

doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-3-662-670

УДК 517.977

## Абстрактный принцип максимума и его применение в теории дифференциальных игр

Алексей Алексеевич Ведяков<sup>1</sup>✉, Анастасия Олеговна Ведякова<sup>2</sup>,  
Ольга Валерьевна Слита<sup>3</sup>, Владимир Юрьевич Тертычный-Даури<sup>4</sup>

<sup>1,4</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация

<sup>3</sup> Технион — Израильский технологический институт, Хайфа, 3200003, Израиль

<sup>1</sup> [vedyakov@itmo.ru](mailto:vedyakov@itmo.ru)✉, <https://orcid.org/0000-0003-4336-1220>

<sup>2</sup> [a.vedyakova@spbu.ru](mailto:a.vedyakova@spbu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0865-3578>

<sup>3</sup> [o-slita@yandex.ru](mailto:o-slita@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7119-3629>

<sup>4</sup> [tertychny-dauri@mail.ru](mailto:tertychny-dauri@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4671-7659>

### Аннотация

**Введение.** Решается задача оптимального управления со стороны двух противоборствующих игроков, где оптимальность управления понимается в минимаксном смысле получения наилучшего гарантированного результата, а управление строится с расчетом на наихудший случай, допускаемый данными измерений. **Метод.** Используется схема сведения задачи теории дифференциальных игр к синтезу оптимального управления посредством абстрактного принципа максимума с применением аппарата соответствующих множителей Лагранжа. **Основные результаты.** Представлена процедура сведения абстрактного принципа максимума применительно к максиминной задаче теории дифференциальных игр для беллмановской интерпретации в терминах динамического программирования. Показано, как из абстрактного принципа следует выполнение основных положений оптимизационного метода Беллмана в случае исследуемой задачи дифференциальных игр. **Обсуждение.** Разработанная методика поиска условий оптимальности в антагонистической теории дифференциальных игр с помощью привлечения математического аппарата абстрактного принципа максимума может быть использована при расчете и проектировании нелинейных управляемых динамических систем с внутренними противоположными интересами.

### Ключевые слова

динамическая система, функционал качества, множители Лагранжа, абстрактный принцип максимума, дифференциальная игра, оптимальная стратегия

**Ссылка для цитирования:** Ведяков А.А., Ведякова А.О., Слита О.В., Тертычный-Даури В.Ю. Абстрактный принцип максимума и его применение в теории дифференциальных игр // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2026. Т. 26, № 3. С. 662–670. doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-3-662-670

## The abstract maximum principle and its application in the differential games theory

Alexey A. Vedyakov<sup>1</sup>✉, Anastasia O. Vedyakova<sup>2</sup>, Olga V. Slita<sup>3</sup>, Vladimir Yu. Tertychny-Dauri<sup>4</sup>

<sup>1,4</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

<sup>2</sup> St. Petersburg State University (SPbSU), Saint Petersburg, 199034, Russian Federation

<sup>3</sup> Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, 3200003, Israel

<sup>1</sup> [vedyakov@itmo.ru](mailto:vedyakov@itmo.ru)✉, <https://orcid.org/0000-0003-4336-1220>

<sup>2</sup> [a.vedyakova@spbu.ru](mailto:a.vedyakova@spbu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0865-3578>

<sup>3</sup> [o-slita@yandex.ru](mailto:o-slita@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7119-3629>

<sup>4</sup> [tertychny-dauri@mail.ru](mailto:tertychny-dauri@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4671-7659>

© Ведяков А.А., Ведякова А.О., Слита О.В., Тертычный-Даури В.Ю., 2026

**Abstract**

The problem of optimal control involving two opposing players is considered where optimality is understood in the minimax sense of achieving the best guaranteed outcome, and the control strategy is constructed with respect to the worst case admissible under the available measurements. The differential game problem is reduced to an optimal control synthesis problem by means of an abstract maximum principle using the method of Lagrange multipliers. A procedure is presented for applying the abstract maximum principle to the maximin formulation of the differential game problem within the Bellman framework in terms of dynamic programming. It is shown how the abstract maximum principle leads to the fundamental relations of Bellman’s optimization method for the differential game under consideration. The developed methodology for deriving optimality conditions in an antagonistic differential game using the abstract maximum principle can be applied to the analysis and design of nonlinear controlled dynamical systems with internally conflicting objectives.

**Keywords**

dynamic system, functional properties, Lagrange multipliers, maximum principle, differential game, optimal strategy

**For citation:** Vedyakov A.A., Vedyakova A.O., Slita O.V., Tertychny-Dauri V.Yu. The abstract maximum principle and its application in the differential games theory. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2026, vol. 26, no. 3, pp. 662–670 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-3-662-670

**Введение**

Работа посвящена игровым задачам управления применительно к нелинейным динамическим системам, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. В теории дифференциальных игр (ДИ) рассматриваются антагонистические (конфликтные) ситуации, которые ей свойственны. Подразумеваются характерные ситуации, которые сопровождают поведение управляемых систем с противоположными интересами. При этом в качестве основного уравнения теории ДИ (уравнения Айзекса–Беллмана) выступает уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в терминах его минимаксного решения [1–6] с учетом таких условий, чтобы это решение существовало и было единственным. Известно о связи уравнений Гамильтона–Якоби с экстремальными задачами, что позволяет рассчитывать на положительное решение вопроса о записи основного уравнения ДИ в терминах абстрактного принципа максимума. Полученные в настоящей работе результаты могут быть полезны для построения кусочно-гладкой функции платы (цены) ДИ. Результаты соответствуют работам [2, 4, 7, 8] и близки к [9–12]. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра с ограниченной продолжительностью (некоторая динамическая система), которая представляет собой совокупность из двух управляемых объектов в виде движений двух противостоящих друг другу сторон (игроков) А и В.

Стратегия игрока А определяется уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^{(1)}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

где  $t \in [t_0, t_1]$  — время;  $t_0$  и  $t_1$  — начальный и конечный моменты времени, заданные изначально;  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$  и  $\mathbf{u}(t)$  — измеряемый фазовый вектор (состояния) и управляющее воздействие игрока А;  $\mathbf{f}^{(1)}$  — заданная вектор-функция динамики первого игрока.

Стратегия противодействующего игрока В описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}^{(2)}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{v}(t)),$$

где  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  и  $\mathbf{v}(t)$  — измеряемый фазовый вектор и управляющее воздействие игрока В;  $\mathbf{f}^{(2)}$  — заданная

вектор-функция динамики второго игрока. В дальнейшем предполагается, что управления  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$  формируются по принципу обратной связи.

Объединим векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в один  $n$ -мерный фазовый вектор  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$  ( $n = n_1 + n_2$ ):  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^*$ , где  $*$  — знак транспонирования. Представим систему написанных уравнений одним уравнением

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{(1)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{z}(t))) \\ \mathbf{f}^{(2)}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}(t, \mathbf{z}(t))) \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что игроки в каждый момент времени  $t$  обладают полной информацией о текущем положении (позиции)  $(t, \mathbf{z}(t))$ .

Допустим, что кусочно-непрерывные управления  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$  удовлетворяют ограничениям:  $\mathbf{u}(t) \in P \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\mathbf{v}(t) \in Q \subset \mathbb{R}^{n_2}$  при  $t \in [t_0, t_1]$ , где  $P, Q$  — некоторые заданные ограниченные замкнутые множества допустимых значений.

Полагаем, что вектор-функция

$$\mathbf{f}: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$$

удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование, единственность и продолжимость решений:

- 1) функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  непрерывна;
- 2) в любой ограниченной области  $D, D \subset [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ , выполнено условие Липшица по переменной  $\mathbf{z}$ :

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}^{(2)}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\| \leq \sigma(D) \|\mathbf{z}^{(1)} - \mathbf{z}^{(2)}\|,$$

где  $(t, \mathbf{z}^{(i)}) \in D, i = 1, 2, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in P \times Q$ ;

- 3)  $\forall (t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$  имеет место оценка

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\| \leq \delta(1 + \|\mathbf{z}\|), \delta - \text{const}.$$

Пусть задана некоторая начальная точка  $(t_0, \mathbf{z}_0) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ , а  $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$  — измеримые функции. При выполнении условий 1–3 решение  $\mathbf{z}(t)$ , где  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ , существует и единственно, а условие 3 может рассматриваться как условие равномерной продолжимости решений. Кроме исполнения усло-

вий 1–3, потребуем выполнения так называемого условия существования седловой точки:

$$4) \forall(t, \mathbf{z}) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \text{ и } \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n, \text{ имеет место равенство} \\ \min_{\mathbf{u} \in P} \max_{\mathbf{v} \in Q} (\mathbf{s}, \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})) = \max_{\mathbf{v} \in Q} \min_{\mathbf{u} \in P} (\mathbf{s}, \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})), \quad (2)$$

где  $(\mathbf{s}(\cdot), \mathbf{f}(\cdot))$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{s}(\cdot)$  и  $\mathbf{f}(\cdot)$ .

Управляемым процессом назовем тройку функций  $(\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times P \times Q$  связанных уравнением (1). Оценим качество управляемого процесса функционалом

$$J[\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)] = \varphi_0[\mathbf{z}(t_0), \mathbf{z}(t_1)] + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \varphi[t, \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)] dt, \quad (3)$$

с заданным начальным состоянием (иначе, начальной позицией):  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, (t_0, \mathbf{z}_0) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ . Функционал (3) принято называть интегрально-терминальным функционалом платы. Функции  $\varphi_0, \varphi$  вместе со своими производными считаются заданными и непрерывными по всем аргументам.

### Некоторые сведения из теории дифференциальных игр

В работах [1, 2, 4, 7] было введено и проанализировано понятие обобщенного минимаксного решения основного уравнения ДИ — уравнения Айзекса–Беллмана и показано, что это решение совпадает с функцией цены ДИ. В ДИ при наличии конфликтной ситуации, где действуют два противоборствующих игрока А и В, первый из них, выбирая управление  $\mathbf{u}(t)$ , использует его, чтобы минимизировать значение функционала  $J$  (3). Второй игрок, наоборот, стремится максимизировать значение функционала  $J$  с помощью своего управления  $\mathbf{v}(t)$ . Игроки А и В располагают информацией о текущем состоянии всей системы  $\mathbf{z}(\cdot)$ . Однако каждый из них не знает, какое именно управление будет выбрано противоположной стороной конфликта.

ДИ представляется совокупностью «двух взаимно дополняющих задач управления с гарантированным результатом» [2]. И далее: «Показатели качества позиционных стратегий в этих задачах противоположны, но оптимальные гарантированные результаты совпадают, их общее значение называется ценой дифференциальной игры» [2].

Антагонистическая игра в теории ДИ определяется тройкой  $(P, Q, \psi)$ , где  $P$  — множество стратегий первого игрока;  $Q$  — множество стратегий второго игрока,  $\psi: P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  — функция платы (в рассматриваемом случае это функционал платы). В данном случае первый игрок стремится минимизировать плату, а второй игрок — ее максимизировать. Другими словами, первый (второй) игрок минимизирует (максимизирует) значение целевого функционала.

Отметим, что величина

$$\omega = \inf_{\mathbf{u} \in P} \sup_{\mathbf{v} \in Q} \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sup_{\mathbf{v} \in Q} \inf_{\mathbf{u} \in P} \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

по определению это цена антагонистической игры. Пусть  $\forall(t, \mathbf{z}) \in G$  и  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ , где  $G = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ , имеет место для системы (1) равенство (2), значение которого обозначим через  $H(t, \mathbf{z}, \mathbf{s})$ . Величина  $H(t, \mathbf{z}, \mathbf{s})$  называется гамильтонианом управляемой системы (1).

Согласно результатам работы [2] существует единственная функция цены  $\omega(t, \mathbf{z})$  рассматриваемой ДИ, а в каждой точке  $(t, \mathbf{z}) \in G$ , в которой функция цены  $\omega: G \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема, она удовлетворяет основному уравнению Айзекса–Беллмана теории ДИ:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + H(t, \mathbf{z}, \nabla_{\mathbf{z}} \omega) = 0, \quad \omega(t_1, \mathbf{z}) = \varphi_0(\mathbf{z}), \quad (4)$$

с гамильтонианом  $H$  вида (2):

$$H(t, \mathbf{z}, \mathbf{s}) = \min_{\mathbf{u} \in P} \max_{\mathbf{v} \in Q} (\mathbf{s}, \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})) = \\ = \max_{\mathbf{v} \in Q} \min_{\mathbf{u} \in P} (\mathbf{s}, \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})),$$

где  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \nabla_{\mathbf{z}} \omega = (\partial \omega / \partial z_i), i = \overline{1, n}$  — градиент функции  $\omega$  по переменной  $\mathbf{z}$ ;  $\varphi_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — краевая функция. С учетом того, что функции  $H$  и  $\varphi_0$  непрерывно дифференцируемы дважды, имеем каноническую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{z}} = \nabla_{\mathbf{s}} H(t, \mathbf{z}, \mathbb{R}), \quad \dot{\mathbf{s}} = - \nabla_{\mathbf{z}} H(t, \mathbf{z}, \mathbf{s}).$$

Важно отметить, что в точках своей дифференцируемости функция цены  $\omega(t, \mathbf{z})$  данной ДИ совпадает с минимаксным решением основного уравнения (4), т. е. однородного уравнения Гамильтона–Якоби.

ДИ с интегрально-терминальным функционалом платы (3) отвечает неоднородное уравнение Гамильтона–Якоби со своей функцией цены, совпадающей с минимаксным решением этого уравнения. Возьмем объединенную функцию

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \varphi(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})),$$

где  $\mathbf{h}: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  удовлетворяет условиям 1–3 и равенству

$$\min_{\mathbf{u} \in P} \max_{\mathbf{v} \in Q} [(\mathbf{s}, \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})) + \varphi(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})] = \\ = \max_{\mathbf{v} \in Q} \min_{\mathbf{u} \in P} [(\mathbf{s}, \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})) + \varphi(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})] \quad (5)$$

для  $\forall(t, \mathbf{z}) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ , где ДИ определяется как объединение минимаксной и максиминной задач управления с гарантированным результатом.

Заметим, что функция цены  $\omega: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является минимаксным решением задачи Коши (4) для неоднородного уравнения Гамильтона–Якоби с гамильтонианом

$$H(t, \mathbf{z}, \mathbf{s}) = \min_{\mathbf{u} \in P} \max_{\mathbf{v} \in Q} [(\mathbf{s}, \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})) + \varphi(t, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})], \quad (6)$$

который удовлетворяет условиям 1–4 и равенству (5). Для ДИ с  $H(t, \mathbf{z}, \mathbf{s})$  (6) можно построить цену  $\omega(t_0, \mathbf{z}_0)$  и пару оптимальных стратегий  $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$ , образующих седловую точку.

### Абстрактный оптимальный анализ

Рассмотрим основы абстрактного метода в задаче на экстремум с дополнительными ограничениями [9, 10]. В настоящей работе используем абстрактный принцип максимума в теории антагонистических ДИ с учетом применения принципа оптимальности Беллмана. Основное преимущество абстрактного метода по сравнению с другими методами оптимизации заключается в единой схеме вывода условий оптимальности для различных задач, в том числе задач оптимального управления. Единообразие схемы вывода достигается при применении мощного аппарата функционального анализа, где условие оптимальности получено для задач общего вида:

$$J[x(\cdot), u(\cdot)]: J(x, u) \rightarrow \min, \quad F[x(\cdot), u(\cdot)] = 0,$$

где  $u(\cdot)$  — управление, которое удовлетворяет некоторым ограничениям  $F \in \mathbb{R}^k$ ;  $(x, u)$  — элементы линейных нормированных пространств.

Изучим задачу минимизации скалярного функционала  $J$  на множестве:

$$J(w) \rightarrow \min, \quad w \in D = \{w \in W: F(w) = 0\}, \quad (7)$$

где  $w = (x, u)$ ,  $x$  — состояние,  $u$  — управление,  $x \in \theta \subset X$ ,  $\theta$  — открытое подмножество банахова пространства  $X$ ,  $u \in U$  — метрическое допустимое пространство, образующие расширенное пространство  $W = \theta \times U$ . Пары  $w = (x, u) \in W$  назовем *процессами*, а пары, удовлетворяющие уравнению  $F(w) = 0$  — *допустимыми процессами*.

В соотношении (7) уравнение  $F(w) = 0$  — векторное,  $F(w) \in Y = \{y\} = \mathbb{R}^k$ ,  $Y$  — векторное пространство, а в общем случае  $Y$  — произвольное банахово пространство. Будем считать, что функции  $F(x, u)$ ,  $J(x, u)$  достаточно гладкие по  $x$ .

Введем вещественную функцию Лагранжа или лагранжиан задачи (7) в виде

$$L(w) = l^*F(w) + \lambda_0 J(w), \quad (8)$$

где  $w \in W$ ;  $l^* \in Y^*$ ;  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  — параметры. Здесь  $l^*$  — линейный ограниченный функционал на пространстве  $Y$ . Параметры  $l^*$  и  $\lambda_0$  называются *множителями Лагранжа*, а *допустимым набором множителей Лагранжа* — такие  $l^*$  и  $\lambda_0$ , для которых  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $\lambda_0 + \|l^*\| \neq 0$ .

Пусть  $w^0 \in W$  — некоторый заданный процесс, причем функции  $F(w)$  и  $J(w)$  из (7) в точке  $w^0$  имеют производную Гато по  $x$ :  $F'_x(w^0)$ ,  $J'_x(w^0)$ . Уравнение относительно множителей Лагранжа

$$L'_x(w^0) = 0 \quad (9)$$

называется *абстрактным сопряженным уравнением* задачи (7), которое можно записать в виде:

$$l^*F'_x(w^0) + \lambda_0 J'_x(w^0) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) линейное; оно имеет хотя бы одно нулевое решение  $l^* = 0, \lambda_0 = 0$ . Отметим, что ненулевых

решений может и не быть. Тем не менее, известно [9], что для оптимального процесса  $w^0$  абстрактное сопряженное уравнение обязательно имеет (в естественных предположениях) и ненулевое решение.

Допустим, что  $U$  — пространство всех кусочно-непрерывных функций  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , которые  $\forall t$  принимают значения в множестве  $\Omega$ :  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ . Пусть  $w^0 = [x^0, u^0(\cdot)]$  — оптимальный процесс. Выберем некоторый набор множителей Лагранжа. Будем считать, что для соответствующего лагранжиана справедливо представление

$$L[x^0, u(\cdot)] = \text{const} - \int_{t_0}^{t_1} H^0[t, u(t)] dt, \quad \forall u(\cdot) \in U, \quad (11)$$

где  $H^0(t, v)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $v \in \bar{\Omega}$  — вещественная функция замыкания множества  $\Omega$ , непрерывна по  $v$  и кусочно-непрерывна по  $t$ .

В таком случае для заданного набора множителей Лагранжа имеет место принцип максимума на процессе

$$w^0 = [x^0, u^0(\cdot)],$$

если

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_1] \quad H^0[t \pm 0, u^0(t \pm 0)] = \\ = \max_v \{H^0(t \pm 0, v): v \in \bar{\Omega}\}. \end{aligned} \quad (12)$$

В выражении (12) знак берется один и тот же, причем для  $t = t_0$  только «+», а для  $t = t_1$  только «-». В выражении (11) справа знак «-» взят для сохранения формулировки в виде «принципа максимума».

Допустим, что для оптимального состояния  $x^0$  лагранжиан  $L[x^0, u(\cdot)]$  имеет вид (11). Пусть  $(x^0, u^0)$  — точка локального минимума:  $J(x, u) \geq J(x^0, u^0)$ . Допустим уравнение  $F(x, u)$  разрешимо в окрестности  $x^0$  относительно  $x$ , а  $x_u$  — его решение, т. е.  $J(u) = J(x_u, u)$  для  $u$  достаточно близких к  $u^0$ :  $J(u) \geq J(u^0)$ ,  $\forall u \in U$ . Возьмем семейство кривых  $u(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , расположенных в  $U$  с общей вершиной в  $u^0$ . Предположим, что для любой кривой существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{J[u(\varepsilon)] - J(u^0)}{\varepsilon} = \delta J(u^0). \quad (13)$$

Тогда  $\delta J(u^0) \geq 0$ . Это условие локального минимума. Видно, что предел (13) есть односторонняя производная по  $\varepsilon$  сложной функции  $J(u) = J(x_u, u)$  для  $u = u(\varepsilon)$ .

Пусть  $L(x, u)$  определяется равенством (8). По процессу  $(x^0, u^0)$  такому, что  $F(x^0, u^0) = 0$ , составим абстрактное сопряженное уравнение (9). Предел (13) вычислим по формуле

$$\delta J(u^0) = \delta_u L(x^0, u^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{L[x^0, u(\varepsilon)] - L(x^0, u^0)}{\varepsilon},$$

откуда подобно уравнению (9) получим еще одно необходимое условие оптимальности:  $\delta_u L(x^0, u^0) \geq 0$ . При достаточно общих предположениях данное условие можно преобразовать [9] в условие максимума некоторой функции, которое называется *абстрактным принципом максимума*.

Необходимое условие  $\delta_u L(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \geq 0$  приобретает вид

$$H^0[t \pm 0, \mathbf{u}^0(t \pm 0)] \geq H^0(t \pm 0, \mathbf{v}),$$

где выражение  $\mathbf{u}^0(t \pm 0) \in \Omega$ , можно записать как соотношение (12). Оно называется *принципом максимума* и означает, что функция  $H^0(t \pm 0, \mathbf{v})$  при изменении  $\mathbf{v} \in \bar{\Omega}$  достигает максимума при  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^0(t \pm 0)$ . Если  $t$  — точка непрерывности функций  $\mathbf{u}^0(\cdot)$  и  $H^0(\cdot, \mathbf{v})$ , то равенство (12) принимает вид:

$$H^0[t, \mathbf{u}^0(t)] = \max_{\mathbf{v} \in \bar{\Omega}} \{H^0(t, \mathbf{v})\}. \quad (14)$$

Отметим, что принцип максимума (12), распространенный на более общий случай функций  $\mathbf{u}(t)$ ,  $H^0(t, \mathbf{v})$ , равносильно условию

$$L[\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0(\cdot)] = \min_{\mathbf{u} \in U} \{L[\mathbf{x}^0, \mathbf{u}(\cdot)]\}. \quad (15)$$

В свою очередь, условие (15) при наличии представления (11) равносильно интегральной форме принципа максимума:

$$\int_{t_0}^{t_1} H^0[t, \mathbf{u}^0(t)] dt = \max_{\mathbf{u} \in U} \int_{t_0}^{t_1} H^0[t, \mathbf{u}(t)] dt.$$

Приведем утверждение [9] о необходимых условиях оптимальности в задаче (7).

**Теорема 1.** Если  $\mathbf{w}^0 = (\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$  — локально оптимальный процесс в задаче (7), причем справедливы все условия, выдвинутые выше, то тогда существует допустимый набор множителей Лагранжа такой, что имеют место абстрактное сопряженное уравнение (9) и принцип максимума в смысле выполнения соотношений (11)–(14).

### Абстрактная дифференциальная игра

Требуется с помощью абстрактного принципа максимума единообразно минимаксную задачу теории ДИ представить в виде задачи оптимального управления в рамках беллмановской интерпретации и в терминах динамического программирования. Таким образом, требуется, используя абстрактное правило множителей Лагранжа, в рассматриваемой условной оптимизационной задаче получить необходимые условия оптимальности в равносильном для ДИ методе динамического программирования применительно к уравнениям Гамильтона–Якоби–Беллмана (Айзекса–Беллмана).

Пусть имеется ДИ с двумя антагонистическими игроками А и В. Будем считать, что эта игра с нулевой суммой, т. е. один игрок затрачивает столько, сколько другой приобретает. При выборе игроком А стратегии  $\mathbf{u} \in P$  в отсутствии информации о стратегии игрока В, игрок А должен исходить из того, что его соперник выберет для него наихудшую стратегию, а именно, что плата  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}): P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  игрока А будет равна

$\sup_{\mathbf{v} \in Q} \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Значит, игрок А должен использовать стратегию  $\mathbf{u}^0 \in P$ , при которой

$$\sup_{\mathbf{v} \in Q} \psi(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = \min_{\mathbf{u} \in P} \sup_{\mathbf{v} \in Q} \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (16)$$

С учетом того, что для игрока В плата равна —  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , получим из равенства (16), что игрок В должен применить такую стратегию  $\mathbf{v}^0 \in Q$ , для которой

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{u} \in P} \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0) &= \sup_{\mathbf{v} \in P} [-\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0)] = \\ &= \min_{\mathbf{v} \in Q} \sup_{\mathbf{u} \in P} [-\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})] = \max_{\mathbf{v} \in Q} \inf_{\mathbf{u} \in P} \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (17)$$

Из сравнения равенств (16) и (17) можно сделать следующий вывод: для наличия стратегий  $\mathbf{u}^0 \in P$ ,  $\mathbf{v}^0 \in Q$ , удовлетворяющих этим равенствам, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \mathbf{u} \in P, \mathbf{v} \in Q$  выполнялись неравенства

$$\psi(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) \leq \psi(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) \leq \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0). \quad (18)$$

В свою очередь, для выполнения неравенств (18) необходимо и достаточно, чтобы существовало равенство (имела место *седловая точка*)

$$\min_{\mathbf{u} \in P} \sup_{\mathbf{v} \in Q} \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \max_{\mathbf{v} \in Q} \inf_{\mathbf{u} \in P} \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (19)$$

В равенстве (19) общее значение каждой из двух частей определяется как значение игры, а каждая пара стратегий  $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$  из неравенств (18) является *решением игры*; при этом стратегии  $\mathbf{u}^0$  и  $\mathbf{v}^0$  называются *оптимальными стратегиями*.

Можно показать (например, работы [13, 14]), что если выполнены условия:

- 1)  $P$  и  $Q$  — выпуклые компактные множества в некоторых банаховых пространствах  $X$  и  $Y$ ;
- 2) функция  $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  непрерывна на  $P \times Q$ , выпукла относительно  $\mathbf{u}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in Q$  и вогнута относительно  $\mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{u} \in P$ , то тогда игра  $(P, Q, \psi)$  имеет решение, при котором справедливо равенство (19) с  $\min$  и  $\max$ .

Вернемся к интегрально-терминальному функционалу платы ДИ вида (3):

$$\begin{aligned} J[\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] &= \varphi_0[\mathbf{z}(t_0), \mathbf{z}(t_1)] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \varphi[t, \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)] dt \rightarrow \max_{\mathbf{v} \in Q} \min_{\mathbf{u} \in P} \end{aligned}$$

с заданной начальной позицией  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0)$ . При выполнении всех обозначенных выше условий перепишем эту максиминную задачу в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} J[\mathbf{z}(\cdot), \mathbf{u}, \mathbf{v}^0(\cdot)] &= \varphi_0[\mathbf{z}(t_0), \mathbf{z}(t_1)] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \varphi[t, \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}^0(t)] dt \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in P}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u} \in P} \int_{t_0}^{t_1} \varphi[t, \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}^0(t)] dt &= \\ = \max_{\mathbf{v} \in Q} \min_{\mathbf{u} \in P} \int_{t_0}^{t_1} \varphi[t, \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)] dt, \end{aligned} \quad (21)$$

т. е.  $\mathbf{v}^0(t)$  — оптимальная стратегия игрока В с учетом справедливости (17) и допустимости наличия седловой точки у рассматриваемой ДИ.

Покажем, как из абстрактного принципа максимума, выполнения условий теоремы 1 для оптимизационной

задачи вида (1), (20) и (21) следует выполнение основных положений метода Беллмана применительно к данной задаче ДИ при фиксированных концах промежутка времени.

Допустим, что выполнены все ранее введенные предположения относительно величин, участвующих в этих соотношениях. Следует указать на оптимальный процесс  $[z^0(\cdot), u^0(\cdot), v^0(\cdot)]$ , при котором функционал  $J(20), (21)$  будет принимать минимальное по  $u \in P$  значение.

Для этого перейдем к поиску необходимых условий оптимальности в задаче (1), (20), (21) в терминах динамического программирования. Требуется перевести систему (1) из точки  $z(t_0)$  фазового пространства  $X \times Y = Z$  в заданную точку  $z(t_1) \in Z$ , где конечный момент времени  $t_1$  задан. При этом управление  $u = u(t)$  должно удовлетворять ограничению  $u \in P$  при выбранном  $v^0 \in Q$ . Нахождение управления  $u(t)$  в данном случае происходит при условии, чтобы функционал  $J(20), (21)$  принимал наименьшее возможное значение. Тогда совокупное управление  $(u(t), v^0(t)) = (u^0(t), v^0(t))$  и соответствующая ему траектория  $z(t)$  будут оптимальными.

Воспользуемся абстрактной схемой. Пусть имеется абстрактная задача оптимизации с уравнением (1) при  $v(t) = v^0(t)$  и функционалом (20), (21):

$$J(z, u, v^0) \rightarrow \min, \\ m(t) = F(t, z, u, v^0) \equiv \dot{z}(t) - f(t, z, u, v^0),$$

где функция  $m = F(t, z, u, v^0) \in M = \{m\} \subset \mathbb{R}^n$ . Лагранжиан имеет вид

$$L = l^*F(t, z, u, v^0) + \lambda_0 J(z, u, v^0),$$

где  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  — число;  $l^* \in M^*$  — линейный ограниченный функционал на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , представляющий собой вещественную скалярную величину:  $l^*m = \int_{t_0}^{t_1} \Psi^*(t)m(t)dt$  с вектор-функцией  $\Psi(t) \in \mathbb{R}^n$ . Подставляя это значение, получим выражение для лагранжиана

$$L[z(\cdot), u(\cdot), v^0(\cdot)] = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \Psi^*(t)(\dot{z}(t) - f[t, z(t), u(t), v^0(t)])dt + \\ + \lambda_0(\varphi_0[z(t_0), z(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} \varphi[t, z(t), u(t), v^0(t)]dt). \quad (22)$$

Введем в рассмотрение вещественные функции:

$$H(t, \Psi, z, u, v^0) = \Psi^*f(t, z, u, v^0) - \lambda_0\varphi(t, z, u, v^0), \\ G[z(t_0), z(t_1)] = \lambda_0\varphi_0[z(t_0), z(t_1)],$$

где  $\Psi \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n, u \in P, v^0 \in Q, t \in [t_0, t_1]$ . Тогда запишем лагранжиан (22) в виде:

$$L[z(\cdot), u(\cdot), v^0(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} \Psi^*(t)(\dot{z}(t)dt + G[z(t_0), z(t_1)] - \\ - \int_{t_0}^{t_1} H[t, \Psi(t), z(t), u(t), v^0(t)]dt.$$

Отметим, что при подстановке в последнее соотношение  $z = z^0$  лагранжиан  $L[z^0(\cdot), u(\cdot), v^0(\cdot)]$  удовлетворяет формуле (11).

### Уравнения Гамильтона–Якоби и Айзекса–Беллмана

Выполним, с помощью использования абстрактной схемы поиск необходимых условий оптимальности ДИ в терминах задачи динамического программирования. Условия сформулируем в виде оптимизационного уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана [2, 15, 16].

Если в функционале  $J(20), (21)$  оставить только интегральную часть, то получим аналог действия по Гамильтону. Отметим, что в аналитической динамике функция Гамильтона (гамильтониан) определяется с помощью интеграла действия для истинных траекторий движения системы при переменном пределе интегрирования, который имеет вид

$$J_u = -\varphi_0[z(t_1)] - \int_t^{t_1} L_u dt,$$

где  $L_u(\cdot)$  — лагранжиан, имеющий в задаче оптимального управления применительно к рассматриваемой задаче ДИ следующую форму:

$$L_u = \Psi^* \{ \dot{z} - f[t, z, u, v^0] \} + \lambda_0 \varphi[t, z, u, v^0], \quad (23)$$

где  $\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)$  — сопряженные переменные;  $\lambda_0 > 0, v^0(t)$  — оптимальное управление игрока В согласно формуле (21).

Лагранжиан  $L_u(23)$  отличается от лагранжиана  $L(22)$  интегралом от правой части, слагаемым  $\lambda_0\varphi_0$  и фиксацией промежутка  $[t_0, t_1]$ :  $L = \int_{t_0}^{t_1} L_u(\cdot)dt$ . Слагаемое  $\lambda_0\varphi_0$  можно отнести к лагранжиану  $L_u(\cdot)$ . Тогда получим (после подстановки  $z(\cdot) = z^0(\cdot)$ ):

$$L[z^0, u, v^0] = \int_{t_0}^{t_1} \Psi^*(t)\dot{z}^0(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} H[t, \Psi(t), z^0(t), u(t), v^0(t)]dt$$

или

$$L[z^0, u, v^0] = \text{const} - \int_{t_0}^{t_1} H^0(t, u, v^0)dt.$$

Согласно принципу оптимальности Беллмана оптимальное управление  $u^0(t)$  доставляет действию —

$$J_u = \varphi_0[z(t_1)] + \int_t^{t_1} L_u(\cdot)d\tau$$

минимальное значение. Введем обозначение для функции действия  $S(t, z)$ , которую часто называют *главной функцией Гамильтона* в задаче оптимального управления, по формуле

$$S = -\varphi_0[z(t_1)] - \min_{u \in P} \int_t^{t_1} L_u[\tau, z, \dot{z}, u, v^0]d\tau = \\ = -\varphi_0[z(t_1)] - \int_t^{t_1} \min_{u \in P} L_u[\tau, z, \dot{z}, u, v^0]d\tau = \\ = -\varphi_0[z(t_1)] + \int_{t_1}^t L^*d\tau, \quad (24)$$

где  $L^* \equiv \min_{\mathbf{u} \in P} L_{\mathbf{u}}$ . Обратим внимание, что в (24) интегрирование выполнено вдоль истинной (оптимальной) траектории движения между точками  $(t, \mathbf{z})$  и  $(t_1, \mathbf{z}(t_1))$ .

Важно также иметь в виду, что если зафиксировать  $t$  и  $\mathbf{z}$  в соотношениях (24), то тогда в правой части выражения (24) получим интеграл действия  $J_{\mathbf{u}}$  на оптимальной траектории с начальным условием  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}$ . При этом истинная траектория, согласно вариационному интегральному принципу Гамильтона, является экстремалью действия, а точнее, экстремалью правой части выражения (24). Отсюда следует, что истинная траектория должна являться решением как исходных динамических уравнений (1) при выбранном  $\mathbf{v}^0(t)$  так и уравнений Эйлера (Эйлера–Лагранжа — для функционала действия по Гамильтону):

$$\frac{\partial L^*}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (25)$$

где  $z_i$  — компоненты вектора  $\mathbf{z}$ .

Обозначим вектор обобщенных импульсов  $\Psi = (\Psi_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , в виде:  $\Psi_i(t, \mathbf{z}) = \partial L^* / \partial \dot{z}_i$ . Тогда уравнения (25) дают сопряженную систему задачи оптимального управления

$$\dot{\Psi}_i = \frac{\partial L^*}{\partial z_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (26)$$

где лагранжиан  $L^*$  берется в форме, определяемой соотношением (23). При этом совокупность уравнений (1), (26) образует гамильтонову систему уравнений.

Проварьируем траекторию движения и функцию  $S$  (24) по фазовым переменным с фиксированными значениями  $t$  и  $t_1$ . Будем иметь

$$\delta S = \int_{t_1}^t \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial z_i} \delta z_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}_i} \delta \dot{z}_i \right) dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_i} [z(t_1)] \delta z_i(t_1).$$

При допущении перестановочности операций дифференцирования по времени и варьирования:  $\delta \dot{z}_i = d(\delta z_i) / dt$  получим

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^t \left( \frac{\partial L^*}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}_i} \right) \delta z_i dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \Big|_{t_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_i} \delta z_i(t_1). \quad (27)$$

Учитывая уравнения Эйлера–Лагранжа (25) и выражения для обобщенных импульсов, запишем вариацию функции действия (27) в виде:

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) \delta z_i(t) - \sum_{i=1}^n \left( \Psi_i(t_1) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_i} [z(t_1)] \right) \delta z_i(t_1).$$

Отсюда найдем зависимость  $\Psi_i$  через градиент главной функции Гамильтона  $S(t, \mathbf{z})$  включая граничные условия для  $\Psi_i$  при  $t = t_1$ ,  $i = \overline{1, n}$ :

$$\Psi_i = \frac{\partial S}{\partial z_i}, \quad \Psi_i(t_1) = - \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_i} \Big|_{t=t_1}. \quad (28)$$

В результате можно сделать заключение о потенциальности векторного поля импульсов  $\Psi = \Psi(t, \mathbf{z})$  с потенциалом в виде функции действия  $S(t, \mathbf{z})$ .

Найдем из выражения (24):

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial z_i} \dot{z}_i = L^*. \quad (29)$$

Воспользуемся классическим определением функции Гамильтона и обобщенных импульсов (28). Тогда можем записать

$$H = \sum_{i=1}^n \Psi_i \dot{z}_i - L^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial z_i} \dot{z}_i - L^* = \min_{\mathbf{u} \in P} (-\Psi^* \mathbf{f} + \lambda_0 \varphi). \quad (30)$$

Соотношение (29) в этом случае преобразуется в уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( t, \mathbf{z}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0 \quad (31)$$

с решением  $S(t, \mathbf{z})$ , которое должно удовлетворять краевому условию, вытекающему из соотношения (24) при  $\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}$ ,  $t = t_1$ :  $S(t_1, \mathbf{z}) = -\varphi_0(\mathbf{z})$ .

Обозначим в соотношении (30) функцию  $\Pi = \sum_{i=1}^n \Psi_i f_i - \lambda_0 \varphi$ , совпадающую с гамильтонианом и которую часто называют *функцией Понтрягина*. Тогда, очевидно, функцию Гамильтона  $H$  (30) возможно связать с функцией Понтрягина  $\Pi$  равенством:  $H = \max_{\mathbf{u} \in P} \Pi$ . Таким образом, уравнение (31) перепишем через функцию  $\Pi$  следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{\mathbf{u} \in P} \Pi \left( t, \mathbf{z}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0. \quad (32)$$

На основании выражений (31) и (32) следует, что соотношение  $H = \max_{\mathbf{u} \in P} \Pi$  представляет собой еще один вариант записи принципа максимума Понтрягина.

Если учесть формулы (28), то тогда при  $\lambda_0 = 1$  функция Понтрягина:  $\Pi = \sum_{i=1}^n (\partial S / \partial z_i) f_i - \varphi$ , а уравнение (32) примет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{\mathbf{u} \in P} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial z_i} f_i - \varphi \right) = 0.$$

Заметим, что в теории оптимального управления, касающегося метода динамического программирования, вместо главной функции Гамильтона (функции действия)  $S(t, \mathbf{z})$  рассматривают функцию Беллмана (в рассматриваемом случае применительно к теории ДИ, функцию Айзекса–Беллмана)  $V(t, \mathbf{z})$ , которая определяется минимумом функционала  $J$  (20) при  $\tau \in [t, t_1]$  по  $\mathbf{u} \in P$ , начиная от точки  $\mathbf{z}(t)$ :

$$V = \varphi_0[\mathbf{z}(t_1)] + \min_{\mathbf{u} \in P} \int_t^{t_1} \varphi d\tau.$$

Лагранжиан  $L_{\mathbf{u}}$  (23) на траекториях системы (1), когда  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^0(t)$ , в этом случае имеет вид (при  $\lambda_0 = 1$ ):  $L_{\mathbf{u}} = \varphi$ . Тогда выражение (24) для главной функции  $S$  преобразуется в равенство

$$S = -\varphi_0[\mathbf{z}(t_1)] - \min_{\mathbf{u} \in P} \int_t^{t_1} \varphi dt.$$

В результате получим, что  $S = -V$  и уравнение Гамильтона–Якоби для задачи оптимального управления (1), (20) принимает форму уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (Айзекса–Беллмана), а в случае теории ДИ — форму основного уравнения ДИ в виде уравнения Айзекса–Беллмана

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\mathbf{u} \in P} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial z_i} f_i + \varphi \right) = 0 \quad (33)$$

с краевым условием:  $V(t_1, \mathbf{z}) = \varphi_0(\mathbf{z})$ .

Сформулируем теперь с помощью представленных соотношений правило множителей Лагранжа в рассматриваемой условной оптимизационной задаче.

**Теорема 2.** Пусть непрерывный процесс  $[\mathbf{z}^0(t), \mathbf{u}^0(t), \mathbf{v}^0(t)]$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  удовлетворяющий соотношениям (1), (20), (21), доставляет максимум значение функционалу  $J$  (20). Полагаем при этом, что в задаче (1), (20), (21) величины  $\mathbf{f}(\cdot)$ ,  $\varphi(\cdot)$  являются непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам. Тогда найдутся  $n$  измеримых и ограниченных множителей Лагранжа (обобщенных импульсов)  $\mathbf{I}(t) = \Psi(t) \in \mathbb{R}^n$  и такая постоянная  $\lambda_0 > 0$ , где  $\lambda_0 + \sum_{i=1}^n |I_i(t)| > 0$ , что функции  $H(\cdot)$ ,  $L_{\mathbf{u}}(\cdot)$  (23) с учетом соотношений (26)–(30) удовлетворяют в терминах главной функции Гамильтона  $S(t, \mathbf{z})$  уравнению Гамильтона–Якоби (31), а в терминах функции Беллмана  $V(t, \mathbf{z}) = -S(t, \mathbf{z})$  при  $\lambda_0 = 1$  — уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана или, иначе, уравнению Айзекса–Беллмана (33).

### Модельный пример

Для иллюстрации рассмотрим простейший пример компенсации активных возмущений. В терминах теории ДИ первый игрок будет стремиться привести систему к нулевому положению, а второй — препятствует этому.

Пусть движение системы описывается скалярным уравнением:

$$\dot{x} = u - v, \quad x(t_0) = x_0,$$

где  $x \in \mathbb{R}$  — отклонение системы от нуля;  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  — заданное начальное положение;  $u \in P$  и  $v \in Q$  — управления первого и второго игроков,  $P, Q$  — компактные множества допустимых значений:

$$P = \{u \in \mathbb{R}: |u| \leq 1\}, \quad Q = \{v \in \mathbb{R}: |v| \leq \beta\},$$

где  $\beta$  — параметр, задающий ограничение на управление второго игрока, удовлетворяющий условию  $0 < \beta < 1$ . Последнее неравенство показывает, что ресурс первого игрока мощнее.

Первый игрок ( $u$ ) хочет минимизировать квадрат отклонения системы от нуля, второй ( $v$ ) — максимизировать. Введем функционал (20):

$$J = \int_{t_0}^{t_1} x^2(t) dt \rightarrow \min_{u \in P} \max_{v \in Q}.$$

Составим гамильтониан  $H$ :

$$H(x, \psi, u, v) = \psi(u - v) - \lambda_0 x^2,$$

где  $\psi$  — сопряженная переменная (импульс);  $\lambda_0 = 1$ .

Воспользуемся алгоритмической схемой, описанной в разделе «Уравнения Гамильтона–Якоби и Айзекса–Беллмана». Получим для сопряженного уравнения:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2x.$$

Согласно абстрактному принципу максимума, оптимальные управления  $u^0, v^0$  находятся из условия седловой точки гамильтониана:

$$H(u^0, v^0) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} (\psi u - \psi v - x^2).$$

Поскольку переменные разделяются, рассмотрим две простейшие задачи на условный экстремум.

1. Для первого игрока: найдем  $\min(\psi u)$ . Очевидно, что если  $\psi > 0$ , то выгодно взять  $u = -1$ , а если  $\psi < 0$ , то  $u = +1$ :

$$u^0(t) = -\text{sign}(\psi(t)).$$

2. Для второго игрока: найдем  $\max(-\psi v) = \min(\psi v)$ . Аналогично:

$$v^0(t) = -\beta \text{sign}(\psi(t)).$$

Подставим управления в исходное уравнение:

$$\dot{x} = -\text{sign}(\psi) - (-\beta \text{sign}(\psi)) = -(1 - \beta)\text{sign}(\psi).$$

Так как  $1 > \beta$ , система управляема.

Повторно продифференцируем уравнение  $\dot{\psi} = 2x$ :

$$\ddot{\psi} = 2\dot{x} = -2(1 - \beta)\text{sign}(\psi).$$

Полученное уравнение является уравнением осциллятора с сухим трением. Представленное решение показывает, что система будет стремиться к нулю ( $x \rightarrow 0$ ) колебательным образом с конечным числом переключений.

### Заключение

Представлена процедура применения абстрактного принципа максимума к максиминной задаче теории дифференциальных игр для беллмановской интерпретации в терминах динамического программирования. Показано, как из абстрактного принципа следует выполнение основных положений оптимизационного метода Беллмана в случае исследуемой задачи дифференциальных игр. Определены необходимые и достаточные условия оптимальности в виде уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (Айзекса–Беллмана) и, тем самым, задана новая форма основного уравнения в теории дифференциальных игр и соответствующего ему решения.

Литература

References

1. Субботин А.И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Доклады Академии наук СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 293–297.
2. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991. 214 с.
3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Berkovitz L.D. Characterizations of the values of differential games // Applied Mathematics and Optimization. 1988. V. 17. N 2. P. 177–183. doi: 10.1007/BF01448365
6. Evans L.C., Souganidis P.E. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations // Indiana University Mathematics Journal. 1984. V. 33. N 5. P. 773–797. doi: 10.1512/iumj.1984.33.33040
7. Никитин Ф.Ф., Чистяков С.В. Теорема существования и единственности решения обобщенного уравнения Айзекса-Беллмана // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 6. С. 743–752.
8. Игровые задачи управления // Труды Института математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1977. № 24.
9. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2003. 537 с.
10. Тертычный-Даури В.Ю. Полимех. Т. 2. Механические эссе. М.: Физматлит, 2021. 584 с.
11. Тертычный-Даури В.Ю. Интегральные и интегродифференциальные объекты управления: условия оптимальности // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 45–74.
12. Бабушкин М.В., Тертычный-Даури В.Ю. Вариационные методы решения задач, связанных с искусственным интеллектом // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 7. С. 919–932. doi: 10.31857/S0374064123070063
13. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
14. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 383 с.
15. Богатырев А.В. Управляемые системы и обобщенные уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 40–48.
16. Vinter R.B., Wolenski P. Hamilton-Jacobi theory for optimal control problems with data measurable in time // SIAM Journal on Control and Optimization. 1990. V. 28. N 6. P. 1404–1419. doi: 10.1137/0328073

1. Subbotin A.I. Generalization of the fundamental equation of the differential game theory. *Transactions (Doklady) of the USSR Academy of Sciences*, 1980, vol. 254, no. 2, pp. 293–297. (in Russian)
2. Subbotin A.I. *Minimax Inequalities and Hamilton-Jacobi Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1991, 214 p. (in Russian)
3. Isaacs R. *Differential Games: a Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. Wiley, 1965, 384 p.
4. Krasovsky N.N., Subbotin A.I. *Positional Differential Games*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (in Russian)
5. Berkovitz L.D. Characterizations of the values of differential games. *Applied Mathematics and Optimization*, 1988, vol. 17, no. 2, pp. 177–183. doi: 10.1007/BF01448365
6. Evans L.C., Souganidis P.E. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 1984, vol. 33, no. 5, pp. 773–797. doi: 10.1512/iumj.1984.33.33040
7. Nikitin F.F., Chistyakov S.V. Existence and uniqueness theorem for a generalized Isaacs-Bellman equations. *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 6, pp. 757–766. doi: 10.1134/s0012266107060031
8. Game control problems. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, 1977, no. 24. (in Russian)
9. Matveev A.S., Yakubovich V.A. *Optimal Control Systems: Ordinary Differential Equations. Special Problems*. St. Petersburg, SPbU Publ., 2003, 537 p. (in Russian)
10. Tertychnyi-Dauri V.Y. Polymech. *Mechanical Essays*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2021, 584 p. (in Russian)
11. Tertychnyi-Dauri V.Y. Integral and integro-differential control plants: Optimality conditions. *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 10, pp. 1635–1661. doi: 10.1134/s0005117909100051
12. Babushkin M.V., Tertychnyi-Dauri V.Yu. Variational methods for solving problems associated with artificial intelligence. *Differential Equations*, 2023, vol. 59, no. 7, pp. 919–932. doi: 10.1134/S0012266123070066
13. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional Analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1977, 741 p. (in Russian)
14. Germeier Yu.B. *Introduction to Operations Research Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1971, 383 p. (in Russian)
15. Bogatyrev A.V. Control systems and generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no. 9, pp. 1335–1343.
16. Vinter R.B., Wolenski P. Hamilton-Jacobi theory for optimal control problems with data measurable in time. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1990, vol. 28, no. 6, pp. 1404–1419. doi: 10.1137/0328073

Авторы

Authors

**Ведяков Алексей Алексеевич** — кандидат технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 49664023200](https://orcid.org/0000-0003-4336-1220), <https://orcid.org/0000-0003-4336-1220>, [vedyakov@itmo.ru](mailto:vedyakov@itmo.ru)

**Ведякова Анастасия Олеговна** — кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, [sc 56405507900](https://orcid.org/0000-0003-0865-3578), <https://orcid.org/0000-0003-0865-3578>, [a.vedyakova@spbu.ru](mailto:a.vedyakova@spbu.ru)

**Слита Ольга Валерьевна** — кандидат технических наук, доцент, научный сотрудник, Технион — Израильский технологический институт, Хайфа, 3200003, Израиль, [sc 16242570700](https://orcid.org/0000-0001-7119-3629), <https://orcid.org/0000-0001-7119-3629>, [o-slita@yandex.ru](mailto:o-slita@yandex.ru)

**Тертычный-Даури Владимир Юрьевич** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 8980267000](https://orcid.org/0000-0003-4671-7659), <https://orcid.org/0000-0003-4671-7659>, [tertychny-dauri@mail.ru](mailto:tertychny-dauri@mail.ru)

**Alexey A. Vedyakov** — PhD, Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 49664023200](https://orcid.org/0000-0003-4336-1220), <https://orcid.org/0000-0003-4336-1220>, [vedyakov@itmo.ru](mailto:vedyakov@itmo.ru)

**Anastasia O. Vedyakova** — PhD (Physics & Mathematics), Associate Professor, St. Petersburg State University (SPbSU), Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, [sc 56405507900](https://orcid.org/0000-0003-0865-3578), <https://orcid.org/0000-0003-0865-3578>, [a.vedyakova@spbu.ru](mailto:a.vedyakova@spbu.ru)

**Olga V. Slita** — PhD, Associate Professor, Scientific Researcher, Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, 3200003, Israel, [sc 16242570700](https://orcid.org/0000-0001-7119-3629), <https://orcid.org/0000-0001-7119-3629>, [o-slita@yandex.ru](mailto:o-slita@yandex.ru)

**Vladimir Yu. Tertychnyi-Dauri** — D.Sc. (Physics & Mathematics), Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 8980267000](https://orcid.org/0000-0003-4671-7659), <https://orcid.org/0000-0003-4671-7659>, [tertychny-dauri@mail.ru](mailto:tertychny-dauri@mail.ru)

Статья поступила в редакцию 30.03.2026  
 Одобрена после рецензирования 30.04.2026  
 Принята к печати 23.05.2026

Received 30.03.2026  
 Approved after reviewing 30.04.2026  
 Accepted 23.05.2026



Работа доступна по лицензии  
 Creative Commons  
 «Attribution-NonCommercial»