НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
ноябрь–декабрь 2025 Том 25 № 6 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
November–December 2025 Vol. 25 No 6 http://ntv.ifmo.ru/en/
ISSN 2226-1494 (print) ISSN 2500-0373 (online)

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-6-1098-1106
УДК 681.513

Управление с предиктором по выходу для неустойчивых линейных систем с входным запаздыванием

Антон Александрович Пыркин[1]✉, Константин Юрьевич Калинин[2], Хан Конг Чан[3]

[1,2,3] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

[1] pyrkin@itmo.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-8806-4057
[2] kgkalinin@gmail.com, https://orcid.org/0009-0009-3092-6254
[3] werkaiaye@gmail.com, https://orcid.org/0009-0007-1116-7876

Аннотация
Введение. Рассмотрена классическая задача управления по выходу для линейной системы с входным запаздыванием и постоянными известными параметрами. Объект управления может быть неустойчивым, из-за чего большинство известных методов становятся неэффективными или неконструктивными. **Метод.** Предложен новый алгоритм управления на основе наблюдателя Люенбергера и предиктора Смита с добавлением корректирующих членов, определяемых простыми выражениями, не требующими сложных вычислений. Регулятор имеет линейную структуру, однако, в корректирующем члене предусмотрен периодический сброс до нуля значений интеграторов. **Основные результаты.** Аналитически показано, что замкнутая система объекта управления с входным запаздыванием и модифицированным предиктором Смита является глобально экспоненциально устойчивой. **Обсуждение.** Предложенный метод управления системами с входным запаздыванием превосходит все известные аналоги по простоте реализации и эффективной работоспособности для неустойчивых систем. В дальнейших исследованиях представленный подход будет направлен на нелинейные и параметрически неопределенные системы с входным запаздыванием.

Ключевые слова
входное запаздывание, предиктор, управление по выходу, неустойчивые системы

Благодарности
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-00896).

Ссылка для цитирования: Пыркин А.А., Калинин К.Ю., Чан Х.К. Управление с предиктором по выходу для неустойчивых линейных систем с входным запаздыванием // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 6. С. 1098–1106. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-6-1098-1106

Output predictor control for unstable linear systems with input delay

Anton A. Pyrkin[1]✉, Konstantin Yu. Kalinin[2], Han Cong Tran[3]

[1,2,3] ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

[1] pyrkin@itmo.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-8806-4057
[2] kgkalinin@gmail.com, https://orcid.org/0009-0009-3092-6254
[3] werkaiaye@gmail.com, https://orcid.org/0009-0007-1116-7876

Abstract
The classical output control problem for a linear system with an input delay and constant known parameters is considered. The plant may be unstable, making most of the known methods ineffective or unconstructive. A new control algorithm based on the Luenberger observer and the Smith predictor is proposed, incorporating correction terms defined by simple expressions that eliminate the need for complex calculations. The resulting regulator has a linear structure; however, the correction term provides for a periodic reset of the corresponding regulator variable. It is analytically proven that a closed system of a plant with an input delay and a modified Smith predictor is globally exponentially stable. The resulting method for controlling systems with an input delay surpasses all analogues known to the authors in terms of simplicity

© Пыркин А.А., Калинин К.Ю., Чан Х.К., 2025

of implementation and effective performance for unstable systems. In future works, this approach will be extended to nonlinear and parametrically uncertain systems with an input delay.

Keywords
input delay, predictor, output control, unstable systems

Acknowledgements
This work was supported by the Russian Foundation grant (project No. 25-29-00896).

For citation: Pyrkin A.A., Kalinin K.Yu., Tran H.C. Output predictor control for unstable linear systems with input delay. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2025, vol. 25, no. 6, pp. 1098–1106 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-6-1098-1106

Введение

Задача управления системами с входным запаздыванием не теряет своей актуальности, и даже приобретает дополнительный интерес с развитием новых методов управления сложными динамическими процессами. Такие методы управления развиваются в областях, где скорость принятия решения имеет критический характер, а небольшие задержки в контуре управления не позволяют достигнуть желаемого результата.

В классической теории управления для класса линейных систем с известными параметрами в работе [1] впервые было показано условие, при каких допустимых значения входного запаздывания замкнутая система может сохранять устойчивость. Для произвольной величины запаздывания, но для класса устойчивых линейных систем был предложен предиктор Смита [2, 3], получивший широкое применение как в теоретических исследованиях, так и на практике. Суть метода заключается в построении дополнительного управляющего контура, который может полностью скомпенсировать негативный эффект входного запаздывания, обеспечивая глобальную устойчивость замкнутой системы, если параметры модели объекта точно известны.

Развитием предиктора Смита стали работа [4], известная как предиктор Манитиуса–Олброта, и его модификации [5, 6], где были получены алгоритмы управления для формирования стабилизирующей обратной связи для неустойчивых систем. Долгое время этот подход был и остается базовым для синтеза предикторов для систем: с неизвестными параметрами, нелинейных систем, систем с распределенными параметрами, моделируемых уравнениями в частных производных [7, 8]. Отметим, что данный результат имеет теоретический характер, а при технической его реализации остаются открытыми вопросы устойчивости замкнутой системы при наличии помех или ошибок при вычислениях, несмотря на большое число научных работ, посвященных развитию подхода [4]. Например, с использованием предиктора Манитиуса–Олброта [4] были решены задачи управления неустойчивыми системами с запаздыванием и параметрически неопределенными возмущениями: для синусоидальных воздействий синтезированы регуляторы по состоянию [9] и по выходу [10], для смещенного синусоидального воздействия, действующего на вход и выход объекта [11] и более общий случай регулятора по выходу для компенсации смещенного мультисинусоидального возмущения, действующего на вход и выход системы с запаздывающим управлением [12]. Однако результаты [9–12] не лишены недостатков, присущих предиктору [4]. Позднее предпринимались попытки улучшить робастные свойства предиктора Манитиуса–Олброта в задачах стабилизации неустойчивых систем с запаздыванием и возмущающими воздействиями [13, 14].

Особое внимание заслуживает работа [15], где была изучена проблема скрытой неустойчивой динамики при использовании предикторов типа [4], синтезирован наблюдатель этой нуль-динамики и получен закон управления, позволяющий в отличие от аналогов робастно стабилизировать неустойчивые объекты с запаздывающим управлением, обеспечивая глобальную асимптотическую устойчивость замкнутой системы. С теоретической точки зрения решена важная и долгое время открытая проблема неустойчивой скрытой динамики в предикторах для неустойчивых систем. Однако в этом алгоритме необходимо выполнять неочевидные для инженера вычисления и переключения, что может вызывать трудности при реализации.

В работе [16] предложен новый алгоритм управления, отличающийся от [15] тем, что он не является модификацией [4–6], а служит модификацией предиктора Смита с добавлением корректирующего члена, позволяющего стабилизировать замкнутую систему, в том числе и скрытую нуль-динамику. Как и в работе [15] в новом регуляторе используется прием сброса значений интегратора, однако, техническая реализация закона управления существенно проще.

В настоящей работе представлено развитие алгоритма [16] для управления по выходу неустойчивыми линейными системами с входным запаздыванием с добавлением наблюдателя Люенбергера. При очень простой структуре регулятора представлено строгое аналитическое доказательство устойчивости замкнутой системы. Разработанный подход в будущем может быть развит и для нелинейных систем, а также для систем с неизвестными параметрами.

Постановка задачи

Рассмотрим линейный объект управления с входным запаздыванием и постоянными параметрами

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t - D), \quad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ — неизмеряемый вектор переменных состояния; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — полностью управляемая и наблюдаемая тройка матриц с известными элементами; $D \geq 0$ — известное постоянное запаздывание; $y(t) \in R$ — регулируемая и измеряемая выходная переменная.

Требуется синтезировать закон управления $u(t)$ по измерениям выходной переменной $y(t)$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия объекта $\mathbf{x} = 0$ и ограниченность всех переменных состояния замкнутой системы.

Синтез наблюдателя состояния

В задачах управления по выходу, как правило, используются динамические фильтры, которые позволяют оценивать вектор переменных состояния или вектор производных выходной регулируемой переменной до некоторого порядка. В этом случае становится возможным синтез стабилизирующего управления на основе восстановленных оценок. Для объекта управления (1), (2) хорошо известен способ оценивания переменных состояния с помощью наблюдателя Люенбергера вида

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t-D) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}), \qquad (3)$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t)$ — вектор оценок переменных состояния, такой, что невязка $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ экспоненциально стремится к нулю, если матрица соответствующего размера $\mathbf{L}$ выбрана из условия гурвицевости матрицы $\mathbf{H} = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$. Практически для невязки $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ справедлива динамическая модель

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}(t), \qquad (4)$$

откуда следует экспоненциальная устойчивость положения равновесия $\tilde{\mathbf{x}}(t) = 0$. Далее при синтезе закона управления используется вектор оценок переменных состояния $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Синтез закона управления по выходу с предиктором

Следуя подходу модифицированного предиктора Смита [10], выберем закон управления по выходу в виде:

$$u(t) = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}(t), \qquad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{B}u(t) - \mathbf{B}u(t-D) - \mathbf{BKz}(t) + \mathbf{BK}\boldsymbol{\varepsilon}(t), \qquad (6)$$

с добавлением корректирующих членов:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}[\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t-D) - \boldsymbol{\psi}(t-D) + \boldsymbol{\varepsilon}(t-D)], \qquad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{BKz}(t),\ \boldsymbol{\varepsilon}(mT) = 0,\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots, \qquad (8)$$

где $\mathbf{K}$ — вектор такой, что матрица $\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{BK}$ гурвицева; $\hat{\mathbf{x}}(t)$ определен в (3), $\boldsymbol{\psi}(t) \in R^n$ — вектор переменных состояния фильтра (6); $\mathbf{z}(t) \in R^n$ — вспомогательная векторная переменная, вычисляемая по формуле (7); $\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}$ — матричная экспонента; $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in R^n$ — вектор переменных состояния динамического корректирующего члена со сбросом значений в ноль по правилу (8) с периодом $T > 0$, значение которого выбирается из условия устойчивости замкнутой системы.

Запишем модель замкнутой системы, вычислив производную переменной $\mathbf{z}(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}[\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t-D) - \dot{\boldsymbol{\psi}}(t-D) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t-D)] = \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}[\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t-D) + \mathbf{LC}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))] - \\
&- \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}[\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t-D) + \mathbf{B}u(t-2D) + \mathbf{LC}(\mathbf{x}(t-D) - \hat{\mathbf{x}}(t-D))] - \\
&- \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}[\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}(t-D) + \mathbf{B}u(t-D) - \mathbf{B}u(t-2D) - \\
&- \mathbf{BKz}(t-D) + \mathbf{BK}\boldsymbol{\varepsilon}(t-D)] + \\
&+ \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}[\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(t-D) + \mathbf{BK}\boldsymbol{\varepsilon}(t-D) - \mathbf{BKz}(t-D)] = \\
&= \mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}[\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t-D) - \boldsymbol{\psi}(t-D) + \boldsymbol{\varepsilon}(t-D)] + \\
&+ \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{LC}[\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t-D)] = \\
&= \mathbf{Az}(t) + \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{LC}[\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t-D)]. \qquad (9)
\end{aligned}$$

На основе (5) и (7) получим выражение для запаздывающего управления

$$\begin{aligned}
u(t-D) &= \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t-D) + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}(t-D) = \\
&= \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(t-D) - \mathbf{Ke}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) = \\
&= \mathbf{Kx}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(t-D) - \mathbf{Ke}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(t)
\end{aligned}$$

и перепишем модель замкнутой системы (1)–(3), (5)–(8) с учетом вычислений (4), (9) в компактном виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Fx}(t) + \mathbf{BK}\boldsymbol{\varepsilon}(t-D) - \mathbf{BKe}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}}(t), \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \mathbf{F}\boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{BKe}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) - \mathbf{BKz}(t) - \\
- \mathbf{BK}\boldsymbol{\varepsilon}(t-D) + \mathbf{BK}\boldsymbol{\varepsilon}(t), \qquad (11)
\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{BKz}(t), \qquad (12)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Az}(t) + \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{LC}[\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t-D)], \qquad (13)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}(t), \qquad (14)$$

где переменные $\mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ являются непрерывными, а $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\mathbf{z}(t)$ меняют скачкообразно свои значения согласно (8) для $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ в моменты времени mT и (7) для $\mathbf{z}(t)$ в моменты времени $mT + D$ соответственно.

Заметим, что подсистема (13) может быть неустойчива в силу свойств матрицы $\mathbf{A}$, которая по постановке задачи не обязательно гурвицева. Если не использовать корректировку переменной $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, то замкнутая система может быть неустойчивой, поскольку на вход устойчивых по входу подсистем (10)–(12) попадает потенциально неограниченный сигнал $\mathbf{z}(t)$. Далее рассмотрим замкнутую систему с принудительным обнулением переменной $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ с периодом T и покажем, при каких условиях сброса переменной $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ замкнутая система является асимптотически устойчивой.

Основной результат

Интегрируя модель (14) для невязки $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ получим выражение

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{H}t}\tilde{\mathbf{x}}(0),$$

где $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)$ — некоторый вектор с постоянными элементами, зависящими от начальных условий, а все элементы матричной функции $\mathbf{e}^{\mathbf{H}t}$ экспоненциально стремятся к нулю из-за гурвицевости матрицы $\mathbf{H}$.

Для запаздывающего сигнала $\tilde{\mathbf{x}}(t-D)$ на интервале $0 \le t < D$ имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}(t - D) = \mathbf{x}(t - D),$$

что соответствует свободному движению объекта до момента включения регулятора, в том числе и наблюдателя, до момента времени $t = 0$. Предположим, что на этом конечном интервале $-D \le t < 0$ состояние объекта ограничено.

Для $t \ge D$ имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}(t - D) = \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t}\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}\tilde{\mathbf{x}}(t).$$

В силу определения (7), (8) функция $\mathbf{z}(t)$ меняет скачкообразно значение в каждый момент времени $t_m = mT + D$ для $m \in Z_{\ge 0}$, а в соответствии с (13) для переменной $\mathbf{z}(t)$ между переключениями в моменты времени (t_m, t_{m+1}) справедливо выражение

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_m)}\mathbf{z}(t_m) + \int_{t_m}^{t}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\,\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{LC}[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(s)ds =$$
$$= \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_m)}\mathbf{z}(t_m) + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\left(\int_{t_m}^{t}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds\right)[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0), \quad (15)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица порядка n; s — переменная интегрирования.

Для вычисления интеграла в выражении (15) рассмотрим лемму с учетом обозначения $\mathbf{H} = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$.

Лемма 1 [16]. Справедливо соотношение для интеграла

$$\int\mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds = -\mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s} + \mathbf{const}.$$

Доказательство леммы 1.

Дифференцируя функцию $-\mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}$, получим

$$\frac{d}{dt}(-\mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}) = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}\mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}\mathbf{H} =$$
$$= \mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}\mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}(\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}^{\mathbf{H}s} = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}s}\,\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s},$$

что соответствует подынтегральному выражению, что и требовалось доказать. ■

Продолжим вычисления в (15), получим выражение для переменной $\mathbf{z}(t)$ как кусочно-непрерывной функции времени между переключениями

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_m)}\mathbf{z}(t_m) + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_m}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t_m} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t}) \times$$
$$\times [\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_m)}\mathbf{z}(t_m) + \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_m)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t_m} - \mathbf{e}^{\mathbf{H}t}) \times$$
$$\times [\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0). \quad (16)$$

Исследуем последовательность значений функции $\mathbf{z}(t)$ в моменты времени $t = mT + D$ для $m \in Z_{\ge 0}$

$$\mathbf{z}(mT + D) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}[\hat{\mathbf{x}}(mT + D) - \hat{\mathbf{x}}(mT) - \boldsymbol{\psi}(mT)], \quad (17)$$

где уже учтено тождество $\boldsymbol{\varepsilon}(t - D) = 0$, $\forall t = mT + D$.

Для этого рассмотрим вспомогательную непрерывную функцию времени

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t - D) - \boldsymbol{\psi}(t - D) = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t - D) \quad (18)$$

и ее значения в моменты времени $t = mT + D$ для $m \in Z_{\ge 0}$, связанные с искомой последовательностью $\mathbf{z}(mT + D)$ соотношением $\mathbf{z}(mT + D) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\boldsymbol{\xi}(mT + D)$. Продифференцировав (18), запишем:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t - D) =$$
$$= \mathbf{A}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) + \mathbf{LC}[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\mathbf{e}^{\mathbf{H}t}\tilde{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}(t - D) +$$
$$+ \mathbf{BKz}(t - D) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{BKz}(t - D) - \mathbf{BK}\boldsymbol{\varepsilon}(t - D) +$$
$$+ \mathbf{LC}[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\mathbf{e}^{\mathbf{H}t}\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{BKz}(t - D) -$$
$$- \mathbf{BK}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) + \mathbf{BK}\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{LC}[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\mathbf{e}^{\mathbf{H}t}\tilde{\mathbf{x}}(0) =$$
$$= \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}(t) - \mathbf{BK}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) + \mathbf{BKz}(t - D) +$$
$$+ \mathbf{LC}[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\mathbf{e}^{\mathbf{H}t}\tilde{\mathbf{x}}(0). \quad (19)$$

Проинтегрировав (19), получим

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{F}t}\boldsymbol{\xi}(0) - \int_0^t\mathbf{e}^{\mathbf{F}(t-s)}\mathbf{BK}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(s - D))ds +$$
$$+ \int_0^t\mathbf{e}^{\mathbf{F}(t-s)}\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0). \quad (20)$$

На основе (20) запишем выражение для последовательности $\boldsymbol{\xi}_m = \boldsymbol{\xi}(mT + D)$:

$$\boldsymbol{\xi}_m = \mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D)}\boldsymbol{\xi}(0) -$$
$$- \int_0^{mT+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{BK}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(s - D))ds +$$
$$+ \int_0^{mT+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0). \quad (21)$$

Вычислим значение последовательности (21)

$$\boldsymbol{\xi}_{m+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D)}\boldsymbol{\xi}(0) -$$
$$- \int_0^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D-s)}\mathbf{BK}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(s - D))ds +$$
$$+ \int_0^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D-s)}\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0).$$

Подставим выражение $\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D)}\boldsymbol{\xi}(0)$ из (21):

$$\boldsymbol{\xi}_{m+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\boldsymbol{\xi}_m + \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int_0^{mT+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{BK}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(s - D))ds -$$
$$- \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int_0^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{BK}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(s - D))ds -$$
$$- \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int_0^{mT+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) +$$
$$+ \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int_0^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) =$$
$$= \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\boldsymbol{\xi}_m - \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int_{mT+D}^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{BK}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(s - D))ds +$$
$$+ \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int_{mT+D}^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) =$$
$$= \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\boldsymbol{\xi}_m - \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int_{mT+D}^{mT+2D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{BK}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(s - D))ds -$$
$$- \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int_{mT+2D}^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{BK}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(s - D))ds +$$
$$+ \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int_{mT+D}^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{LC}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0). \quad (22)$$

Отметим, что в моменты времени $t = mT + 2D$ скачком меняется значение функции $\mathbf{z}(t - D)$, поэтому соответствующий интеграл был разбит на два интервала $[mT + D; mT + 2D)$ и $[mT + 2D; mT + D + T)$. Выполним преобразования для первых двух интегралов в (22).

В моменты времени $[mT + D; mT + D + T)$ функция $\mathbf{z}(t)$ имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{z}(mT+D) + \\ + \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{H}t})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) = \\ = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{z}(mT+D) + \\ + (\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0).\end{gathered}$$

Для первого интервала $[mT + D; mT + 2D)$ значение функции $\mathbf{z}(t - D)$ равно

$$\begin{gathered}\mathbf{z}(t-D) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-(m-1)T-2D)}\mathbf{z}((m-1)T+D) + \\ + (\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-(m-1)T-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m-1)T+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t-\mathbf{H}D})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0),\end{gathered}$$

что соответствует непрерывному изменению с момента коррекции $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ на шаге $m - 1$. Тогда для первого интервала имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t-D) = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{z}(mT+D) - \\ - \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-(m-1)T-2D)}\mathbf{z}((m-1)T+D) + \\ + \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) - \\ - (\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-(m-1)T-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m-1)T+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t-\mathbf{H}D})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) = \\ = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-2D)}[\mathbf{z}(t-mT+D) - \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{z}((m-1)T+D)] + \\ + (\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-(m-1)T-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m-1)T+D)}) \times \\ \times [\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) - (\mathbf{e}^{\mathbf{H}t} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t-\mathbf{H}D})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) = \\ = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-2D)}[\mathbf{z}(mT+D) - \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{z}((m-1)T+D)] + \\ + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}((m-1)T+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m-1)T+D)}) \times \\ \times [\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) + (\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}D} - \mathbf{I})\mathbf{e}^{\mathbf{H}t}[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0). \qquad (23)\end{gathered}$$

В момент времени $mT + 2D$ функция $\mathbf{z}(t - D)$ меняет скачком свое значение, что соответствует шагу m. На втором интервале $[mT + 2D; mT + D + T)$ получим

$$\begin{gathered}\mathbf{z}(t-D) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-2D)}\mathbf{z}(mT+D) + \\ + (\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t-\mathbf{H}D})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0)\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t-D) = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{z}(mT+D) - \\ - \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-2D)}\mathbf{z}(mT+D) + \\ + (\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{H}t})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) - \\ - (\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t-\mathbf{H}D})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) = \\ = (\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-mT-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)}) \times \\ \times [\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) + (\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{\mathbf{H}t-\mathbf{H}D} - \mathbf{e}^{\mathbf{H}t})[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) = \\ = (\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}D} - \mathbf{I})\mathbf{e}^{\mathbf{H}t}[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0). \qquad (24)\end{gathered}$$

Подставляя (23) и (24) в соответствующие подынтегральные выражения в (22), запишем

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\xi}_{m+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\boldsymbol{\xi}_m - \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int\limits_{mT+D}^{mT+2D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(s-mT-2D)}ds \times \\ \times [\mathbf{z}(mT+D) - \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{z}((m-1)T+D)] - \\ - \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int\limits_{mT+D}^{mT+2D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\mathbf{A}s}ds \times \\ \times (\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}((m-1)T+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m-1)T+D)}) \times \\ \times [\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int\limits_{mT+D}^{mT+2D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}D} - \mathbf{I})\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds \times \\ \times [\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int\limits_{mT+2D}^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)} \times \\ \times \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}D} - \mathbf{I})\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0) + \\ + \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\int\limits_{mT+D}^{mT+T+D}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+D-s)}\mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0).\end{gathered}$$

Заметим, что на основании выражений (17) и (18), справедливы соотношения

$$\mathbf{z}(mT+D) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\boldsymbol{\xi}_m,\ \mathbf{z}(mT+D-T) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\boldsymbol{\xi}_{m-1},$$

тогда, объединяя подобные члены и вынося за пределы интеграла выражения, не зависящие от переменной интегрирования s, получим выражение

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\xi}_{m+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\boldsymbol{\xi}_m - \mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D)}\int\limits_{mT+D}^{mT+2D}\mathbf{e}^{-\mathbf{F}s} \times \\ \times \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\mathbf{A}s}ds\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(mT+D)}[\boldsymbol{\xi}_m - \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\boldsymbol{\xi}_{m-1}] + \mathbf{g}_m, \qquad (25)\end{gathered}$$

где введено обозначение $\mathbf{g}_m$ для следующей последовательности

$$\mathbf{g}_m = \mathbf{Q}_m[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0), \qquad (26)$$

зависящей от матрицы

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_m = -\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D)}\int\limits_{mT+D}^{mT+2D}\mathbf{e}^{-\mathbf{F}s}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\mathbf{A}s}ds \times \\ \times (\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}((m-1)T+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m-1)T+D)}) + \\ + \mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D)} \times \\ \times \int\limits_{mT+D}^{mT+T+D}\mathbf{e}^{-\mathbf{F}s}(\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}D} + \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds. \qquad (27)\end{gathered}$$

Лемма 2. Значения матрицы $\mathbf{Q}_m$ равномерно убывают к нулю с ростом m.

Доказательство леммы 2.

Воспользуемся результатом леммы 1 и запишем выражения для интегралов в (25) и (27):

$$\begin{gathered}\int\limits_{mT+D}^{mT+2D}\mathbf{e}^{-\mathbf{F}s}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\mathbf{A}s}ds = \\ = \mathbf{e}^{-\mathbf{F}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(mT+D)} - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}(mT+2D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(mT+2D)}. \qquad (28)\end{gathered}$$

Тогда для первого слагаемого в (27), получим аналитическое выражение

$$\begin{gathered}\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D)}\int\limits_{mT+D}^{mT+2D}\mathbf{e}^{-\mathbf{F}s}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}^{\mathbf{A}s}ds \times \\ \times (\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}((m-1)T+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m-1)T+D)}) = \\ = \mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D)}(\mathbf{e}^{-\mathbf{F}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(mT+D)} - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}(mT+2D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(mT+2D)}) \times \\ \times (\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}((m-1)T+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m-1)T+D)}) = \\ = \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}D}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D})\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)} - \\ - \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}D}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D})\mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m-1)T+D)}) = \\ = \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}D}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D})(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}T})\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)}. \qquad (29)\end{gathered}$$

На основе выражения (27) с использованием (29) запишем выражение для матрицы $\mathbf{Q}_{m+1}$

$$\mathbf{Q}_m = -\mathbf{e}^{\mathbf{F}T}(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}D}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D})(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}T})\mathbf{e}^{\mathbf{H}((m+1)T+D)} + \\ + \mathbf{e}^{\mathbf{F}((m+1)T+T+D)}\int\limits_{(m+1)T+D}^{(m+1)T+T+D}\mathbf{e}^{-\mathbf{F}s} \times \\ \times (\mathbf{BK} - \mathbf{BK}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}D} + \mathbf{LC})\mathbf{e}^{\mathbf{H}s}ds. \quad (30)$$

Меняя в (30) переменную интегрирования $s = \bar{s} + T$, получим

$$\mathbf{Q}_{m+1} = -\mathbf{e}^{\mathbf{F}T}(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}D}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D})(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}T})\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)}\,\mathbf{e}^{\mathbf{H}T} + \\ + \mathbf{e}^{\mathbf{F}((m+1)T+T+D)}\int\limits_{mT+D}^{mT+T+D}\mathbf{e}^{-\mathbf{F}(\bar{s}+T)} \times \\ \times (\mathbf{BK} - \mathbf{BK}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}D} + \mathbf{LC})\mathbf{e}^{\mathbf{H}(\bar{s}+T)}d\bar{s} = \\ = -\mathbf{e}^{\mathbf{F}T}(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}D}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D})(\mathbf{I} - \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}T})\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{H}T} + \\ + \mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D)}\int\limits_{mT+D}^{mT+T+D}\mathbf{e}^{-\mathbf{F}\bar{s}} \times \\ \times (\mathbf{BK} - \mathbf{BK}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\mathbf{e}^{-\mathbf{H}D} + \mathbf{LC})\mathbf{e}^{\mathbf{H}\bar{s}}ds\mathbf{e}^{\mathbf{H}T} = \mathbf{Q}(m)\mathbf{e}^{\mathbf{H}T}.$$

В итоге, справедливо соотношение

$$\|\mathbf{Q}_{m+1}\| = \alpha_1\|\mathbf{Q}_m\|,$$

где $\alpha_1 = \|\mathbf{e}^{\mathbf{H}T}\| < 1$, $\forall T > 0$ из-за гурвицевости $\mathbf{H}$, что и требовалось доказать. ■

Таким образом, выражение (25) может быть представлено в виде:

$$\xi_{m+1} + \mathbf{G}_1\xi_m + \mathbf{G}_2\xi_{m-1} = \mathbf{g}_m, \quad (31)$$

где матричные коэффициенты

$$\mathbf{G}_1 = -\mathbf{e}^{\mathbf{F}T} + \mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D)}(\mathbf{e}^{-\mathbf{F}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(mT+D)} - \\ - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}(mT+2D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(mT+2D)})\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(mT+D)} = \\ = -\mathbf{e}^{\mathbf{F}T} + \mathbf{e}^{\mathbf{F}T} - \mathbf{e}^{\mathbf{F}(T-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D} = -\mathbf{e}^{\mathbf{F}(T-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}D},$$

$$\mathbf{G}_2 = -\mathbf{e}^{\mathbf{F}(mT+T+D)}(\mathbf{e}^{-\mathbf{F}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(mT+D)} - \\ - \mathbf{e}^{-\mathbf{F}(mT+2D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(mT+2D)})\mathbf{e}^{-\mathbf{A}(mT+D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}T} = \\ = \mathbf{e}^{\mathbf{F}(T-D)}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(T+D)} - \mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\mathbf{e}^{\mathbf{A}T}$$

и последовательность $\mathbf{g}_m$, экспоненциально убывающая к нулю в силу (26) и леммы 2.

Теорема. Существует $T_0 > D$ такое, что для $\forall T \geq T_0$ последовательность ξ_m экспоненциально сходится к $\mathbf{0}$.

Доказательство теоремы.

Перепишем (31) в блочном матричном виде:

$$\begin{pmatrix}\xi_m \\ \xi_{m+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{m-1} \\ \xi_m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{I}\end{pmatrix}\mathbf{g}_m.$$

Введем в рассмотрение вектор $\boldsymbol{\chi}(m) = \mathrm{col}(\xi_{m-1}, \xi_m)$, матрицу $\mathbf{P} = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I}\end{pmatrix}$ и функцию Ляпунова

$$V(m) = V_1(m) + V_2(m),$$

где $V_1(m) = \boldsymbol{\chi}^\top(m)\mathbf{P}\boldsymbol{\chi}(m)$ и $V_2(m) = \mathbf{g}_m^\top\mathbf{g}_m$. Рассмотрим сначала $V_1(m)$.

$$V_1(m) - V_1(m+1) = \boldsymbol{\chi}^\top(m)\mathbf{P}\boldsymbol{\chi}(m) - \boldsymbol{\chi}^\top(m+1)\mathbf{P}\boldsymbol{\chi}(m+1) = \\ = \boldsymbol{\chi}^\top(m)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{0} & -\mathbf{G}_2^\top \\ \mathbf{I} & -\mathbf{G}_1^\top\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_1\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{\chi}(m) = \\ = \boldsymbol{\chi}^\top(m)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\mathbf{G}_2^\top\mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_2^\top\mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_1\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{\chi}(m).$$

Поскольку матрица $\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{BK}$ гурвицева, исходя из соответствующего выбора $\mathbf{K}$, то

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{e}^{\mathbf{F}T} = 0.$$

Более того, коэффициенты $\mathbf{K}$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялось

$$\mathbf{Re}\{\lambda_{\max}\{\mathbf{F}\} + \lambda_{\max}\{\mathbf{A}\}\} < 0,$$

где $\lambda_{\max}\{(\cdot)\}$ означает максимальное собственное число матрицы $(\cdot)$, что будет гарантировать затухание функции $\mathbf{e}^{\mathbf{F}T}$ быстрее возможного роста функции $\mathbf{e}^{\mathbf{A}T}$ для произвольной матрицы $\mathbf{A}$, обеспечивая

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{e}^{\mathbf{F}T}\mathbf{e}^{\mathbf{A}T} = 0.$$

Поскольку функция

$$\mathbf{N}(T) = 2\begin{pmatrix}\mathbf{G}_2^\top(T)\mathbf{G}_2(T) & \mathbf{G}_2^\top(T)\mathbf{G}_1(T) \\ \mathbf{G}_1^\top(T)\mathbf{G}_2(T) & \mathbf{G}_1^\top(T)\mathbf{G}_1(T)\end{pmatrix}$$

является непрерывной, ограниченной для $\forall T \geq 0$, а все ее элементы с ростом T стремятся к нулю $\lim\limits_{T\to\infty}\mathbf{N}(T) = 0$, то существует $T_0 > D$ такое, что $\forall T \geq T_0$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{N}(T)\| \leq \alpha_2\mathbf{I},\ 0 < \alpha_2 < 1.$$

Следовательно, при $\forall T \geq T_0$

$$V_1(m) - V_1(m+1) = \boldsymbol{\chi}^\top(m)[\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{N}(T)]\boldsymbol{\chi}(m) > \\ > (1 - \alpha_2)\boldsymbol{\chi}^\top(m)\boldsymbol{\chi}(m) \geq \frac{1-\alpha_2}{2}V_1(m),$$

откуда получим

$$V_1(m+1) < \frac{1+\alpha_2}{2}V_1(m).$$

Для $V_2(m)$ можно заметить

$$V_2(m) = \mathbf{g}_m^\top\mathbf{g}_m = \|\mathbf{g}_m^\top\mathbf{g}_m\| = \|\tilde{\mathbf{x}}(0)[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\|\cdot\|\mathbf{Q}_m\|^2$$

и, соответственно,

$$V_2(m+1) = \|\tilde{\mathbf{x}}(0)[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\|\cdot\|\mathbf{Q}_{m+1}\|^2 = \alpha_1^2V_2(m).$$

Таким образом, при условии $T \geq T_0$

$$V(m+1) < \beta V(m),$$

откуда следует равномерная экспоненциальная сходимость последовательности $V(m)$ к нулю с коэффициентом $\beta = \max\left\{\alpha_1^2; \dfrac{1+\alpha_2}{2}\right\} < 1$ и экспоненциальная сходимость последовательности ξ_m, что и требовалось доказать. ■

Напомним, что последовательность ξ_m представляет собой значения непрерывной функции $\xi(t)$ в моменты времени $t = mT + D$, и она сходится к нулю. Также заметим, что функция $\mathbf{z}(t)$ в моменты времени $t = mT + D$ связана со сходящейся последовательностью ξ_m соотношением $\mathbf{z}(mT + D) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\xi_m$, а на интервале $[mT + D; mT + D + T)$ изменяется согласно выражению (16). Максимальное значение $\mathbf{z}(t)$ на интервале между переключениями $[mT + D; mT + D + T)$ можно оценить:

$$\|\mathbf{z}(t)\| \le \max_{0 \le s < T}\|\mathbf{e}^{\mathbf{A}s}\|\cdot\|\mathbf{z}(mT + D)\| +$$
$$+ \|\mathbf{e}^{\mathbf{A}D}\|\cdot\|\mathbf{I} - \mathbf{e}^{-\mathbf{H}D}]\tilde{\mathbf{x}}(0)\|\cdot\max_{0 \le s < T}\|\mathbf{e}^{\mathbf{A}s} - \mathbf{e}^{\mathbf{H}s}\|\cdot\|\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT + D)}\|.$$

Так как последовательности $\mathbf{z}(mT + D)$ и $\mathbf{e}^{\mathbf{H}(mT + D)}$ экспоненциально стремятся к нулю с увеличением m, то можно показать экспоненциальную сходимость к нулю всех элементов вектора $\mathbf{z}(t)$, указав соответствующую мажоранту.

Утверждение. Объект управления с запаздывающим управлением (1), (2) и регулятором на основе наблюдателя Люенбергера (3) и предиктора Смита (5), (6) с корректирующими членами (7), (8) обеспечивает глобальную экспоненциальную устойчивость нулевого положения равновесия замкнутой системы.

Доказательство утверждения. Замкнутая система описывается моделью (10)–(14) с переключениями сигналов $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ по правилу (8) и сигнала $\mathbf{z}(t)$ в соответствии с (17). Все элементы вектора $\mathbf{z}(t)$ экспоненциально сходятся к нулю, поскольку норма этого вектора ограничена мажорирующей затухающей экспонентой. Видно, что сигнал $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ также сходится экспоненциально

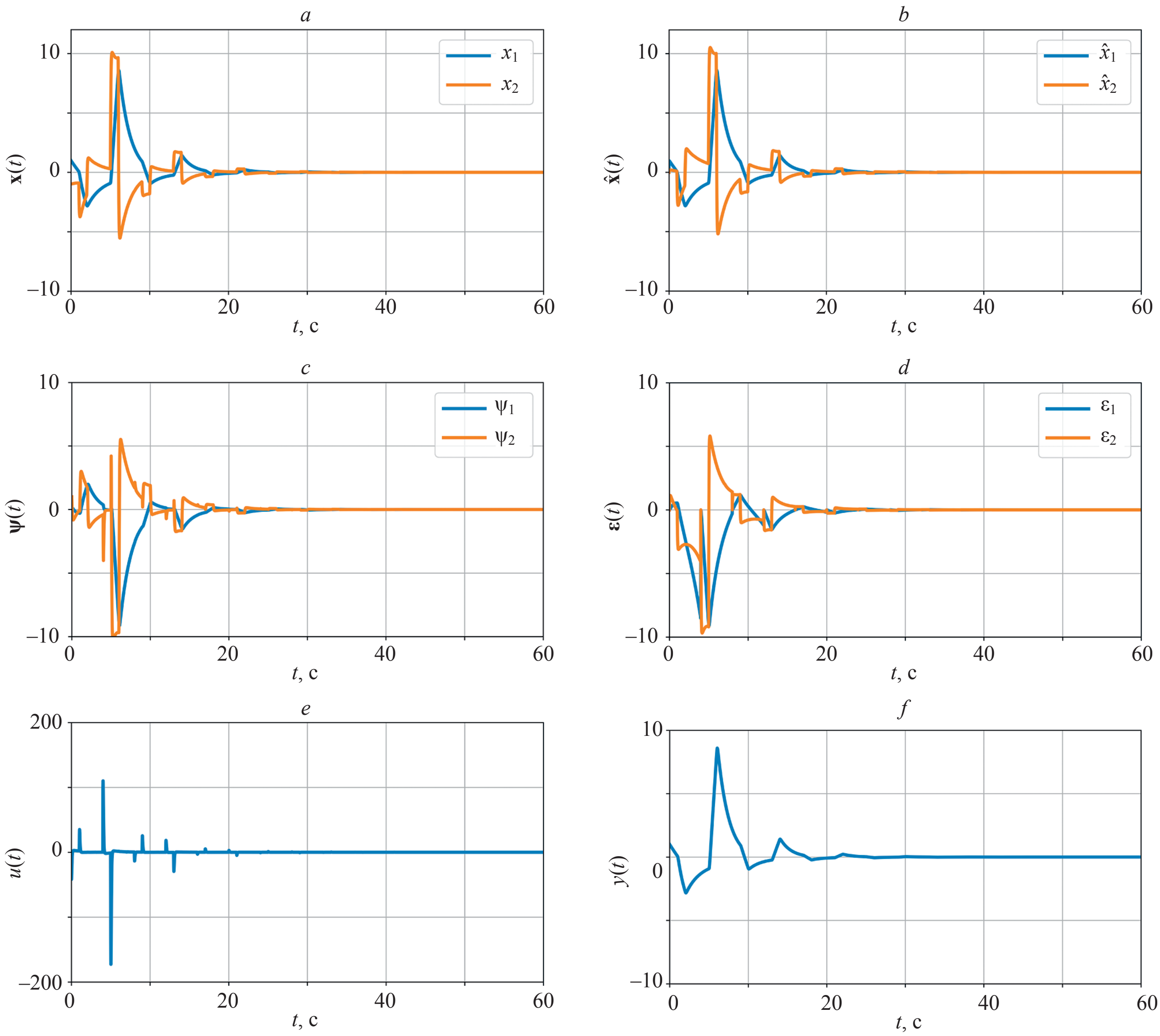

Рисунок. Результаты моделирования замкнутой системы: переменные $\mathbf{x}$ (*a*) и оценка $\hat{\mathbf{x}}$ (*b*) состояний; переменные регулятора $\boldsymbol{\psi}$ (*c*) и $\boldsymbol{\varepsilon}$ (*d*); сигнал управления u (*e*); выходная переменная y (*f*)

Figure. Results of closed-loop system simulation: state variables $\mathbf{x}$ (*a*); state estimates $\hat{\mathbf{x}}$ (*b*); regulator variables $\boldsymbol{\psi}$ (*c*) and $\boldsymbol{\varepsilon}$ (*d*); control signal u (*e*) and output variable y (*f*) к нулю, учитывая модель (12). Аналогично можно показать ограниченность и экспоненциальную сходимость к нулю переменных состояния моделей (10) и (11), откуда следует экспоненциальная устойчивость нулевого положения равновесия замкнутой системы в целом. ■

Пример численного моделирования

Рассмотрим неустойчивый объект управления (1), (2) с параметрами $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [1 \quad 0]$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ и регулятор (3), (5)–(8) с параметрами $\mathbf{K} = [-20 \quad -30]$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \end{bmatrix}$ и нулевыми начальными условиями $\hat{\mathbf{x}}(0)$, $\boldsymbol{\psi}(0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(0)$. На рисунке представлены результаты моделирования для запаздывания $D = 1$ и интервала сброса интегратора $T = 5$ с использованием метода интегрирования **ode1** (**Euler**) с фиксированным шагом 10^{-2} с.

Заключение

Предложено решение задачи управления линейной системой по выходу на основе предиктора для неустойчивых систем с входным запаздыванием, отличающееся более простой структурой в реализации и строгим аналитическим доказательством устойчивости. Разработанный подход открывает широкие возможности для дальнейшего развития теории автоматического управления для систем с запаздыванием, включая адаптивные и нелинейные системы.

Литература

1. Цыпкин Я.З. Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7. № 2-3. С. 107–129.
2. Smith O.J.M. Closer control of loops with dead time // Chemical Engineering Progress. 1957. V. 53. N 5. P. 217–219.
3. Smith O.J.M. A controller to overcome dead time // ISA Journal. 1959. V. 6. P. 28–33.
4. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. V. 24. N 4. P. 541–552. https://doi.org/10.1109/tac.1979.1102124
5. Kwon W.H., Pearson A.E. Feedback stabilization of linear systems with delayed control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1980. V. 25. N 2. P. 266–269. https://doi.org/10.1109/tac.1980.1102288
6. Arstein Z. Linear systems with delayed controls: A reduction // IEEE Transactions on Automatic Control. 1982. V. 27. N 4. P. 869–879. https://doi.org/10.1109/tac.1982.1103023
7. Krstic M., Smyshlyaev A. Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays // Systems and Control Letters. 2008. V. 57. N 9. P. 750–758. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2008.02.005
8. Kristic M. Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems. Birkhäuser Boston, 2009. 466 p.
9. Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay // Proc. of the 2010 American Control Conference. 2010. P. 5688–5693. https://doi.org/10.1109/acc.2010.5531131
10. Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Output control algorithm for unstable plant with input delay and cancellation of unknown biased harmonic disturbance // IFAC Proceedings Volumes. 2010. V. 43. N 2. P. 39–44. https://doi.org/10.3182/20100607-3-cz-4010.00009
11. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Adaptive controller for linear system with input delay and output disturbance // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. V. 61. N 12. P. 4229–4234. https://doi.org/10.1109/tac.2015.2509428
12. Пыркин А.А., Бобцов А.А., Никифоров В.О., Колюбин С.А., Ведяков А.А., Борисов О.И., Громов В.С. Компенсация полигармонического возмущения, действующего на состояние и выход линейного объекта с запаздыванием в канале управления // Автоматика и телемеханика. 2015. № 12. С. 43–64.
13. Furtat I., Fridman E., Fradkov A. Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. V. 63. N 1. P. 298–305. https://doi.org/10.1109/tac.2017.2732279
14. Furtat I., Gushchin P. Tracking control algorithms for plants with input time-delays based on state and disturbance predictors and sub-predictors // Journal of the Franklin Institute. 2019. V. 356. N 8. P. 4496–4512. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.03.013

References

1. Tcypkin Ya.S. Stability of systems with retarding ferd-back. *Avtomatika i telemehanika*, 1946, vol. 7, no. 2-3, pp. 107–129. (in Russian)
2. Smith O.J.M. Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, 1957, vol. 53, no. 5, pp. 217–219.
3. Smith O.J.M. A controller to overcome dead time. *ISA Journal*, 1959, vol. 6, pp. 28–33.
4. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, vol. 24, no. 4, pp. 541–552. https://doi.org/10.1109/tac.1979.1102124
5. Kwon W.H., Pearson A.E. Feedback stabilization of linear systems with delayed control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, vol. 25, no. 2, pp. 266–269. https://doi.org/10.1109/tac.1980.1102288
6. Arstein Z. Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, vol. 27, no. 4, pp. 869–879. https://doi.org/10.1109/tac.1982.1103023
7. Krstic M., Smyshlyaev A. Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays. *Systems and Control Letters*, 2008, vol. 57, no. 9, pp. 750–758. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2008.02.005
8. Kristic M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhäuser Boston, 2009, 466 p.
9. Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay. *Proc. of the 2010 American Control Conference*, 2010, pp. 5688–5693. https://doi.org/10.1109/acc.2010.5531131
10. Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Output control algorithm for unstable plant with input delay and cancellation of unknown biased harmonic disturbance. *IFAC Proceedings Volumes*, 2010, vol. 43, no. 2, pp. 39–44. https://doi.org/10.3182/20100607-3-cz-4010.00009
11. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Adaptive controller for linear system with input delay and output disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, vol. 61, no. 12, pp. 4229–4234. https://doi.org/10.1109/tac.2015.2509428
12. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Nikiforov V.O., Kolyubin S.A., Vedyakov A.A., Borisov O.I., Gromov V.S. Compensation of polyharmonic disturbance of state and output of a linear plant with delay in the control channel. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 12, pp. 2124–2142. https://doi.org/10.1134/s0005117915120036
13. Furtat I., Fridman E., Fradkov A. Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 2018, vol. 63, no. 1, pp. 298–305. https://doi.org/10.1109/tac.2017.2732279
14. Furtat I., Gushchin P. Tracking control algorithms for plants with input time-delays based on state and disturbance predictors and sub-predictors. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, vol. 356, no. 8. pp. 4496–4512. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.03.013
15. Nikiforov V.O., Gerasimov D.N. Robust closed-loop state predictor for unstable systems with input delay. *Proc. of the 62nd IEEE*

15. Nikiforov V.O., Gerasimov D.N. Robust closed-loop state predictor for unstable systems with input delay // Proc. of the 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2023. P. 5708–5713. https://doi.org/10.1109/cdc49753.2023.10383221
16. Пыркин А.А., Калинин К.Ю. Модифицированный предиктор Смита для неустойчивых линейных систем // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2025. Т. 68. № 9. С. 753–761. https://doi.org/10.17586/0021-3454-2025-68-9-753-761

Conference on Decision and Control (CDC), 2023, pp. 5708–5713. https://doi.org/10.1109/cdc49753.2023.10383221
16. Pyrkin A.A., Kalinin K.Yu. Modified Smith predictor for unstable linear systems. *Journal of Instrument Engineering*, 2025, vol. 68, no. 9, pp. 753–761. (in Russian). https://doi.org/10.17586/0021-3454-2025-68-9-753-761

Авторы

Пыркин Антон Александрович — доктор технических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, sc 26656070700, https://orcid.org/0000-0001-8806-4057, pyrkin@itmo.ru

Калинин Константин Юрьевич – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, https://orcid.org/0009-0009-3092-6254, kgkalinin@gmail.com

Чан Хан Конг — аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, https://orcid.org/0009-0007-1116-7876, werkaiaye@gmail.com

Authors

Anton A. Pyrkin — D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, sc 26656070700, https://orcid.org/0000-0001-8806-4057, pyrkin@itmo.ru

Konstantin Yu. Kalinin — PhD Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, https://orcid.org/0009-0009-3092-6254, kgkalinin@gmail.com

Han Cong Tran — PhD Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, https://orcid.org/0009-0007-1116-7876, werkaiaye@gmail.com

Статья поступила в редакцию 27.09.2025
Одобрена после рецензирования 12.10.2025
Принята к печати 22.11.2025

Received 27.09.2025
Approved after reviewing 12.10.2025
Accepted 22.11.2025

Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»