственных чисел (рис. 2, b), но на примере матрицы размером  $16 \times 16$ .

В результате можно сделать вывод, что дискретные формы вейвлетов Эрмита–Гаусса (11) позволяют задать ортонормированный базис подпространства  $\mathbb{R}^{(N/2)} \in \mathbb{R}^N$ , или нормированный базис пространства  $\mathbb{R}^N$ . Отметим, что такое свойство характерно для дискретных форм многих непрерывных гладких вейвлетов, если их задействовать для получения базиса в конечномерном пространстве. В связи с этим для оцифровки вейвлетов с номером  $v$  необходимо использовать частоту отсчетов на интервале дискретизации  $[-a, a]$  более чем  $2v$ .

Таким образом, при декомпозиции по ортонормированному базису вейвлетов Эрмита–Гаусса (3) заданных в непрерывном виде в гильбертовом пространстве будет выполняться равенство Парсеваля:

$$\begin{cases} c_v = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}(t, v) f(t) dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_{v=0}^{\infty} |c_v|^2 \end{cases}$$

При декомпозиции по базису вейвлетов заданных в пространстве  $\mathbb{R}^N$  равенство Парсеваля будет выполняться только в случае если сигнал может быть разложен без остатка по базису  $\bar{\Psi}_v, v = \overline{0, (N/2) - 1}$ , т. е. в подпространстве  $\mathbb{R}^{(N/2)} \in \mathbb{R}^N$ , в противном случае равенство Парсеваля выполняться не будет.

### Обсуждение

Среди неограниченного множества семейств ортогональных вейвлетов, вейвлеты Эрмита–Гаусса обладают уникальным свойством — они являются собственными векторами преобразования Фурье. Такая особенность определяет их хорошую локализацию как во временном, так и в частотном пространстве.

Вейвлеты Эрмита–Гаусса образуют базис, и потому могут быть использованы в задачах декомпозиции и синтеза сигналов. При выборе материнского вейвлета для декомпозиции и синтеза в первую очередь следует руководствоваться особенностями и свойствами образуемых им форм, для некоторых сигналов могут дать компактное разложение вейвлеты Морле или Добеши, для других вейвлеты Хара. В отдельных случаях для спектральной декомпозиции наиболее эффективны вейвлеты Эрмита–Гаусса.

### Заключение

Произведены исследования собственных векторов преобразования Фурье. Получены формы матриц преобразования Фурье обеспечивающие хорошую обуслов-

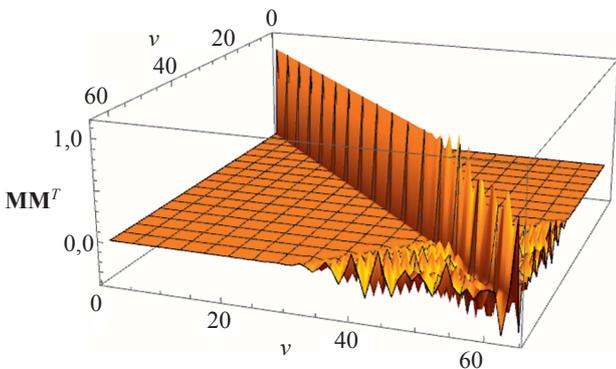


Рис. 3. Автокорреляционная матрица  $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$  вейвлетов Эрмита–Гаусса

Fig. 3. The autocorrelation matrix  $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$  of Hermite-Gauss wavelets

ленность в решении задачи вычисления собственных векторов. Получены выражения вычисления масштабного параметра и нормирующего множителя для дискретных форм вейвлетов Эрмита–Гаусса. Выполненные

исследования позволяют утверждать, что масштабный параметр дискретной формы вейвлетов Эрмита–Гаусса зависит от числа отсчетов, а норма зависит от числа отсчетов и номера вейвлета.

### Литература

1. Коровкин Н.В., Грицутенко С.С. О применимости быстрого преобразования Фурье для гармонического анализа несинусоидальных токов и напряжений // *Известия Российской академии наук. Энергетика*. 2017. № 2. С. 73–86.
2. Berber S. Theory of the design, and operation of digital filters // *Discrete Communication Systems*. 2021. P. 797–823. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198860792.003.0016>
3. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Триумф, 2003. 320 с.
4. Rioul O., Vetterli M. Wavelets and signal processing // *IEEE Signal Processing Magazine*. 1991. V. 8. N 4. P. 14–38. <https://doi.org/10.1109/79.91217>
5. Chen C., Liu M.-Y., Tuzel O., Xiao J. R-CNN for small object detection // *Lecture Notes in Computer Science*. 2017. V. 10115. P. 214–230. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-54193-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-319-54193-8_14)
6. Дворников С.В., Сауков А.М. Метод распознавания радиосигналов на основе вейвлет-пакетов // *Научное приборостроение*. 2004. Т. 14. № 1. С. 85–93.
7. Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлет-пакетное разложение ЭЭГ на основные частотные ритмы // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2016. № 2 (35). С. 54–61. <https://doi.org/10.17223/19988605/35/6>
8. Коробейников А.Г., Сидоркина И.Г. Первичная обработка данных о сейсмическом событии при помощи вейвлетов в MatLab // *Кибернетика и программирование*. 2018. № 1. С. 36–47. <https://doi.org/10.25136/2306-4196.2018.1.25245>
9. Кислинский В.С., Грахова Е.П., Абдрахманова Г.И. Применение вейвлетов и функций Эрмита для моделирования СШП-импульсов под требования маски ГКРЧ // *Инфокоммуникационные технологии*. 2015. Т. 13. № 4. С. 391–398. <https://doi.org/10.18469/ikt.2015.13.4.05>
10. Lindsey A.R. Wavelet packet modulation for orthogonally multiplexed communication // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1997. V. 45. P. 1336–1339. <https://doi.org/10.1109/78.575704>
11. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Применение некоторых вейвлетов для генерации широкополосных сигналов // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2017. Т. 60. № 8. С. 712–720. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2017-60-8-712-720>
12. Гришенцев А.Ю., Коровкин Н.В., Коробейников А.Г. Исследование свойств преобразования Фурье вейвлетов Эрмита–Гаусса и применение полученных результатов в задачах радиоэлектроники // *Журнал радиоэлектроники*. 2025. № 6. С. 13. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.6.11>
13. Гришенцев А.Ю., Арустамов С.А., Коробейников А.Г., Козин О.В. Защита канала широкополосной связи с применением ортогональных шумоподобных сигнальных символов // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2019. Т. 19. № 2. С. 280–291. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2019-19-2-280-291>
14. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // *Успехи математических наук*. 1998. Т. 53. № 6 (324). С. 53–128. <https://doi.org/10.4213/rm89>
15. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // *Успехи физических наук*. 2001. Т. 171. С. 465–501. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0171.200105a.0465>
16. Семенов В.И., Чумаров С.Г. От конструирования вейвлетов на основе производных функции Гаусса к синтезу фильтров с конечной импульсной характеристикой // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2024. Т. 24. № 2. С. 306–313. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-2-306-313>
17. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963. 704 с.

### References

1. Korovkin N.V., Gritsutenko S.S. About applicability of the fast fourier transform for a harmonic analysis of non sinusoidal currents and voltages. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2017, no. 2, pp. 73–86. (in Russian)
2. Berber S. Theory of the design, and operation of digital filters. *Discrete Communication Systems*, 2021, pp. 797–823. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198860792.003.0016>
3. Welstead S. *Fractal and Wavelet Image Compression Techniques*. SPIE Publication, 1999, 254 p.
4. Rioul O., Vetterli M. Wavelets and signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1991, vol. 8, no. 4, pp. 14–38. <https://doi.org/10.1109/79.91217>
5. Chen C., Liu M.-Y., Tuzel O., Xiao J. R-CNN for small object detection. *Lecture Notes in Computer Science*, 2017, vol. 10115, pp. 214–230. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-54193-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-319-54193-8_14)
6. Dvornikov S.V., Saukov A.M. Signal identification method based on wavelet-packets. *Nauchnoe Priborostroenie*, 2004, vol. 14, no. 1, pp. 85–93. (in Russian)
7. Podkur P.N., Smolentsev N.K. Wavelet packet decomposition EEG on the basic frequency rhythms. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2016, no. 2 (35), pp. 54–61. (in Russian). <https://doi.org/10.17223/19988605/35/6>
8. Korobeinikov A.G., Sidorkina I.G. Primary processing of seismic event data using wavelets in MATLAB. *Cybernetics and Programming*, 2018, no. 1, pp. 36–47. (in Russian). <https://doi.org/10.25136/2306-4196.2018.1.25245>
9. Kisilinski V.S., Grakhova E.P., Abdrakhmanova G.I. Application of wavelets and Hermiteans for simulation of ultra-wideband pulses satisfying to requirements of State Committee of Radio Frequencies. *Infokommunikacionnye Tehnologii*, 2015, vol. 13, no. 4, pp. 391–398. (in Russian). <https://doi.org/10.18469/ikt.2015.13.4.05>
10. Lindsey A.R. Wavelet packet modulation for orthogonally multiplexed communication. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, vol. 45, pp. 1336–1339. <https://doi.org/10.1109/78.575704>
11. Grishentsev A.Yu., Korobeinikov A.G. Application of several wavelets for generating wideband signals. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, vol. 60, no. 8, pp. 712–720. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2017-60-8-712-720>
12. Grishentsev A.Yu., Korovkin N.V., Korobeynikov A.G. Investigation of the properties of the Fourier transform of Hermite-Gauss wavelets and application of the results obtained in radio electronics problems. *Journal of Radio Electronics*, 2025, no. 6, pp. 13. (in Russian). <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.6.11>
13. Grishentsev A.Yu., Arustamov S.A., Korobeynikov A.G., Kozin O.V. Orthogonal noise-like signal symbols for broadband channel protection. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 280–291. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2019-19-2-280-291>
14. Novikov I.Ya., Stechkin S.B. Basic wavelet theory. *Russian Mathematical Surveys*, 1998, vol. 53, no. 6, pp. 1159–1231. <https://doi.org/10.1070/rm1998v053n06ABEH000089>
15. Dremin I.M., Ivanov O.V., Nechitailo V.A. Wavelets and their uses. *Physics Uspekhi*, 2001, vol. 44, no. 5, pp. 447–478. <https://doi.org/10.1070/PU2001v044n05ABEH000918>
16. Semenov V.I., Chumarov S.G. From the construction of wavelets based on derivatives of the Gaussian function to the synthesis of filters with a finite impulse response. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 2, pp. 306–313. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-2-306-313>
17. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 704 p. (in Russian)
18. Tokita S., Sugiyama T., Noguchi F., Fujii H., Kobayashi H. An attempt to construct an isosurface having symmetry elements. *Journal*

18. Tokita S., Sugiyama T., Noguchi F., Fujii H., Kobayashi H. An attempt to construct an isosurface having symmetry elements // *Journal of Computer Chemistry, Japan*. 2005. V. 5. N. 3. P. 159–164. <https://doi.org/10.2477/jccj.5.159>
19. Грищенко А.Ю. Автокорреляционные и фрактальные свойства матриц линейного унитарного преобразования Фурье // *Радиотехника*. 2019. № 1. С. 5–14. <https://doi.org/10.18127/j00338486-201901-01>
20. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. Киев: Наукова думка, 1987. 287 с.
21. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
- of Computer Chemistry, Japan*, 2005, vol. 5, no. 3, pp. 159–164. <https://doi.org/10.2477/jccj.5.159>
19. Autocorrelation and fractal properties of the matrix linear unitary Fourier transforms. *Radioengineering*, 2019, no. 1, pp. 5–14. (in Russian). <https://doi.org/10.18127/j00338486-201901-01>
20. Molchanov I.N. *Machine Methods for Applied Problems Solving. Algebra, Approximation of Functions*. Kiev, Naukova dumka, 1987, 287 p. (in Russian)
21. Wilkinson J.H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford, Clarendon Press, 1965, 662 p.

**Авторы**

**Грищенко Алексей Юрьевич** — доктор технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 56321138400](https://orcid.org/0000-0003-1373-0670), <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>, [AGrishentsev@yandex.ru](mailto:AGrishentsev@yandex.ru)

**Коровкин Николай Владимирович** — доктор технических наук, профессор, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация, [sc 6601971248](https://orcid.org/0000-0002-1173-8727), <https://orcid.org/0000-0002-1173-8727>, [Nikolay.Korovkin@gmail.com](mailto:Nikolay.Korovkin@gmail.com)

**Островский Данил Павлович** — аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, <https://orcid.org/0000-0001-5397-5475>, [dan97@mail.ru](mailto:dan97@mail.ru)

**Authors**

**Alexey Yu. Grishentsev** — D.Sc., Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 56321138400](https://orcid.org/0000-0003-1373-0670), <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>, [AGrishentsev@yandex.ru](mailto:AGrishentsev@yandex.ru)

**Nikolay V. Korovkin** — D.Sc., Full Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation, [sc 6601971248](https://orcid.org/0000-0002-1173-8727), <https://orcid.org/0000-0002-1173-8727>, [Nikolay.Korovkin@gmail.com](mailto:Nikolay.Korovkin@gmail.com)

**Danil P. Ostrovskii** — PhD Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0001-5397-5475>, [dan97@mail.ru](mailto:dan97@mail.ru)

*Статья поступила в редакцию 21.01.2025*  
*Одобрена после рецензирования 01.07.2025*  
*Принята к печати 18.07.2025*

*Received 21.01.2025*  
*Approved after reviewing 01.07.2025*  
*Accepted 18.07.2025*



Работа доступна по лицензии  
 Creative Commons  
 «Attribution-NonCommercial»