

## АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РОБОТОТЕХНИКА

## AUTOMATIC CONTROL AND ROBOTICS

doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-2-275-286

УДК 621.865.8

**Интегрированный алгоритм управления для избегания препятствий и сингулярностей в работе-манипуляторе****Мохаммад Ясин Альвардат<sup>1</sup>✉, Мохаммед Хасан Ал-Аражи<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация<sup>1</sup> moh.alwardat@yahoo.com✉, <https://orcid.org/0009-0009-9505-6288><sup>2</sup> alarazhi\_hm@spbstu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6900-7946>**Аннотация**

**Введение.** Рассмотрена задача безопасного управления шестизвенным роботом-манипулятором в ограниченном рабочем пространстве, содержащем препятствия и потенциальные сингулярные конфигурации. Цель исследования заключается в разработке интегрированного алгоритма, обеспечивающего одновременное избегание препятствий и предотвращение сингулярных состояний при сохранении высокой точности позиционирования конца эффектора. **Метод.** Предлагаемый подход основан на сочетании пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора в декартовом пространстве и метода псевдоинверсии с демпфированием с проекцией вторичных задач в нуль-пространство, что позволяет поддерживать манипулируемость и стабилизировать управление вблизи сингулярных конфигураций. Для предотвращения столкновений используется метод искусственных потенциальных полей, формирующий отталкивающие скорости на уровне звеньев. **Основные результаты.** Результаты численного моделирования в двух сценариях показали, что предложенный алгоритм позволяет достигать заданных целей без коллизий, при этом остаточная погрешность позиционирования составляет менее 0,05 м, минимальная дистанция до ближайшего препятствия не опускается ниже 0,18 м, а индекс манипулируемости остается выше 0,8. **Обсуждение.** Полученные данные подтверждают эффективность и применимость разработанного решения для управления роботами-манипуляторами в режиме реального времени.

**Ключевые слова**

робот-манипулятор, избегание препятствий, сингулярности, метод псевдоинверсии с демпфированием, нуль-пространство, планирование траектории, метод искусственных потенциальных полей

**Ссылка для цитирования:** Альвардат М.Я., Ал-Аражи Х.М. Интегрированный алгоритм управления для избегания препятствий и сингулярностей в работе-манипуляторе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2026. Т. 26, № 2. С. 275–286. doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-2-275-286

**Integrated control algorithm for obstacle and singularity avoidance in a robotic manipulator****Mohammad Yasin Alwardat<sup>1</sup>✉, Hassan Mohammed Alwan<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation<sup>1</sup> moh.alwardat@yahoo.com✉, <https://orcid.org/0009-0009-9505-6288><sup>2</sup> alarazhi\_hm@spbstu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6900-7946>**Abstract**

This paper addresses the problem of safe control of a six-degree-of-freedom robotic manipulator operating in a constrained workspace containing obstacles and potential singular configurations. The aim of the study is to develop an integrated control algorithm that simultaneously ensures obstacle avoidance and singularity prevention while maintaining high end-effector positioning accuracy. The proposed methodology combines a PID controller in Cartesian space, the Damped Least Squares method, and the projection of secondary tasks into the null space. To prevent collisions, an

Artificial Potential Field module is used to generate repulsive velocities at the link level. This structure allows adaptive motion regulation under varying workspace geometries and maintains the system manipulability near singular points. Numerical simulation results for two scenarios demonstrate that the proposed algorithm enables the manipulator to reach the target point with a residual positioning error of less than 0.05 m, while the minimum distance to the nearest obstacle remained above 0.18 m, and the manipulability index stayed higher than 0.8. The manipulator exhibited stable behavior without collisions or singularities, confirming the effectiveness and real-time applicability of the developed approach.

#### Keywords

robotic manipulator, obstacle avoidance, singularity, damped least squares, null space, trajectory planning, artificial potential fields

**For citation:** Alwardat M.Y., Alwan H.M. Integrated control algorithm for obstacle and singularity avoidance in a robotic manipulator. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2026, vol. 26, no. 2, pp. 275–286 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-2-275-286

## Введение

Современные роботы-манипуляторы находят широкое применение в промышленности, медицине, сервисной робототехнике и других областях, где требуется высокая точность, надежность и адаптивность систем управления. Одной из ключевых задач при их эксплуатации является обеспечение безопасного и устойчивого движения в условиях ограниченного и насыщенного препятствиями рабочего пространства. Проблема избегания столкновений усугубляется при увеличении числа степеней подвижности, поскольку возрастает сложность кинематического анализа и риск возникновения скрытых коллизий звеньев.

Наряду с проблемой коллизий важное значение имеет предотвращение попадания манипулятора в сингулярные состояния. В таких положениях система теряет часть кинематических возможностей, что приводит к резкому росту требуемых скоростей или усилий в суставах, снижению точности позиционирования и даже к нестабильности управления [1, 2]. По этой причине одновременное решение задач коллизионной безопасности и предотвращения сингулярностей является критическим условием для устойчивого управления в реальном времени.

Существующие подходы к решению задачи можно условно разделить на два уровня: контроль на уровне исполнительного органа и контроль на уровне звеньев. Первый метод обеспечивает простоту реализации и высокую скорость вычислений, но не гарантирует защиту промежуточных звеньев. Второй подход учитывает геометрию всей кинематической структуры манипулятора и обеспечивает более высокий уровень безопасности, однако сопровождается значительными вычислительными затратами. Кроме того, современные методы с барьерными функциями (Control Barrier Functions, CBF и Operational-Space CBF, OSCBF) обеспечивают строгие гарантии безопасности, но требуют решения оптимизационных задач онлайн и обладают высокой вычислительной сложностью [3–5].

Таким образом, сохраняется актуальная научная проблема — создание вычислительно эффективных алгоритмов, обеспечивающих комплексную защиту как звеньев, так и рабочего органа манипулятора.

Целью работы является разработка интегрированного алгоритма управления, обеспечивающего одновременное избегание препятствий и предотвращение сингулярных состояний при низких вычислительных

затратах и возможности применения в реальном времени. Предлагаемый подход основан на использовании методов прямой и обратной кинематики, вычислении минимальных расстояний между звеньями и объектами рабочей зоны, а также применении метода псевдоинверсии с демпфированием (Damped Least Squares, DLS): с проекцией вторичных задач в нуль-пространство и модулем искусственных потенциальных полей (Artificial Potential Fields, APF).

Научная новизна работы заключается в интеграции этих методов в единую онлайн-структуру управления, позволяющую одновременно обеспечивать точность, коллизионную безопасность и избегание сингулярностей.

## Обзор существующих работ и методов

Проблемы предотвращения сингулярностей и безопасного движения в условиях ограниченного пространства являются ключевыми задачами управления роботизированными манипуляторами. В работах [1, 2] показано, что метод DLS обеспечивает устойчивость при вырождениях якобиана и сглаживает суставные скорости. Однако DLS не учитывает препятствия и требует адаптивного выбора демпфирования, что ограничивает его применение в сложной среде.

Одновременно активно исследуются формально-обоснованные подходы к безопасности с использованием барьерных функций. В [3, 4] предложены методы CBF и OSCBF, способные гарантировать безопасность системы при сохранении приоритетов задач, а в [5] расширен данный подход на нуль-пространство для коллаборативных манипуляторов. Отметим, что высокая вычислительная сложность затрудняет применение таких методов в реальном времени.

Задачи повышения манипулируемости рассматриваются в работах [6, 7], где используется управление в нуль-пространстве для предотвращения деградации управляемости. Однако эти методы не обеспечивают явной защиты от препятствий.

Для глобального планирования движения в насыщенной рабочей зоне применяются стохастические алгоритмы быстро исследующего случайного дерева (Rapidly-exploring Random Tree, RRT), RRT-Connect и их улучшенные модификации, позволяющие находить траекторию в узких проходах [8]. Заметим, что вычислительная стоимость ограничивает использование таких методов в управлении в реальном времени.

Таблица 1. Сравнение современных подходов к избеганию препятствий и сингулярностей  
 Table 1. Comparison of modern approaches to avoiding obstacles and singularities

Подход	Назначение	Преимущества	Основные ограничения	Применимость в реальном времени	Ссылка на источник
DLS	Стабилизация обращения якобиана, уход от сингулярностей	Простота, сглаженные скорости	Не учитывает препятствия; требуется выбор коэффициента демпфирования ( $\lambda$ )	Низкая–средняя; подходит для систем реального времени	[1, 2]
Нуль-пространство	Иерархия задач (вторичные: избегание коллизий звеньев, ограничений суставов и др.)	Гибкость, возможность выполнения нескольких задач одновременно	Сложная настройка весов; рост размерности	Средняя; возможно применение в реальном времени	[6]
APF	Реактивное избегание препятствий	Высокое быстродействие, простота реализации	Локальные минимумы, чувствителен к параметрам усиления	Низкая; хорошо для систем реального времени	[9]
RRT, RRT-Connect	Глобальное планирование	Находит путь в сложных сценах	Вычислительно затратен	Средняя–высокая	[8]
MPC + APF/CBF (гибридные схемы)	Динамическое избегание столкновений	Оптимизация движения, высокая плавность	Требует сложных моделей и вычислительных ресурсов	Возможна в реальном времени с оптимизацией	[9–11]
OSCBF/CBF-based control	Формально гарантированная безопасность	Теоретические гарантии	Сложность постановки; высокая цена	Средняя; применение в реальном времени ограничено	[3–5]

Современные работы [9, 10] показывают эффективность нелинейного предиктивного управления на основе модели (Model Predictive Control, MPC) в сочетании с APF или CBF для динамического избегания столкновений, но такие схемы требуют усложненных моделей.

Работы (табл. 1) подобраны на основе последних исследований (2021–2025 гг.), отражающих текущее состояние области. Таким образом, ни один из рассмотренных подходов не обеспечивает одновременно устойчивого управления вблизи сингулярностей, комплексной защиты всех звеньев от препятствий и вычислительной эффективности в реальном времени. Это подчеркивает необходимость разработки интегрированного метода, объединяющего преимущества DLS, управления в нуль-пространстве и реактивных методов избегания препятствий.

### Формальная постановка задачи

Требуется обеспечить слежение за заданием  $x_{target}(t)$  для манипулятора типа RRRRRP в условиях наличия препятствий и близости к сингулярным конфигурациям, формируя суставные скорости  $\dot{\theta}(t)$  в реальном времени при выполнении ограничений безопасности  $d_{min,i}(\theta(t)) \geq d_{safe}$ , избегания сингулярностей  $w(\theta(t)) \geq w_{thr}$  и ограничений на управляющие воздействия (в частности, на  $\dot{\theta}(t)$ ). Приведем описание предлагаемого алгоритма и используемых критериев оценки.

Требования к точности и критерию оценки. Качество работы алгоритма оценивается по формализованным метрикам слежения, безопасности и устойчивости: норме ошибки  $\|e(t)\|$  (в том числе  $\|e(T)\|$  и/или RMSE — корню среднеквадратичной ошибки), ми-

нимальному клиренсу  $d_{min} = \min_{t,i} d_{min,i}(\theta(t))$ , минимальной манипулируемости  $w_{min} = \min_t w(\theta(t))$ , а также максимуму суставных скоростей  $\dot{\theta}_{max} = \max_t \|\dot{\theta}(t)\|_{\infty}$ . Выполнение требований фиксируется условиями  $\|e(t)\| \leq \epsilon_p$ ,  $d_{min} \geq d_{safe}$ ,  $w_{min} \geq w_{thr}$  и  $\dot{\theta}_{max} \leq \dot{\theta}_{lim}$ , которые задаются параметрами эксперимента и используются для сопоставления результатов, где  $\epsilon_p$  — допустимая погрешность позиционирования;  $d_{safe}$  — безопасная дистанция до препятствий;  $w_{thr}$  — пороговое значение индекса манипулируемости;  $\dot{\theta}_{lim}$  — предельная норма суставной скорости.

### Методология моделирования

Предлагаемый алгоритм объединяет декартовое управление, метод DLS и проекцию вторичных задач в нуль-пространство для одновременного избегания препятствий и предотвращения сингулярностей. Система формирует целевую скорость конца эффектора на основе ошибки слежения, а при опасном сближении с препятствиями добавляет отталкивающие компоненты. Суставные скорости рассчитываются по методу DLS, а корректировка движения в нуль-пространстве обеспечивает поддержание манипулируемости и соблюдение дополнительных ограничений. Структурная схема алгоритма представлена на рис. 1.

**Структура манипулятора.** Рассматриваемый манипулятор представляет собой шестистепенную кинематическую цепь типа RRRRRP, включающую пять вращательных суставов ( $\theta_{base}$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ ,  $\theta_5$ ) и один призматический сустав  $d_5$ , обеспечивающий линейное перемещение хвата (рис. 2). Геометрия звеньев описывается стандартной параметризацией Денавита–Хартенберга с постоянными длинами  $d_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  и

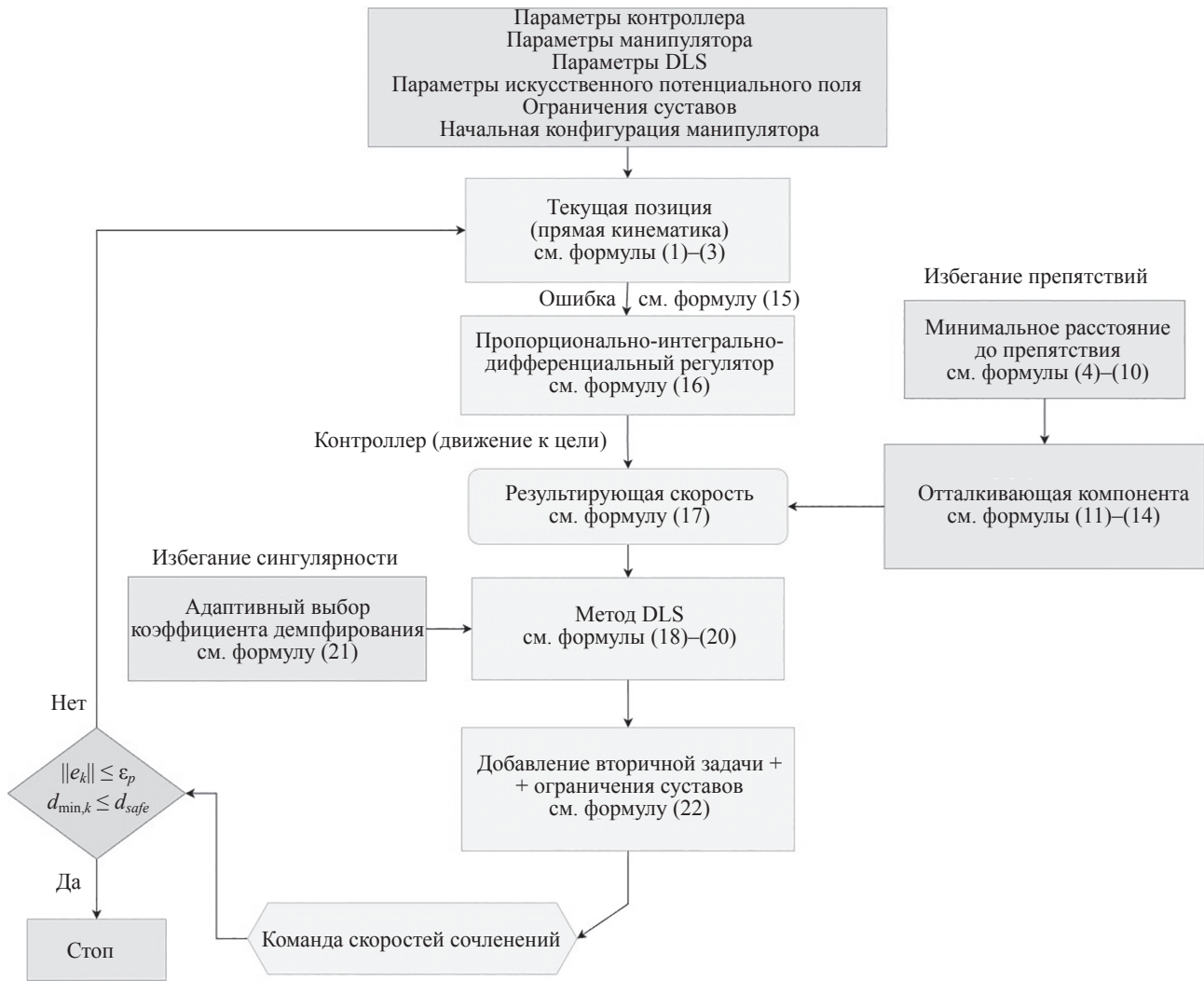


Рис. 1. Структурная схема алгоритма избегания препятствий и сингулярностей  
Fig. 1. Block diagram of the obstacle and singularity avoidance algorithm

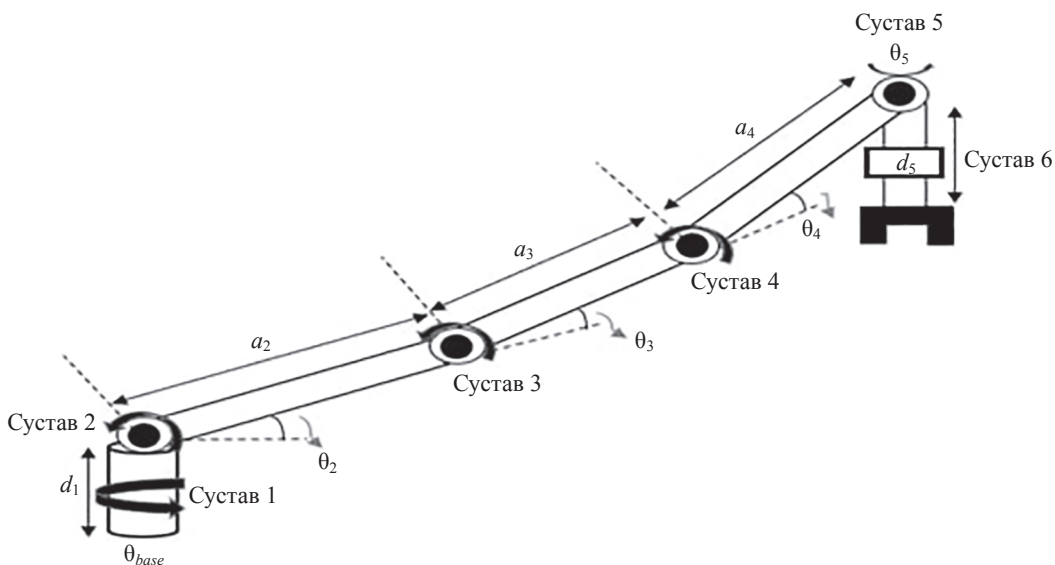


Рис. 2. Кинематическая структура роботизированного манипулятора типа RRRRRP [12]  
Fig. 2. Kinematic structure of the RRRRRP-type robotic manipulator [12]

вертикальным смещением основания  $d_5$ . Данная конфигурация относится к исследовательскому типу и применяется для разработки и тестирования алгоритмов управления в реальном времени.

### Этапы построения математической модели

Математическая модель предложенного алгоритма основана на последовательном выполнении четырех ключевых этапов, обеспечивающих интеграцию кинематического анализа, расчета расстояний до препятствий и формирования управляющих воздействий в пространстве суставов.

Модель формируется на основе последовательной интеграции прямой кинематики, геометрического описания звеньев, расчета расстояний до препятствий и построения управляющих воздействий.

Рассмотрим ключевые этапы вычисления пространственного положения звеньев манипулятора, являющегося фундаментом для последующего анализа безопасности.

**Этап 1. Расчет положений звеньев робота-манипулятора.** Выполняется вычисление трехмерных координат всех кинематических звеньев и суставов на основании параметризации Денавита–Хартенберга (DH). Полученные координаты обеспечивают геометрическую связность модели и используются при вычислении минимальных расстояний до препятствий.

Гомогенная матрица преобразования координатной системы звена  $i - 1$  в систему звена  $i$  определяется выражением [13, 14]:

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = DH(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i), i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $\theta_i$  — угол поворота;  $d_i$  — смещение вдоль оси  $z_{i-1}$ ;  $a_i$  — длина звена;  $\alpha_i$  — угол скручивания вокруг оси  $x_i$ ;  $N = 6$  — число суставов рассматриваемого манипулятора.

Преобразование из базовой системы координат в систему  $i$ -го звена вычисляется в виде произведения матриц:

$$\mathbf{T}_i^0 = \mathbf{T}_1^0 \mathbf{T}_2^1 \dots \mathbf{T}_i^{i-1}. \quad (2)$$

Позиция точки  $\mathbf{p}_i$  в глобальной системе определяется извлечением вектора трансляции из  $\mathbf{T}_i^0$ :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{T}_i^0[0: 3, 3]^T. \quad (3)$$

Каждое звено моделируется как отрезок, соединяющий две последовательные точки:

$$\text{Link}_i = \text{Segment}(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i), \quad (4)$$

где  $\mathbf{p}_{i-1}$  и  $\mathbf{p}_i$  — координаты смежных суставов.

**Этап 2. Расчет минимального расстояния.** Определяется минимальное расстояние между каждым звеном робота-манипулятора и ближайшим препятствием. Каждое звено рассматривается как линейный отрезок в пространстве  $\mathbb{R}^3$  между последовательными кинематическими точками  $\mathbf{p}_{i-1}$  и  $\mathbf{p}_i$ , полученными на

основании прямой кинематики. Таким образом, звено  $i$  моделируется отрезком по формуле (4).

Пусть препятствие задано точкой  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^3$  (для сферического препятствия  $\mathbf{O}$  соответствует центру сферы радиуса  $r > 0$ ). Введем вектора вдоль звена ( $\mathbf{V}$ ) и от начальной точки звена к центру препятствия ( $\mathbf{W}$ ):

$$\mathbf{V} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{W} = \mathbf{O} - \mathbf{p}_{i-1}. \quad (5)$$

Коэффициент проекции точки  $\mathbf{O}$  на линию звена имеет вид

$$t_i = \frac{\mathbf{WV}}{\|\mathbf{V}\|^2}, t_i \in [0, 1] \text{ (усечение к отрезку)}. \quad (6)$$

Ближайшая к препятствию точка отрезка определяется выражением

$$\mathbf{p}_{closest,i} = \mathbf{p}_{i-1} + t_i \mathbf{V}. \quad (7)$$

Для точечного препятствия минимальное расстояние (клиренс) до  $i$ -го звена равно

$$d_{min,i} = \|\mathbf{p}_{closest,i} - \mathbf{O}\|. \quad (8)$$

Если препятствие представляет собой сферу с центром  $\mathbf{O}$  и радиусом  $r$ , множество точек сферы задается как

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{O}\| \leq r\}, \quad (9)$$

а клиренс до ее поверхности вычисляется по формуле

$$d_{min,i} = \max(0, \|\mathbf{p}_{closest,i} - \mathbf{O}\| - r). \quad (10)$$

**Этап 3. Формирование отталкивающей силы (рис. 3).** Для обеспечения безопасного функционирования многозвенового робота-манипулятора в насыщенной препятствиями рабочей зоне требуется формирование реактивного воздействия, предотвращающего критическое сближение звеньев с объектами среды. На этапе 3 реализуется вычисление отталкивающей силы, возникающей при нарушении порогового значения безопасного расстояния  $d_{safe}$ .

Пусть  $d_{min,i}$  — минимальная дистанция между  $i$ -м звеном и препятствием. Тогда условие активации модуля безопасности формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{min,i} \geq d_{safe} &\Rightarrow \mathbf{F}_{rep,i} = 0, \\ d_{min,i} < d_{safe} &\Rightarrow \mathbf{F}_{rep,i} \neq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Направление корректирующего воздействия определяется единичным вектором, направленным от положения препятствия  $\mathbf{O}$  к ближайшей точке звена  $\mathbf{p}_{closest,i}$ :

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{p}_{closest,i} - \mathbf{O}}{\|\mathbf{p}_{closest,i} - \mathbf{O}\|}, \quad (12)$$

что обеспечивает гарантированное удаление кинематических звеньев от потенциально опасной области.

Величина отталкивающей силы вычисляется на основе метода APF [15, 16]:

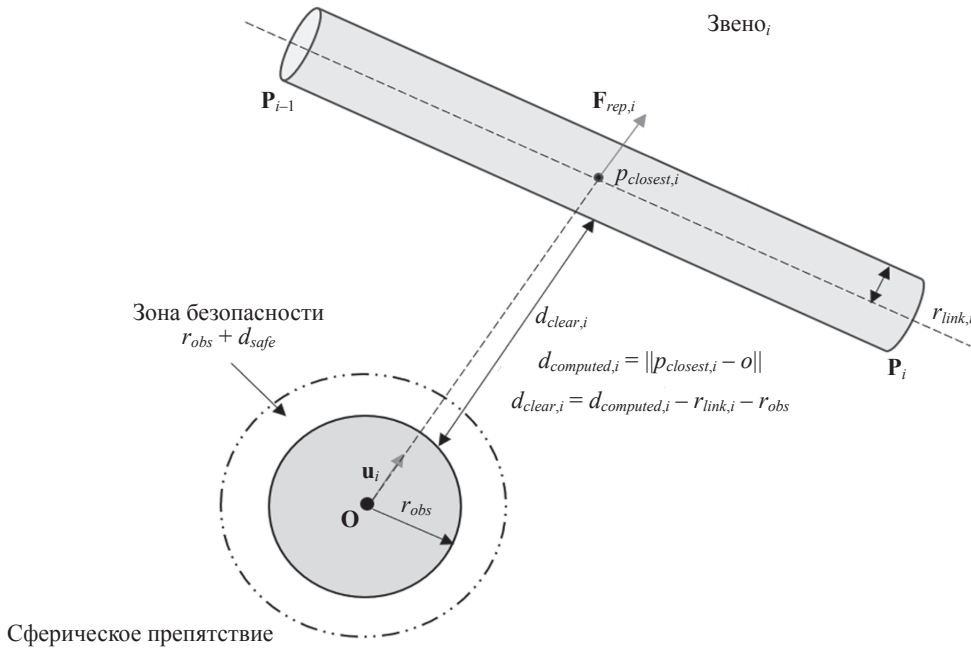


Рис. 3. Взаимодействие звена манипулятора со сферическим препятствием.

$P_{i-1}$  и  $P_i$  — положения соседних суставов (концы  $i$ -го звена);  $r_{obs}$  — радиус препятствия;  $d_{clear,i}$  — клиренс (минимальная безопасная дистанция) между звеном и препятствием;  $d_{computed,i}$  — вычисленное расстояние от ближайшей точки звена  $p_{closest,i}$  до центра препятствия  $O$  (с учетом  $r_{obs}$ );  $r_{link,i}$  — эффективный радиус  $i$ -го звена

Fig. 3. Interaction of a manipulator link with a spherical obstacle.

$P_{i-1}$  and  $P_i$  are the positions of adjacent joints (the ends of the  $i$ -th link);  $r_{obs}$  is the obstacle radius;  $d_{clear,i}$  is the clearance (minimum safe distance) between the link and the obstacle;  $d_{computed,i}$  is the calculated distance from the closest point of the link  $p_{closest,i}$  to the center of the obstacle  $O$  (taking into account  $r_{obs}$ );  $r_{link,i}$  is the effective radius of the  $i$ -th link

$$\mathbf{F}_{rep,i} = \begin{cases} \mu \left( \frac{1}{d_{min,i}} - \frac{1}{d_{safe}} \right) \frac{1}{d_{min,i}^2} \mathbf{u}_i, & \text{если } d_{min,i} \leq d_{safe} \\ 0, & \text{если } d_{min,i} > d_{safe} \end{cases}, \quad (13)$$

где  $\mu > 0$  — коэффициент интенсивности силового отклонения.

*Преобразование силового воздействия в корректирующую кинематику.* Предполагается, что воздействие на систему реализуется в виде корректирующей скорости звена, пропорциональной величине силового взаимодействия:

$$\mathbf{v}_{rep,i} = k_v \mathbf{F}_{rep,i}, k_v > 0, \quad (14)$$

что обеспечивает непрерывное и динамически согласованное влияние модуля безопасности на общее управление в рабочем пространстве.

*Интеграция реактивной составляющей в контур декартового управления.* Ошибка слежения для конечного эффектора формулируется как:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_{target} - \mathbf{x}_{current} \quad (15)$$

и используется в ПИД-контуре управления, определяющем целевую линейную скорость:

$$\dot{\mathbf{x}}_{PID} = k_p \mathbf{e}(t) + k_I \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau + k_D \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt}, \quad (16)$$

где  $k_p$ ,  $k_I$  и  $k_D$  — коэффициенты пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих.

Итоговая управляющая команда формируется векторным суммированием:

$$\dot{\mathbf{x}}_{cmd} = \dot{\mathbf{x}}_{PID} + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{rep,i} \quad (17)$$

где  $n$  — число звеньев, находящихся под контролем расстояния до препятствий.

**Этап 4. Преобразование результирующей линейной скорости.** Управление движением многозвенного робота-манипулятора требует преобразования заданной скорости рабочего органа в скорости суставов  $\dot{\theta}$ , используемые системой низкого уровня для выполнения управляющих воздействий. Динамическая взаимосвязь между скоростями в декартовом и суставном пространствах описывается выражением [17, 18]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\theta) \dot{\theta}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{J}(\theta)$  — матрица Якоби, отражающая локальные кинематические свойства манипулятора.

Вблизи сингулярных конфигураций ранга матрицы Якоби может быть недостаточно для корректного определения  $\dot{\theta}$ , что приводит к неустойчивости и взрывному росту суставных скоростей. В таких условиях используется метод DLS:

$$\mathbf{J}_{DLS}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1}, \lambda > 0, \quad (19)$$

где  $\lambda$  — коэффициент демпфирования, обеспечивающий регуляризацию задачи обращения Якоби;  $\mathbf{I}$  —

единичная матрица размерности  $m \times m$ , согласованная с матрицей  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$  (где  $m$  — размерность вектора задачи в декартовом пространстве).

Суставные скорости, реализующие основную задачу слежения, определяются выражением:

$$\dot{\theta}_{task} = \mathbf{J}_{DLS}^+ \dot{\mathbf{x}}_{cmd}. \quad (20)$$

Для поддержания устойчивости при приближении к критическим позам применяется адаптивное управление демпфированием, при котором величина  $\lambda$  изменяется пропорционально ухудшению манипулируемости [19]:

$$\lambda(\theta) = \frac{\lambda_{max}}{1 + \alpha w(\theta)}, \quad \lambda_{max} > 0, \alpha > 0, \quad (21)$$

где  $w(\theta) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\theta)\mathbf{J}^T(\theta))}$  — индекс манипулируемости, характеризующий способность манипулятора генерировать движения в различных направлениях в рабочем пространстве.

В области высокой манипулируемости ( $w(\theta) \approx 1$ ) значение  $\lambda$  стремится к  $\lambda_{min}$ , обеспечивая точное и быстрое движение. По мере снижения манипулируемости ( $w(\theta) \rightarrow 0$ ) параметр  $\lambda$  возрастает, подавляя сингулярные эффекты и стабилизируя вычисления. Таким образом, адаптивный выбор  $\lambda$  обеспечивает компромисс между точностью решения и его численной обусловленностью.

Для решения дополнительных задач (ограничение суставных скоростей, повышение манипулируемости) используется проекция вторичного движения в нуль-пространство основной задачи:

$$\dot{\theta}_{total} = \dot{\theta}_{task} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+\mathbf{J})\dot{\theta}_{null}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{J}^+$  — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза;  $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^+\mathbf{J})$  — проектор, который гарантирует, что вторичная задача не нарушает выполнение задачи слежения за желаемым движением рабочего органа.

Такой подход позволяет обеспечить устойчивое, безопасное и управляемое движение робота-манипулятора даже в условиях высокой насыщенности среды препятствиями и близости к сингулярным конфигурациям.

### Моделирование и результаты

Для оценки эффективности разработанного алгоритма была проведена серия численных экспериментов на кинематической модели шестистепенного манипулятора типа RRRRRP. Цель экспериментов заключалась в проверке способности системы обеспечивать безопасное и плавное движение конца эффектора к целевой точке в условиях ограниченного рабочего пространства с препятствиями, а также в анализе устойчивости и сохранения манипулируемости при различных конфигурациях звеньев.

В рабочую область манипулятора добавлены четыре сферических препятствия радиусом 0,15 м. Их координаты заданы в табл. 2.

Расположение препятствий в экспериментах позволяет оценить работу алгоритма в условиях как от-

Таблица 2. Координаты и радиусы препятствий, м  
Table 2. Coordinates and radius of obstacles, m

Препятствие	Координаты центра (x, y, z)	Радиус
$O_1$	(1,5, -0,2, 0,9)	0,15
$O_2$	(0,8, 0,4, 1,2)	
$O_3$	(0,6, -0,5, 2)	
$O_4$	(-0,4, -0,6, 0,5)	

носительно свободного движения (сценарий 1), так и прохождения через узкие зоны с повышенным риском столкновений (сценарий 2). Полученные результаты были представлены в виде графиков, отражающих изменение ошибки слежения, индекса манипулируемости, скоростей суставов и минимальных расстояний между звеньями робота и препятствиями.

**Сценарий 1. Достижение труднодоступной цели в условиях высокой плотности препятствий.** В эксперименте конечный эффектор достигал цели в условиях высокой плотности препятствий (рис. 4). Ошибка слежения постепенно снижалась до 0,05 м (рис. 5, a). Профиль скоростей суставов демонстрирует умеренные колебания при обходе препятствий, без потери устойчивости (рис. 5, b). Индекс манипулируемости сохранялся не менее 0,8, исключая переход в сингулярные состояния (рис. 5, c). Минимальная дистанция до препятствий оставалась не менее 0,18 м, что подтверждает корректную активацию избегания коллизий (рис. 5, d). Адаптивное переключение режимов избегания препятствий и демпфирования обеспечило плавное и безопасное прохождение узкой зоны (рис. 6).

**Сценарий 2. Движение через узкий проход препятствий.** Манипулятор выполнял движение через узкий проход, сформированный четырьмя препятствиями (рис. 7). Ошибка позиционирования стабильно снижалась и достигла 0,04 м (рис. 8, a), подтверждая устойчивую сходимост ПИД-контроля. Суставные скорости (рис. 8, b) оставались без перегрузок, а индекс манипулируемости не снижался ниже 0,8 (рис. 8, c), исключая сингулярности. Минимальная дистанция до препятствий не опускалась ниже 0,18 м (рис. 8, d).

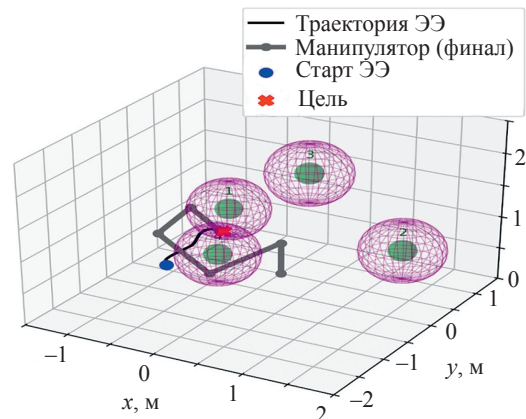


Рис. 4. Траектория энд-эффектора (ЭЭ) с препятствиями (сценарий 1)

Fig. 4. End-effector (ЭЭ) trajectory with obstacles (scenario 1)

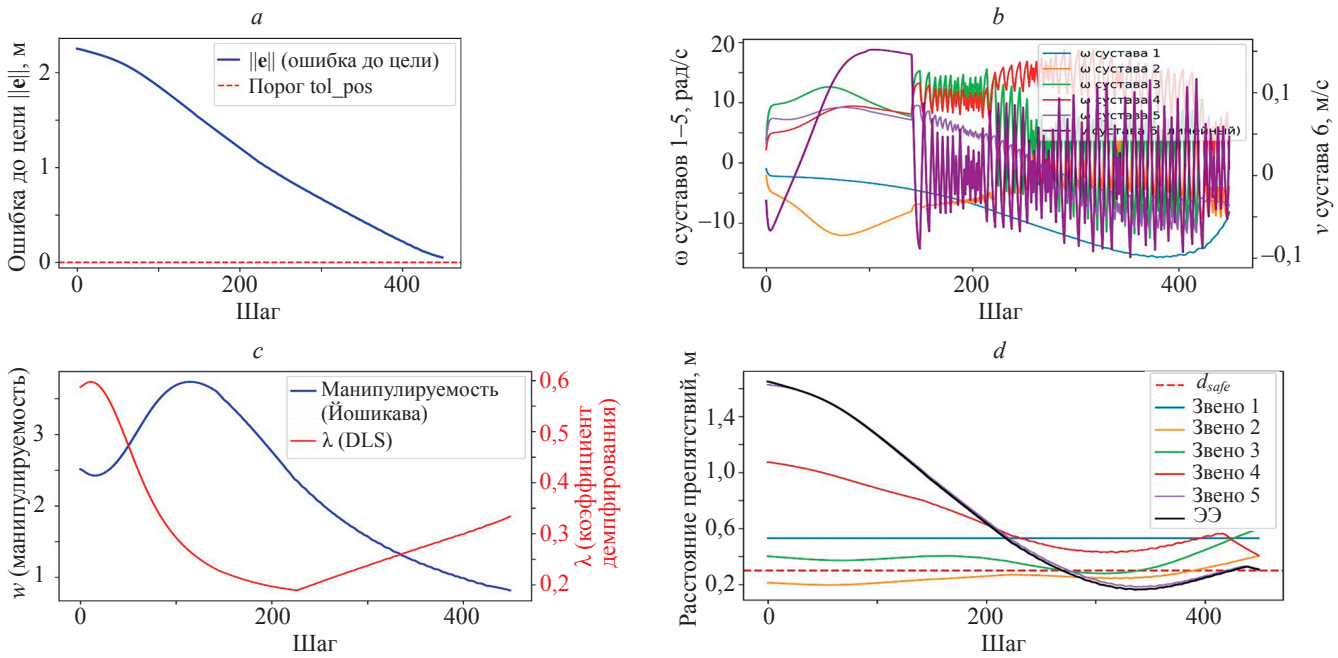


Рис. 5. Норма ошибки положения (а) и скорости (b) суставов; манипулируемость во времени (с) и минимальная дистанция до препятствий (d) (сценарий 1).

$\omega$  — угловая скорость суставов;  $v$  — линейная скорость сустава;  $w$  — индекс манипулируемости по Йошикаве; ЭЭ — энд-эффектор

Fig. 5. The error rate of positions (a) and velocities (b) of joints; manipulability over time (c) and minimum distance to obstacles (d) (scenario 1).

$\omega$  is the joints angular velocity;  $v$  is the joint linear velocity;  $w$  is the Yoshikawa manipulability index; ЭЭ is denotes the end-effector

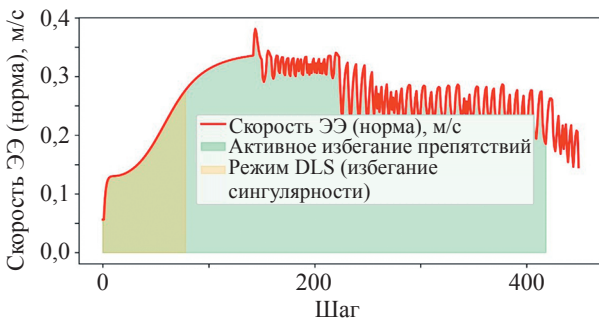


Рис. 6. Норма скорости энд-эффектора (ЭЭ) и режимы управления (сценарий 1)

Fig. 6. End-effector (ЭЭ) velocity norm and control modes (scenario 1)

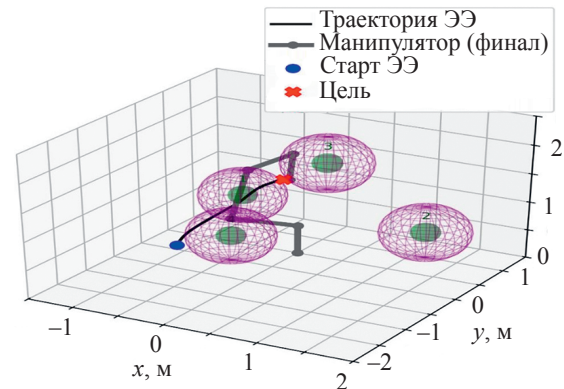


Рис. 7. Траектория энд-эффектора (ЭЭ) с препятствиями (сценарий 2)

Fig. 7. End-effector (ЭЭ) trajectory with obstacles (scenario 2)

### Обсуждение результатов. Сравнительный анализ методов управления

Адаптивное переключение режимов избегания препятствий и демпфирования (рис. 9) обеспечило плавное и безопасное прохождение узкой зоны. Таким образом, даже в сложной конфигурации пространства алгоритм гарантировал точность, безопасность и устойчивость движения в режиме реального времени.

В табл. 3 представлены основные количественные показатели, отражающие точность позиционирования, уровень манипулируемости, безопасное расстояние до препятствий и динамические характеристики движения манипулятора.

Сравнительный анализ (табл. 4) показывает, что классический метод APF, ориентированный только на рабочий орган манипулятора, не обеспечивает защиту звеньев и может приводить к локальным минимумам. Расширения метода APF с проекцией в нуль-пространство частично повышают безопасность, однако остаются чувствительными к настройке весовых коэффициентов. Алгоритмы выборочного планирования (RRT-Connect, Bi-RRT) дают глобальные траектории в сложных средах, но их вычислительная сложность

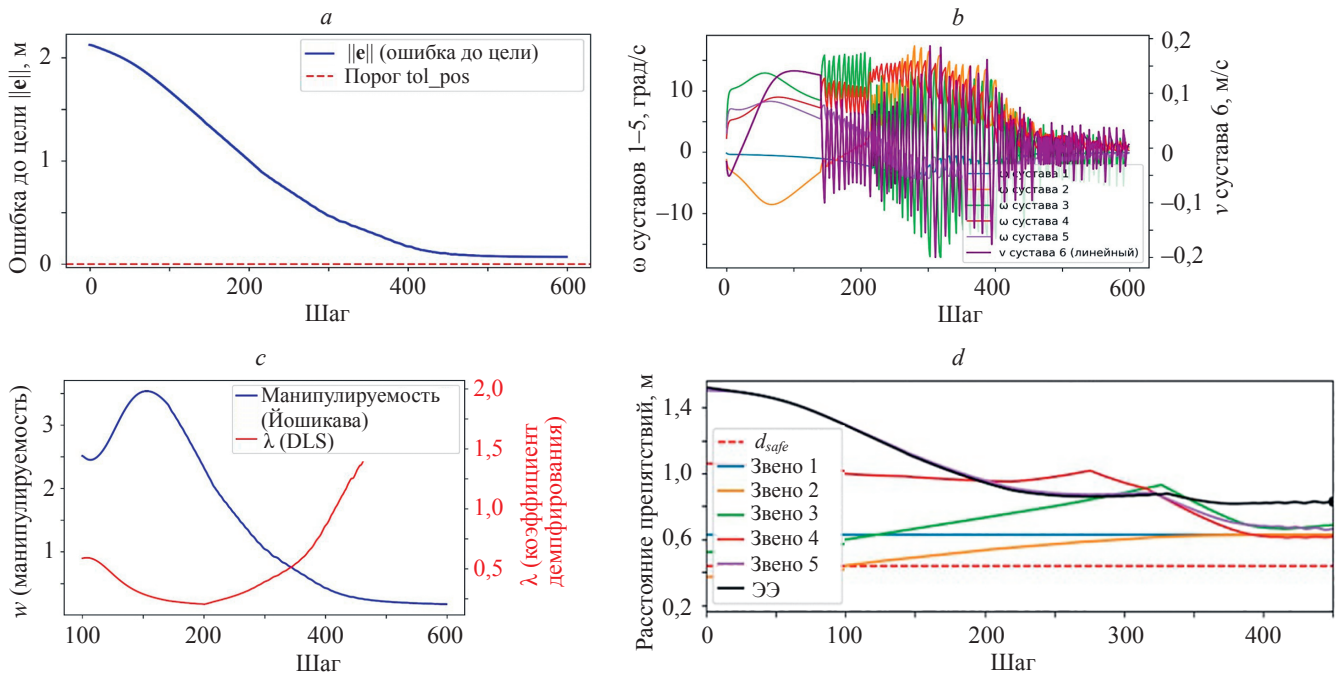


Рис. 8. Норма ошибки положения (a) и скорости (b) суставов; манипулируемость во времени (c) и минимальная дистанция до препятствий (d) (сценарий 2)

Fig. 8. The error rate of positions (a) and velocities (b) of joints; manipulability over time (c) and minimum distance to obstacles (d) (scenario 2)

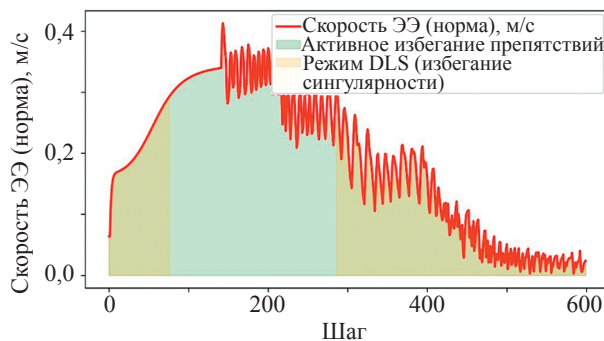


Рис. 9. Норма скорости энд-эффектора (ЭЭ) и режимы управления (сценарий 2)

Fig. 9. End-effector (ЭЭ) velocity norm and control modes (scenario 2)

ограничивает применение в реальном времени. Метод DLS снижает влияние сингулярностей, однако не предотвращает столкновения звеньев. Подходы типа OSCBF обеспечивают формальные гарантии безопасности, но требуют решения крупномасштабных оптимизационных задач, что усложняет онлайн-реализацию в динамических условиях.

Предлагаемый алгоритм сочетает преимущества перечисленных подходов, сохраняя низкую вычислительную сложность и обеспечивая одновременное достижение цели, поддержание высокой манипулируемости и защиту всех звеньев манипулятора от столкновений — что делает его перспективным для использования в реальном времени.

Результаты численного моделирования подтверждают эффективность предложенного алгоритма, объеди-

Таблица 3. Сравнительный анализ результатов моделирования

Table 3. Comparative analysis of simulation results

Показатель	Сценарий 1	Сценарий 2
Целевая точка	$[-0,60, -0,15, 0,60]$	$[0,35, 0,05, 0,80]$
Конечное положение	$[-0,62, -0,14, 0,56]$	$[0,41, 0,07, 0,85]$
Конечная ошибка, м	0,043	0,045
Минимальное расстояние, м	0,19	0,22
Звенья, входившие в опасную зону	2 и 5	2 и 4
Количество эпизодов входа в опасную зону	2	2
Средняя манипулируемость	1,1	1,5
Максимальная скорость энд-эффектора, м/с	менее 0,45	менее 0,40
Достижение цели без коллизий	Да	Да

Таблица 4. Сравнение предлагаемого метода с базовыми

Table 4. Comparison with baseline methods

Метод	Избегание препятствий (конец/звенья)	Поддержание манипулируемости	Конечная ошибка, м	Минимальное расстояние до препятствий, м	Устойчивость скоростей	Реализация в реальном времени	Ссылки на источники
APF	Только конец	Нет	0,10–0,15	0,18–0,20	Средняя, возможны колебания	Высокая	[9, 16]
DLS	Только конец	Да	0,06–0,09	0,20–0,22	Средняя	Средняя	[1, 2]
APF + нуль-пространство	Конец + частично звенья	Частично	0,07–0,10	0,20–0,22	Средняя	Средняя	[6, 7]
RRT/RRT-Connect	Конец (на уровне планирования)	Нет	0,05–0,12	0,18–0,23	Зависит от дискретизации	Ограничена	[8, 15]
MPC + APF/ MPC + CBF	Конец + звенья	Частично/Да	более 0,05	менее 0,20	Высокая	Возможна при оптимизации	[9–11]
OSCBF/CBF-based control	Конец + звенья	Да	более 0,05	менее 0,20	Высокая	Ограничено	[3–5]
Предлагаемый метод	Конец + все звенья	Да (адаптивно)	0,04–0,09	0,23 и более	Высокая	Да	—

няющего ПИД-регуляцию в декартовом пространстве, метод DLS и коррекцию в нуль-пространстве. Такое сочетание обеспечивает точное достижение цели, предотвращение сближения с препятствиями и сохранение достаточной манипулируемости даже в сложной рабочей среде.

В обоих сценариях ошибка слежения стабильно снижалась до значений менее 0,05 м, при этом не наблюдалось колебаний или перегрузок, что свидетельствует об устойчивой работе контура управления. Минимальные расстояния до препятствий оставались выше порога  $d_{safe} = 0,18$  м, что подтверждает корректную активацию механизма избегания коллизий без излишних вмешательств.

Индекс манипулируемости в узких областях кратковременно снижался, однако система не входила в сингулярные конфигурации благодаря демпфированию в DLS и коррекции в нуль-пространстве. Суставные скорости оставались сглаженными, что гарантирует безопасность и применимость алгоритма в реальном времени.

В сравнении с классическими APF-методами, подверженными локальным минимумам, предложенный подход обеспечил более надежное достижение цели. В отличие от глобальных планировщиков RRT/RRT-Connect, вычислительная сложность оставалась приемлемой для управления в реальном времени. Также, в отличие от чистых CBF-подходов, предложенный метод не требует высоких вычислительных затрат.

Таким образом, разработанный алгоритм обеспечивает практический баланс между точностью, устойчивостью и безопасностью движения манипулятора.

В дальнейшем работа будет расширена за счет учета динамики, параметрической идентификации и экспериментальной проверки на реальном роботизированном комплексе.

### Заключение

Разработан интегрированный алгоритм управления роботизированным манипулятором с шестью степенями свободы, обеспечивающий одновременное избегание препятствий и предотвращение сингулярных состояний при сохранении высокой точности позиционирования конца эффектора. Алгоритм объединяет пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор в декартовом пространстве, метод псевдоинверсии с демпфированием, проекцию в нуль-пространство и метод искусственных потенциальных полей для генерации отталкивающих скоростей на уровне звеньев. Результаты численного моделирования подтвердили эффективность предложенного подхода: во всех сценариях манипулятор достигал целевой точки с остаточной ошибкой менее 0,05 м, минимальное расстояние до ближайшего препятствия не опускалось ниже 0,18 м, а индекс манипулируемости сохранялся выше 0,8. Система демонстрирует устойчивое и плавное движение без коллизий и приближения к сингулярным конфигурациям, что подтверждает ее применимость для задач управления в реальном времени. Перспективы дальнейших исследований связаны с учетом динамических характеристик манипулятора, внедрением сенсорной обратной связи и адаптацией алгоритма для коллаборативных робототехнических систем.

## Литература

1. Beck F., Vu M.N., Hartl-Nešić C., Kugi A. Singularity avoidance with application to online trajectory optimization for serial manipulators // *IFAC-PapersOnLine*. 2023. V. 56. N 2. P. 284–291. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.1582>
2. Li Y., Zheng Y., Liu Y., Gao S., Song R. Damped least-squares optimization-based singularity configuration avoidance for manipulator // *Proc. of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Frontiers of Intelligent Manufacturing and Automation*. 2024. P. 560–565. <https://doi.org/10.1145/3704558.3705523>
3. Ding X., Wang H., Ren Y., Zheng Y., Chen C., He J. Online control barrier function construction for safety-critical motion control of manipulators // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. 2024. V. 54. N 8. P. 4761–4771. <https://doi.org/10.1109/tsmc.2024.3387434>
4. Morton D., Pavone M. Safe, task-consistent manipulation with operational space control barrier functions // *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2025. P. 187–194. <https://doi.org/10.1109/iros60139.2025.11246389>
5. Ducaju J.M.S., Olofsson B., Robertsson A., Johansson R. Null-space compliance variation for safe human–robot collaboration in redundant manipulators using safety control barrier functions // *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2023. P. 5903–5909. <https://doi.org/10.1109/iros55552.2023.10342181>
6. Kim S., Yun S., Shin D. Numerical quantification of controllability in the null space for redundant manipulators // *Applied Sciences*. 2021. V. 11. N 13. P. 6190. <https://doi.org/10.3390/app11136190>
7. Wong C.-C., Tsai C.-Y., Lai Y.-C., Wong S.-W. Manipulability-aware task-oriented grasp planning and motion control with application in a Seven-DoF redundant dual-arm robot // *Electronics*. 2024. V. 13. N 24. P. 5025. <https://doi.org/10.3390/electronics13245025>
8. He X., Zhou Y., Liu H., Shang W. Improved RRT\*-connect manipulator path planning in a multi-obstacle narrow environment // *Sensors*. 2025. V. 25. N 8. P. 2364. <https://doi.org/10.3390/s25082364>
9. Zhu T., Mao J., Han L., Zhang C., Yang J. Real-time dynamic obstacle avoidance for robot manipulators based on cascaded nonlinear MPC with artificial potential field // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2024. V. 71. N 7. P. 7424–7434. <https://doi.org/10.1109/tie.2023.3306405>
10. Liu J., Yang J., Mao J., Zhu T., Xie Q., Li Y., Wang X., Li S. Flexible active safety motion control for robotic obstacle avoidance: a CBF-guided MPC approach // *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2025. V. 10. N 3. P. 2686–2693. <https://doi.org/10.1109/lra.2025.3534519>
11. Zhao Z., Yang X., Li Y., Xu Z., Zhao J., Liu H. Singularity analysis and avoidance for an SSRMS-type reconfigurable space manipulator with a non-spherical wrist and two lockable passive telescopic links // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2024. V. 37. N 8. P. 435–459. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2024.01.014>
12. Альвардат М., Ал-Аражи Х.М. Интеллектуальные методы управления траекторией робота манипулятора с предотвращением сингулярностей // *Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова*. 2025. № 10. С. 115–128. <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2025-10-10-115-128>
13. Alwardat M.Y., Alwan H.M., Kochneva O.V. Comprehensive kinematic analysis for optimal performance of a 6-DOF robotic manipulator with prismatic joint (RRRRR) // *Russian Engineering Research*. 2024. V. 44. N 11. P. 1640–1647. <https://doi.org/10.3103/S1068798X24702691>
14. Alwardat M.Y., Alwan H.M. Forward and inverse kinematics of a 6-DOF robotic manipulator with a prismatic joint using MATLAB robotics toolbox // *International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration*. 2024. V. 11. N 117. P. 1096–1110. <https://doi.org/10.19101/ijatee.2024.111100210>
15. Alwardat M.Y., M'bolo O.E.-L., Benslimane Y., Alwan H.M. Intelligent control of rigid-link manipulators: a systematic review of recent advances and future trends // *International Journal of Robotics and Control Systems*. 2025. V. 5. N 3. P. 1949–1974. <https://doi.org/10.31763/ijrcs.v5i3.2019>
16. Alwardat M.Y., Alwan H.M. Redundancy-based obstacle avoidance with virtual force fields for high-dof robotic arm // *International Journal of Advanced Research in Computer Science*. 2025. V. 16. N 3. P. 15–21. <https://doi.org/10.26483/ijarcs.v16i3.7221>

## References

1. Beck F., Vu M.N., Hartl-Nešić C., Kugi A. Singularity avoidance with application to online trajectory optimization for serial manipulators. *IFAC-PapersOnLine*, 2023, vol. 56, no. 2, pp. 284–291. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.1582>
2. Li Y., Zheng Y., Liu Y., Gao S., Song R. Damped least-squares optimization-based singularity configuration avoidance for manipulator. *Proc. of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Frontiers of Intelligent Manufacturing and Automation*, 2024, pp. 560–565. <https://doi.org/10.1145/3704558.3705523>
3. Ding X., Wang H., Ren Y., Zheng Y., Chen C., He J. Online control barrier function construction for safety-critical motion control of manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2024, vol. 54, no. 8, pp. 4761–4771. <https://doi.org/10.1109/tsmc.2024.3387434>
4. Morton D., Pavone M. Safe, task-consistent manipulation with operational space control barrier functions. *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2025, pp. 187–194. <https://doi.org/10.1109/iros60139.2025.11246389>
5. Ducaju J.M.S., Olofsson B., Robertsson A., Johansson R. Null-space compliance variation for safe human–robot collaboration in redundant manipulators using safety control barrier functions. *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2023, pp. 5903–5909. <https://doi.org/10.1109/iros55552.2023.10342181>
6. Kim S., Yun S., Shin D. Numerical quantification of controllability in the null space for redundant manipulators. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, no. 13, pp. 6190. <https://doi.org/10.3390/app11136190>
7. Wong C.-C., Tsai C.-Y., Lai Y.-C., Wong S.-W. Manipulability-aware task-oriented grasp planning and motion control with application in a Seven-DoF redundant dual-arm robot. *Electronics*, 2024, vol. 13, no. 24, pp. 5025. <https://doi.org/10.3390/electronics13245025>
8. He X., Zhou Y., Liu H., Shang W. Improved RRT\*-connect manipulator path planning in a multi-obstacle narrow environment. *Sensors*, 2025, vol. 25, no. 8, pp. 2364. <https://doi.org/10.3390/s25082364>
9. Zhu T., Mao J., Han L., Zhang C., Yang J. Real-time dynamic obstacle avoidance for robot manipulators based on cascaded nonlinear MPC with artificial potential field. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2024, vol. 71, no. 7, pp. 7424–7434. <https://doi.org/10.1109/tie.2023.3306405>
10. Liu J., Yang J., Mao J., Zhu T., Xie Q., Li Y., Wang X., Li S. Flexible active safety motion control for robotic obstacle avoidance: a CBF-guided MPC approach. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2025, vol. 10, no. 3, pp. 2686–2693. <https://doi.org/10.1109/lra.2025.3534519>
11. Zhao Z., Yang X., Li Y., Xu Z., Zhao J., Liu H. Singularity analysis and avoidance for an SSRMS-type reconfigurable space manipulator with a non-spherical wrist and two lockable passive telescopic links. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2024, vol. 37, no. 8, pp. 435–459. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2024.01.014>
12. Alwardat M., Alwan H. Intelligent control methods for robot manipulator trajectory planning with singularity avoidance. *Bulletin of Belgorod State Technological University Named After V.G. Shukhov*, 2025, no. 10, pp. 115–128. (in Russian). <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2025-10-10-115-128>
13. Alwardat M.Y., Alwan H.M., Kochneva O.V. Comprehensive kinematic analysis for optimal performance of a 6-DOF robotic manipulator with prismatic joint (RRRRR). *Russian Engineering Research*, 2024, vol. 44, no. 11, pp. 1640–1647. <https://doi.org/10.3103/S1068798X24702691>
14. Alwardat M.Y., Alwan H.M. Forward and inverse kinematics of a 6-DOF robotic manipulator with a prismatic joint using MATLAB robotics toolbox. *International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration*, 2024, vol. 11, no. 117, pp. 1096–1110. <https://doi.org/10.19101/ijatee.2024.111100210>
15. Alwardat M.Y., M'bolo O.E.-L., Benslimane Y., Alwan H.M. Intelligent control of rigid-link manipulators: a systematic review of recent advances and future trends. *International Journal of Robotics and Control Systems*, 2025, vol. 5, no. 3, pp. 1949–1974. <https://doi.org/10.31763/ijrcs.v5i3.2019>
16. Alwardat M.Y., Alwan H.M. Redundancy-based obstacle avoidance with virtual force fields for high-dof robotic arm. *International Journal of Advanced Research in Computer Science*, 2025, vol. 16, no. 3, pp. 15–21. <https://doi.org/10.26483/ijarcs.v16i3.7221>

17. Alwardat M.Y., Alwan H.M. Geometric Jacobians derivation and kinematic singularity analysis for 6-dof robotic manipulator // *International Journal of Advanced Research in Computer Science*. 2025. V. 16. N 1. P. 6–20. <https://doi.org/10.26483/ijarcs.v16i1.7178>
18. Альвардат М., Ал-Аражи Х.М. Оптимизация траектории робота с избеганием сингулярностей на основе ОМК и нечеткой логики // *Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова*. 2026. № 1. С. 117–132. <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2025-11-1-117-132>
19. Альвардат М.Я., Ал-Аражи Х.М. Анализ сингулярностей робота-манипулятора с шестью степенями свободы с использованием MATLAB // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2025. Т. 68. № 7. С. 643–647. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2025-68-7-643-647>
17. Alwardat M.Y., Alwan H.M. Geometric Jacobians derivation and kinematic singularity analysis for 6-dof robotic manipulator. *International Journal of Advanced Research in Computer Science*, 2025, vol. 16, no. 1, pp. 6–20. <https://doi.org/10.26483/ijarcs.v16i1.7178>
18. Alwardat M., Alwan H. Path optimization and singularity avoidance in robotic manipulators using hybrid ACO-FLC techniques, *Bulletin of Belgorod State Technological University Named After V.G. Shukhov*, 2026, no. 1, pp. 117–132. (in Russian). <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2025-11-1-117-132>
19. Alwardat M.Y., Araji H.M. Singularity analysis of a robotic manipulator with six degrees of freedom using MatLab, *Journal of Instrument Engineering*, 2025, vol. 68, no. 7, pp. 643–647. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2025-68-7-643-647>

#### Авторы

**Альвардат Мохаммад Ясин** — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация, [sc 59317423900](https://orcid.org/0009-0009-9505-6288), <https://orcid.org/0009-0009-9505-6288>, [moh.alwardat@yahoo.com](mailto:moh.alwardat@yahoo.com)

**Ал-Аражи Мохаммед Хасан** — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация, [sc 57202389530](https://orcid.org/0000-0001-6900-7946), <https://orcid.org/0000-0001-6900-7946>, [alarazhi\\_hm@spbstu.ru](mailto:alarazhi_hm@spbstu.ru)

Статья поступила в редакцию 06.10.2025  
Одобрена после рецензирования 13.01.2026  
Принята к печати 15.03.2026

#### Authors

**Mohammad Yasin Alwardat** — PhD Student, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation, [sc 59317423900](https://orcid.org/0009-0009-9505-6288), <https://orcid.org/0009-0009-9505-6288>, [moh.alwardat@yahoo.com](mailto:moh.alwardat@yahoo.com)

**Hassan Mohammed Alwan** — PhD, Associate Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation, [sc 57202389530](https://orcid.org/0000-0001-6900-7946), <https://orcid.org/0000-0001-6900-7946>, [alarazhi\\_hm@spbstu.ru](mailto:alarazhi_hm@spbstu.ru)

Received 06.10.2025  
Approved after reviewing 13.01.2026  
Accepted 15.03.2026



Работа доступна по лицензии  
Creative Commons  
«Attribution-NonCommercial»