

doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-4-739-752

УДК 537.86; 535.55

Исследование динамических фотоупругих свойств монокристаллического ниобата лития: разработка модели, моделирование и эксперимент

Алексей Юрьевич Гришенцев¹✉, Владимир Александрович Матвеев²,
Вячеслав Александрович Горошков³, Игорь Владимирович Герасимов⁴, Вэньлун И⁵,
Константин Владимирович Дукельский⁶

^{1,2,3} Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

⁴ Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, 197022, Российская Федерация

⁵ Цзяньсийский аграрный университет, Наньчан, 330045, Китай

⁶ АО «Научно-производственное объединение Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова», Санкт-Петербург, 192171, Российская Федерация

¹ AGrishentsev@yandex.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>

² Stellar13@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0004-0681-1792>

³ gorosvia@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9950-5778>

⁴ ivgerasimov-45@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0965-1438>

⁵ yiwenlong@jxau.edu.cn, <https://orcid.org/0000-0002-9266-3498>

⁶ kdukel@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1627-7499>

Аннотация

Введение. Развитие вычислительных систем позволяет производить моделирование относительно сложных физических процессов, для последующего применения результатов моделирования в научных исследованиях и технологических процессах. Представлены результаты разработки модели, методов моделирования и натурного эксперимента, а также применение разработок для исследования некоторых линейных и нелинейных динамических фотоупругих свойств прозрачных пьезокристаллов на примере ниобата лития. **Метод.** Разработана математическая модель и экспериментальная установка для изучения линейных и нелинейных динамических фотоупругих и электрооптических свойств пьезокристаллов. Произведены натурные эксперименты. Предложен метод эксперимента на основе совместного измерения и последующей обработки тока, напряжения и интенсивности поляризационно-фазовой модуляции за счет динамической фотоупругости, что особенно ценно для изучения нелинейных явлений. Разработанная модель за счет учета пространственной дисперсии и диссипации волновой энергии позволяет с высокой точностью моделировать оптический эффект — динамическое вращение поляризации, т. е. динамическую фотоупругость. Сопоставление результатов моделирования с данными эксперимента на основе анализа позволяет сделать вывод о соответствии результатов моделирования экспериментальным данным и возможности применения математической модели для решения системных задач, связанных с исследованием оптических свойств возмущенных пьезокристаллов. **Основные результаты.** Разработанная модель позволяет определить распределение упругих деформаций кристаллического объекта при пьезовозмущении; идентифицировать резонансные частоты, тип и порядок волновых мод; для произвольных траекторий распространения оптического излучения определить углы вращения поляризации при динамической фотоупругости. Результаты эксперимента позволяют выполнить картирование распределения внутри кристалла (электрического поля, деформаций типа растяжение/сжатие и сдвиг, коэффициентов преломления) и расчет конверсии волновой энергии оптических мод. **Обсуждение.** Практическая значимость проведенного исследования заключается в разработанной математической модели и порядка проведения эксперимента для регистрации линейных и нелинейных эффектов динамической фотоупругости пьезокристаллов. Результаты работы могут быть полезны в задачах научного и практического назначения, например, при исследовании и проектировании акустооптических модуляторов, разработке и устройстве и систем обращения волнового фронта на нелинейных кристаллах, построении различных датчиков и др.

© Гришенцев А.Ю., Матвеев В.А., Горошков В.А., Герасимов И.В., И Вэньлун, Дукельский К.В., 2026

Ключевые слова

пьезоэлектрический эффект, гиротропия, фотоупругость, эффект Поккельса, математическое моделирование, эксперимент, ниобат лития

Благодарности

Авторы выражают благодарность способствовавшим исследованиям сотрудникам и коллегам факультета БИТ Университета ИТМО и АО «НИИ телевидения».

Ссылка для цитирования: Гришенцев А.Ю., Матвеев В.А., Горошков В.А., Герасимов И.В., И Вэнльун, Дукельский К.В. Исследование динамических фотоупругих свойств монокристаллического ниобата лития: разработка модели, моделирование и эксперимент // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2026. Т. 26, № 4. С. 739–752. doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-4-739-752

Investigation of dynamic photoelastic properties of monocrystalline lithium niobate: model development, simulation and experiment

Alexey Yu. Grishentsev¹✉, Vladimir A. Matveev², Vyacheslav A. Goroshkov³, Igor V. Gerasimov⁴, Wenlong Yi⁵, Konstantin V. Dukelsky⁶

^{1,2,3} ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

⁴ Saint Petersburg Electrotechnical University “LETI”, 197022, Russian Federation

⁵ Jiangxi Agricultural University, Nanchang, 330045, China

⁶ JSC “Research and Production Corporation S.I. Vavilova”, 192171, Russian Federation

¹ AGrishentsev@yandex.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>

² Stellar13@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0004-0681-1792>

³ gorosvia@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9950-5778>

⁴ ivgerasimov-45@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0965-1438>

⁵ yiwenlong@jxau.edu.cn, <https://orcid.org/0000-0002-9266-3498>

⁶ kdukel@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1627-7499>

Abstract

Advances in computing systems make it possible to simulate relatively complex physical processes for the subsequent application of simulation results in scientific research and technological processes. The paper presents the results of the development of a model, simulation methods, and a full-scale experiment, as well as the application of these developments to the study of certain linear and nonlinear dynamic photoelastic properties of transparent piezocrystals, using lithium niobate as an example. A mathematical model and an experimental setup were developed to study the linear and nonlinear dynamic photoelastic and electro-optical properties of piezocrystals. Full-scale experiments were carried out. An experimental method based on simultaneous measurement and subsequent processing of current, voltage, and intensity of polarization-phase modulation due to dynamic photoelasticity was proposed, which is especially valuable for studying nonlinear phenomena. By taking into account the spatial dispersion and dissipation of wave energy, the developed model makes it possible to simulate the optical effect with high accuracy — dynamic rotation of polarization, i.e., dynamic photoelasticity. A comparison of the simulation results with experimental data, based on analysis, allows us to conclude that the simulation results are consistent with the experimental data and that the mathematical model can be used to solve systemic problems related to the study of the optical properties of perturbed piezocrystals. The developed model makes it possible to determine the distribution of elastic deformations of a crystalline object under piezoelectric disturbance; to identify resonant frequencies, the type and order of wave modes; to determine the rotation angles of polarization for dynamic photoelasticity for arbitrary optical radiation propagation trajectories. The experimental results will make it possible to map the distribution inside the crystal (electric field, strain such as stretching/compression and shear, refractive coefficients) and calculate the conversion of wave energy of optical modes. The practical significance of the research lies in the developed mathematical model and experimental procedure for recording linear and nonlinear effects of dynamic photoelasticity of piezo crystals. The results of the work can be useful in scientific and practical tasks, for example, in the research and design of acousto-optical modulators, the development of devices and systems for wavefront reversal on nonlinear crystals, the construction of various sensors, etc.

Keywords

piezoelectric effect, gyrotropy, photoelasticity, Pockels effect, mathematical modeling, experiment, lithium niobate

Acknowledgements

The authors express their gratitude to the staff and colleagues of the Faculty of BIT at ITMO University and JSC “Research Institute of Television” who contributed to the research.

For citation: Grishentsev A.Yu., Matveev V.A., Goroshkov V.A., Gerasimov I.V., Yi Wenlong, Dukelsky K.V. Investigation of dynamic photoelastic properties of monocrystalline lithium niobate: model development, simulation and experiment. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2026, vol. 26, no. 4, pp. 739–752 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2026-26-4-739-752

Введение

Пьезооптические эффекты являются одним из видов явлений акустооптических, возможность которых впервые была предсказана Л.Н. Бриллюэном в 1922 году [1] и экспериментально подтверждена в 1932 году П.Й.В. Дебаем, Ф.У. Сирсом и другими физиками. Известно, что ниобат лития (LiNbO_3) являясь сегнетоэлектриком, обладает свойствами пьезоэлектрика [2] и проявляет эффект Поккельса [3] и гиротропии. Ниобат лития имеет широкий диапазон прозрачности ($\approx 0,25\text{--}5,3$ мкм) в том числе в видимом диапазоне, свойство генерации второй гармоники (из 1064 нм в 532 нм), характерное для ниобата лития, применяют в оптических системах умножения частоты. Следует отметить, что проявление нелинейнооптических, пьезоакустических и фотоиндуцированных свойств в ниобате лития значительно превосходит их проявление во многих других нелинейных кристаллах [4]. При этом ниобат лития хорошо обрабатывается, не токсичен и не растворим в воде, а технология его производства, в основе которой модифицированный метод Я. Чахральского [5], достаточно совершенна, для получения легированного и чистого монокристаллического, монокристаллического вещества. Синтез тонких пленок ниобата лития осуществляется методом металлоорганического осаждения из паровой фазы. Свойства ниобата лития наиболее активно используют для производства: оптических волноводов; оптических затворов; электрооптических модуляторов типа Маха-Цандера; акусто- и пьезооптических модуляторов; умножителей частоты оптического излучения; параметрических усилителей, осцилляторов и др. Таким образом, благодаря высокой технологичности при получении и обработке; универсальности спектра применения, исследование свойств ниобата лития вызывает значительный интерес со стороны ученых и тружеников производства [6].

В настоящей публикации представлены результаты разработки и совершенствования математической модели динамических фотоупругих и электрооптических свойств пьезокристаллов и ее сравнительная апробация на основе экспериментов с монокристаллическим ниобатом лития.

Математическая модель и концепция построения датчика

При размещении кристалла ниобата лития во внешнем электрическом поле в результате наличия пьезоэффекта происходит его деформация типа: растяжение/сжатие и как следствие изгиб; сдвиговая деформация; при некоторых формах и частотах действующего внешнего поля проявляется кручение. Волновые возмущения могут иметь нелинейный характер, в том числе с образованием поверхностных акустических волн, которые впервые были исследованы Ю.В. Гуляевым [7]. Колебательные процессы кристаллической решетки, в том числе нелинейное взаимодействие искусственно возбуждаемых упругих волн [8], можно интерпретировать как результат фонон-фононного взаимодействия [9]. Многочисленные эксперименты исследований рас-

пространения ультра- и гиперзвуковых волн в твердых телах подтверждает проявление нелинейных эффектов в виде: комбинационного рассеяния звука на звуке; генерации высших гармоник; образование нелинейного акустического резонанса и пр. В работе [9] доказано, что использование резонансных колебаний является очень чувствительным методом выделения нелинейных эффектов. На резонансных частотах пьезоотклик значительно возрастает, а сами резонансные частоты и их пространственные моды будут зависеть от размеров и формы кристалла с учетом ориентации собственных осей, а также от наличия и формы дислокаций, доменной структуры кристалла и возникающего внутри пьезокристалла, вследствие неоднородностей деформации, разделения зарядов [10]. Флуктуации форм ячеек кристаллической решетки и электронно-ионная поляризация, возникающие в результате деформации, приводят к изменению показателей преломления, т. е. происходит поворот и растяжение эллипсоида индикатрисы показателя преломления что называется фотоупругостью. Учитывая неоднородность пьезодеформаций по объему кристалла, и пространственное распространение бегущих акустических волн во времени, правильнее говорить о локальном, в кристаллическом теле, повороте и растяжении эллипсоида индикатрисы показателя преломления, т. е. динамической фотоупругости (фотоэластичности). В кристалле, подвергнутом пьезодеформациям, кроме изменения показателя преломления, наблюдаются следующие деформационные эффекты, влияющие на распространение оптических волн: растяжение/сжатие приводят к изменению длины пробега оптической волны в кристалле; кручение вызывает поворот оптических осей; смещение и изгиб определяют деформацию оптических осей. При деформациях типа кручение и изгиб наблюдается локальная потеря ортогональности поляризаций и, как следствие, явление, называемое конверсией мод, проявляющееся во взаимном обмене энергиями различных волн с исходно ортогональной поляризацией [11]. При возникновении пьезоэффекта возможна значительная неоднородность деформаций и напряжений в толще кристалла, следовательно, неоднородность оптических свойств. Возмущение кристалла ниобата лития электрическим полем значительной напряженности, а на частотах резонанса и при относительно малых напряженностях, пьезодеформации могут иметь нелинейный характер, с образованием гармоник высоких порядков. В работе [9] указаны следующие причины нелинейности: ангармоничность кристаллической решетки; поверхностные волны на удвоенной частоте за счет давления электромагнитного излучения (поскольку давление пропорционально квадрату напряженности поля, то, помимо постоянной составляющей, есть и меняющаяся с удвоенной частотой компонента); электрострикционный эффект; нелинейность пьезоэлектрического эффекта. Дополнительное изменение показателей преломления, при воздействии внешнего электрического поля на кристалл ниобата лития, проявляется за счет эффекта Поккельса. Отметим, что в исследуемом частотном диапазоне (от 0,1 МГц до 1 МГц) эффект Поккельса практически не зависит от частоты. При наблюдении

эффекта Поккельса необходима напряженность поля примерно на два порядка превосходящая напряженность электрического поля для пьезо-фотоупругости, при условии достижения того же вращения поляризации, а на частотах акустооптических резонансов это отношение становится еще больше. Таким образом, в общем случае при исследовании фотоупругих свойств возбуждаемых пьезоколебаниями, эффектом Поккельса можно пренебречь, но для построения модели высокой точности необходимо учитывать изменение поляризации в результате пьезоэффекта и эффекта Поккельса. При условии сохранения линейности отклика на возмущающее воздействие, учитывая принцип суперпозиции, с достаточной точностью эффект фотоупругости и эффект Поккельса можно моделировать независимо друг от друга. Будем осуществлять моделирование в частотной области. Переход в частотную область позволяет значительно сократить время моделирования, по сравнению с временной областью, так как моделирование осуществляется для установившегося режима на выбранной частоте и при заданном значении фаз вычисляются амплитуды колебаний объектов моделирования. Заметим, что при переходе в частотную область все элементы моделируемых параметров будут принадлежать множеству комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть оси системы координат соответствуют оптическим осям кристалла и внешнее поле $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$ задано тремя ортогональными гармоническими компонентами, образ которых в частотной области $\dot{\mathbf{E}} = (\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_3) = (\mathbb{F}\{E_1\}, \mathbb{F}\{E_2\}, \mathbb{F}\{E_3\})$ где $\mathbb{F}\{\dots\}$ — преобразование Фурье [12]. Для моделирования пьезодеформаций толщи кристаллического вещества ниобата лития подвергнутого воздействию внешнего электрического поля $\dot{\mathbf{E}}$ запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ki}(\mathbf{r})}{\partial x_i} = \rho(j\omega)^2 u_k(\mathbf{r}) \\ T_{kl}(\mathbf{r}) = \sum_{r=1}^3 \sum_{v=1}^3 \hat{c}_{klrv} S_{rv}(\mathbf{r}) - \sum_{q=1}^3 \hat{e}_{qkl} \dot{E}_q(\mathbf{r}) \\ D_m(\mathbf{r}) = \sum_{r=1}^3 \sum_{v=1}^3 \hat{e}_{mr v} S_{rv}(\mathbf{r}) + \sum_{q=1}^3 \hat{\epsilon}_{mq} \dot{E}_q(\mathbf{r}), \\ S_{rv}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r(\mathbf{r})}{\partial x_v} + \frac{\partial u_v(\mathbf{r})}{\partial x_r} \right) \\ \dot{E}_q(\mathbf{r}) = - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_q} \end{cases} \quad (1)$$

где $k, l, r, v, m, q = \overline{1, 3}$ — тензорные индексы координат в трехмерном пространстве; x_q — длина, м; ρ — плотность ниобата лития, кг/м³; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, 1/с; $\hat{c}_{klrv}$ — тензор комплексной механической упругости 4-го ранга, Па [13, 14]; $\hat{e}_{mr v}$ — тензор комплексных пьезоэлектрических коэффициентов, (для прямого пьезоэффекта), Кл/м²; $\hat{\epsilon}_{mq}$ — тензор комплексной диэлектрической проницаемости, Ф/м; $\mathbf{r}$ — радиус вектор, определяющий пространственные координаты; $T_{kl}(\mathbf{r})$ — тензор механических напряжений, Па; $u_k(\mathbf{r})$ — компонента вектора механических смещений, м; $S_{rv}(\mathbf{r})$ — безразмерный тензор деформаций (производные по направлению от механических смещений);

$\dot{E}_q(\mathbf{r})$ — компонента вектора напряженности электрического поля, В/м; $D_m(\mathbf{r})$ — компонента вектора электрической индукции, Кл/м²; $\varphi(\mathbf{r})$ — скалярный электрический потенциал, В; $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Пространственная дисперсия волновой энергии и деформаций в (1) учитывается за счет производных по координатам. Немаловажным аспектом является учет диссипации волновой энергии [15]. Для этого введем коэффициент потерь $\eta_c = Q^{-1}$, где Q — добротность колебательного контура, причем в общем случае, так как на различных частотах ω добротность различается, то $\eta_c(\omega) = Q(\omega)^{-1}$. В работе [15] показано, что принятие во внимание не только частотной, но и пространственной дисперсии позволяет моделировать появление новых нормальных волн, а значит, повышает точность моделирования фотоупругости, таким образом: $\eta_c(\omega, \mathbf{r})$. Для ниобата лития наиболее физичным является учет мнимой части упругих модулей $\hat{c}_{klrv} = c_{klrv}(1 + j\eta_c(\omega, \mathbf{r}))$, дополнительно имеет смысл учесть пьезо- $\hat{e}_{mr v} = e_{mr v}(1 + j\eta_e(\omega, \mathbf{r}))$ и диэлектрические потери $\hat{\epsilon}_{mq} = \epsilon_{mq}(1 + j\eta_\epsilon(\omega, \mathbf{r}))$. В работе [15] предложены методы расчета пространственной и частотной дисперсии, на практике оценка частотной зависимости добротности может быть произведена экспериментально или взята из справочных данных, так для кристаллов ниобата лития $Q \approx 500-2000$, для гетероструктур на основе ниобата лития добротность принимает значения до 7000 [16]. Применение комплексных тензоров в системе уравнений (1) позволяет учесть микроскопические эффекты молекулярно-кристаллических явлений, оцениваемые параметром $(a/\lambda) \ll 1$, на макроскопическом уровне модели. Здесь a — характерный радиус влияния порядка постоянной решетки, λ — длина волны оптического излучения в среде. Для гексагональной решетки ниобата лития $a \approx 0,5148$ нм, при длине волны $\lambda = (650/n)$ нм, получим $(a/\lambda) \approx 1,58 \cdot 10^{-3}$. Многие оптические модели, учитывая малость значения (a/λ) , обоснованно пренебрегают пространственной дисперсией, или учитывают ее только косвенно. Основываясь на анализе акусто- пьезо-оптических свойств ниобата лития, для численного моделирования в исследуемом диапазоне частот (до 1 МГц) при построении линейной модели примем следующие значения потери энергии: упругие $\eta_c = 0,0025$, пьезо- $\eta_e = 0,0005$ и диэлектрические $\eta_\epsilon = 0,0005$.

Запишем уравнение для моделирования электрического поля внутри кристалла. Учитывая, что в области исследуемых частот, размеры кристалла много меньше размеров электромагнитной волны задачу можно считать квазистационарной. Для сред с неоднородной диэлектрической проницаемостью на заданной частоте $\omega = \text{const}$ в общем случае уравнение Лапласа имеет вид $\nabla(\hat{\epsilon}(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r})) = 0$ и в тензорной нотации:

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\hat{\epsilon}_{mq}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_m} \right) = 0, \quad (2)$$

где $\hat{\epsilon}_{mq}(\mathbf{r})$ — комплексный тензор диэлектрической проницаемости, зависящий от координат. В пьезо-электриках в результате деформаций и пьезоэлектрической поляризации возникает дополнительный источник поля, следовательно, правая часть уравнения (2)

не равна нулю, таким образом, для моделирования распределения потенциала необходимо использовать уравнение Пуассона.

$$\begin{aligned} \text{Учитывая, что } \sum_{q=1}^3 \frac{\partial D_q(\mathbf{r})}{\partial x_q} = 0, \text{ и } D_m(\mathbf{r}) = \\ = \sum_{r=1}^3 \sum_{v=1}^3 \hat{e}_{mrv}(\mathbf{r}) S_{rv}(\mathbf{r}) + \sum_{q=1}^3 \hat{e}_{mq}(\mathbf{r}) \dot{E}_q(\mathbf{r}), \text{ запишем:} \\ \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\sum_{r=1}^3 \sum_{v=1}^3 \hat{e}_{mrv}(\mathbf{r}) S_{rv}(\mathbf{r}) + \sum_{q=1}^3 \hat{e}_{mq}(\mathbf{r}) \dot{E}_q(\mathbf{r}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя $S_{rv}(\mathbf{r})$ и $\dot{E}_q(\mathbf{r})$ из (1), подстановкой в (3) получим уравнение Пуассона:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 \sum_{q=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\hat{e}_{mq}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_m} \right) = \\ = - \sum_{m=1}^3 \sum_{q=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\hat{e}_{mqk}(\mathbf{r}) \frac{\partial u_k(\mathbf{r})}{\partial x_m} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Решение уравнения (4) предоставляет возможность получить распределение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ по объему исследуемого кристалла.

Система дифференциальных уравнений (1) позволяет вычислить поле тензора деформаций $S_{rv}(\mathbf{r})$ в исследуемом кристалле, что в свою очередь предоставляет возможность расчета показателей преломления $n_k + \Delta n_k$, $k = \overline{1, 3}$ с учетом изменений в результате эффекта фотоупругости и эффекта Поккельса в зависимости от координаты $(\mathbf{r})$. Используя тензор диэлектрической непроницаемости $b_{mq}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\hat{e}_{mq}(\mathbf{r})} = \frac{1}{n_{mq}^2(\mathbf{r})}$ [1], запишем уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta b_{mq}(\mathbf{r}) = p_{mqrv} S_{rv}(\mathbf{r}) + r_{mqi} E_i(\mathbf{r}) \Delta b_{mq}(\mathbf{r}) = \\ = p_{mqrv} S_{rv}(\mathbf{r}) + r_{mqi} E_i(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5)$$

где p_{mqrv} — тензор безразмерных пьезооптических коэффициентов; r_{mqi} — тензор электрооптических коэффициентов, м/В; n_{mq} — тензор комплексных показателей преломления; $S_{rv}(\mathbf{r})$ — компоненты деформаций. Используя (5), получим значения возмущенных тензоров второго порядка (матриц) диэлектрической непроницаемости: $b_{mq}(\mathbf{r}) = b_{mq}^{(0)}(\mathbf{r}) + \Delta b_{mq}(\mathbf{r})$, где $b_{mq}^{(0)}(\mathbf{r})$ — невозмущенная матрица диэлектрической непроницаемости. Тогда решая задачу на собственные числа $b_{mq}(\mathbf{r}) v_q(\mathbf{r}) = \zeta(\mathbf{r}) v_q(\mathbf{r})$, где $v_q(\mathbf{r})$ — собственный вектор и $\zeta(\mathbf{r})$ — собственные числа для матрицы $b_{mq}(\mathbf{r})$, получим значения показателей преломления: $n_k(\mathbf{r}) = \left(\sqrt{\zeta_k(\mathbf{r})} \right)^{-1}$.

Учитывая, что для $f(n) = \frac{1}{n^2}$ дифференциал $df(n) = -\left(\frac{2}{n^3}\right)dn$, то $dn = -\left(\frac{n^3}{2}\right)df(n)$, тогда для случая малых возмущений, запишем в нотации Фойгта уравнение:

$$\begin{aligned} n_k(\mathbf{r}) = n_k + \Delta n_k(\mathbf{r}) \approx \\ \approx n_k - \frac{1}{2} n_k^3 \left(\sum_{p=1}^6 p_{kp} S_p(\mathbf{r}) + \sum_{m=1}^3 r_{km} E_m(\mathbf{r}) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где n_k , $k = \overline{1, 3}$ — коэффициент преломления, n_1 и n_2 — показатели преломления обыкновенной волны и

$n_e = n_3$ — показатели преломления необыкновенной волны; p_{kp} , r_{km} — матрицы пьезо- и электрооптических коэффициентов в нотации Фойгта. Причем в результате неоднородности деформаций в общем случае $n_1 \neq n_2$. Зная поле тензора деформаций $S_{rv}(\mathbf{r})$ и распределение тензора коэффициентов преломления $n_k(\mathbf{r})$ можно вычислить волновой вектор, фазу обыкновенной и необыкновенной оптических волны внутри кристалла или на выходе из него. Правила прямого и обратного преобразования тензоров в матрицы и векторы нотации В. Фойгта являются общеизвестными [17] и в рамках настоящей работы не приводятся.

При возникновении неоднородных деформаций, свойственных пьезоэффекту, особенно при проявлении нелинейного пьезоэффекта возникает явление, которое называют конверсией мод, в результате которого обыкновенная и необыкновенная волны обмениваются энергией. Такое свойство существенно затрудняет моделирование, так как при необходимости получения модели высокой точности не позволяет рассматривать независимо обыкновенную и необыкновенную составляющие излучения проходящее сквозь кристалл. Кроме того, учитывая неоднородность деформаций в толще кристалла, в общем случае, для интерферирующих за пределами кристалла обыкновенной и необыкновенной волн траектории и координаты пути распространения будут различны, а значит, уравнения, содержащие координаты обыкновенной и необыкновенной волн, будут несовместны. Исходя из этого для получения модели высокой точности необходимо исследовать отдельно интерферирующие на выходе кристалла обыкновенную и необыкновенную волны. Запишем уравнения для обыкновенной и необыкновенной компонент луча с учетом взаимного обмена энергией:

$$\begin{cases} \frac{d}{dv_k} \left[n_k(\mathbf{r}(v_k)) \frac{d\mathbf{r}_k(v_k)}{dv_k} \right] = \nabla n_k(\mathbf{r}(v_k)), \\ \frac{dA_k(v_k)}{dv_k} = -j\beta_k(v_k)A_k(v_k) + jk_{km}(v_k)A_m(v_k), \\ k, m = \overline{1, 3}; k \neq m, \end{cases} \quad (7)$$

где $A_k(v_k) = a_k(v_k)e^{j\Phi_k(v_k)}$ — комплексные амплитуды; $a_k(v_k)$ — вещественные огибающие; $\Phi_k(v_k)$ — фазовый показатель; $\beta_k(v_k) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_k(\mathbf{r}(v_k))$ — фазовые постоянные (волновые числа), рад/м; λ_0 — длина волны света в вакууме, м; $k_{km}(v_k)$ — коэффициент связи между модами k и m , 1/м, в общем случае зависящий от производных показателей преломления и градиентов деформаций.

Результирующий фазовый набег, по функции эйконала (8), с учетом различия траекторий k и m волн, и неоднородного изменения коэффициентов преломления $n_k(\mathbf{r}(v_k))$ в результате эффектов фотоупругости, Поккельса и конверсии мод:

$$\begin{cases} \Psi_k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_0^{V_k} n_k(\mathbf{r}(v_k)) dv, \\ \Psi_m = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_0^{V_m} n_m(\mathbf{r}(v_m)) dv, \end{cases} \quad k \neq m, \quad (8)$$

где V_k, V_m — полные длины пути вдоль траектории k -го и m -го волновых векторов, соответственно, в общем случае различны для k и m волн; тогда $\Delta\psi = \psi_k - \psi_m$ при $k, m = 1, 3; k \neq m$ — разность фазовых набегов. При малых амплитудах пьезоколебаний [18] и выполнении условий $(\Delta n_k/n_k) \ll 1$ и $(\Delta n_m/n_m) \ll 1$, исследуемые эффекты будут линейны, так же при малых возмущениях можно пренебречь конверсией мод, что позволяет воспользоваться несколько упрощенной моделью, положив одинаковыми траектории распространения интерферирующих волн, т. е. $V_k = V_m = V$ и $v_k = v_m = v$, тогда фазовый набег интерферирующих волн:

$$\Delta\psi = \Delta n \cdot \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_0^V (n_k(\mathbf{r}(v)) - n_m(\mathbf{r}(v))) dv. \quad (9)$$

Численное моделирование

Разработанная формальная часть математической модели (1)–(9) позволяет произвести численный расчет для выбранной частоты ω или для некоторой последовательности частот (ω_i) , $v = \overline{1, V}$. Численное моделирование будем производить в среде Wolfram Mathematica¹, методом конечных элементов. Объект моделирования для натурных экспериментальных исследований: брусок монокристаллического ниобата лития размером $4 \times 4 \times 26$ мм³ (рис. 1).

В качестве исходных данных и начальных условий задачи: внешнее электрическое поле приложено вдоль оси y , т. е. $\vec{E} = (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$, $\vec{E}_1 = \vec{E}_3 = 0$ и $\vec{E}_2 = 10 + 0j$ В; кристалл имеет возможность совершать свободные колебания и закреплен в одной точке. В результате решения (1)–(4), для исследуемого кристалла ниобата лития, получим массивы данных пространственного



Рис. 1. Брусок монокристаллического ниобата лития

Fig. 1. A bar of monocrySTALLINE lithium niobate

распределения: электрического потенциала (рис. 2), амплитуды безразмерного тензора деформаций $S_{rv}(\mathbf{r})$ (рис. 3 и 4) и приращений коэффициентов преломления (рис. 5). Изображение (рис. 2) показывает сечение YZ пространственного распределения вещественной (рис. 2, а) и мнимой (рис. 2, б) частей электрического потенциала в толще кристалла при частоте воздействия напряжения 696 620 Гц. На рис. 2 заметна тенденция общего изменения потенциала вдоль оси y , вызванного действием внешнего поля $\vec{E}_2$, на фоне которых происходят гладкие флуктуации потенциала в результате пьезодеформаций уравнения (3) и (4). При моделировании на частоте резонанса обратим внимание на значительное увеличение потенциала в толще кристалла, относительно воздействующего напряжения. Например, при комплексном значении воздействующего на кристалл напряжения $\vec{E}_2 = 10$ В, амплитуда потенциалов составляет: $|\text{Im}\{\varphi(\mathbf{r})\}| \approx 20$ В и $|\text{Re}\{\varphi(\mathbf{r})\}| - \varphi_{\text{const}} \approx 5$, где φ_{const} — постоянная составляющая. При достаточно высокой добротности колебательного контура рост амплитуды является следствием накопления энергии в пьезоэлектрических колебаниях.

В качестве иллюстрации численного моделирования приведем изображения деформаций типа растяжение/сжатие (рис. 3) и сдвига (рис. 4). Отметим, что полученные изображения позволяют определить тип и порядок резонансных мод, по числу пучностей. На рис. 3 приведена визуализация относительных удлинений $S_{rv}(\mathbf{r})$, $r = v$, как соответствующие производные вектора

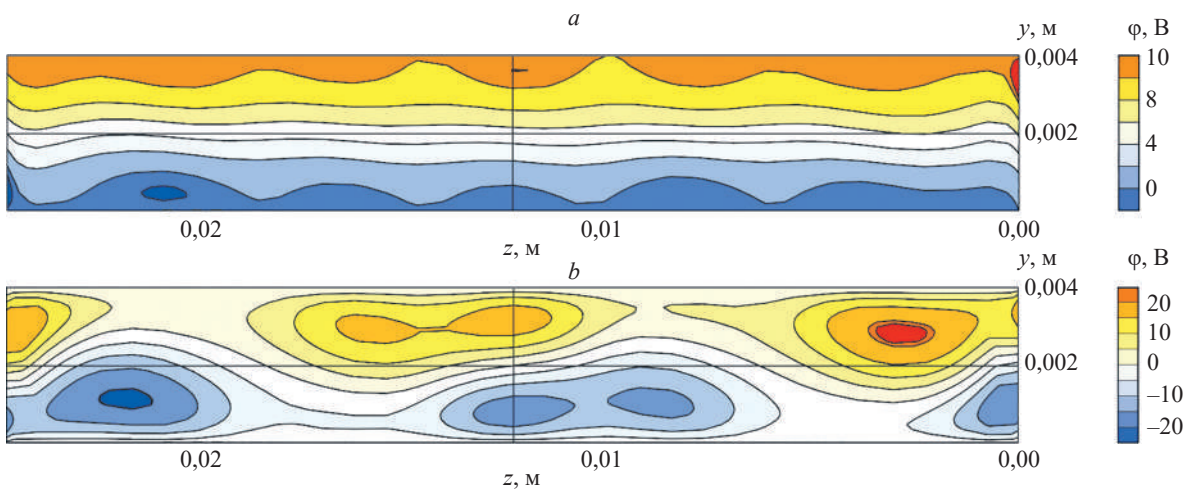


Рис. 2. Сечение YZ пространственного распределения электрического потенциала в толще кристалла на частоте резонанса 696 620 Гц: вещественная часть $\text{Re}\{\varphi(\mathbf{r})\}$ (а); мнимая часть $\text{Im}\{\varphi(\mathbf{r})\}$ (б)

Fig. 2. Cross section YZ of the spatial distribution of the electric potential in the crystal thickness at a resonance frequency of 696,620 Hz: the real part $\text{Re}\{\varphi(\mathbf{r})\}$ (а); the imaginary part $\text{Im}\{\varphi(\mathbf{r})\}$ (б)

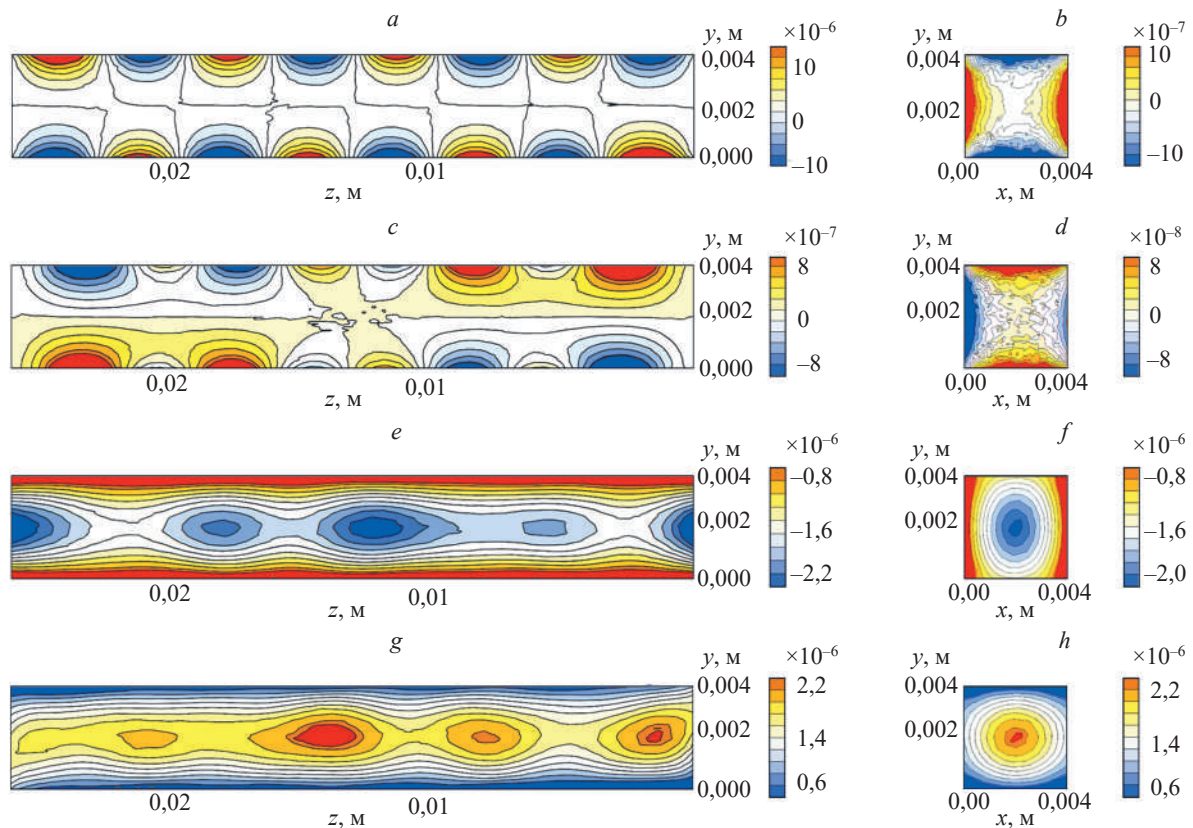


Рис. 3. Сечения распределения относительных деформаций типа растяжение/сжатие в толще кристалла: по оси z (частота 446 006 Гц) — сечения YZ (a) и XY (b); по оси z (частота 482 687 Гц) — сечения YZ (c) и XY (d); по оси x (частота 696 620 Гц) — сечения XZ (e) и XY (f); по оси y (частота 696 620 Гц) — сечения YZ (g) и XY (h)

Fig. 3. Cross sections of the distribution of relative strains of the stretching/compression type in the crystal thickness: along the z axis (frequency 446,006 Hz) — sections YZ (a) and XY (b); along the z axis (frequency 482,687 Hz) — sections YZ (c) and XY (d); along the x axis (frequency 696,620 Hz) — sections XZ (e) and XY (f); on the y axis (frequency 696,620 Hz) — sections YZ (g) and XY (h)

механических смещений $u_k(\mathbf{r})$ по (1). Рис. 4 содержит срезы сечений, соответствующие деформациям типа сдвиг $S_{rv}(\mathbf{r})$, $r \neq v$, полученные как производные вектора механических смещений $u_k(\mathbf{r})$ по (1).

Тепловые карты (рис. 3 и 4) отображают значительные пьезо-деформационные неоднородности в кристаллическом теле, имеющие волновой вид, что обуславливает проявление динамического неравномерного

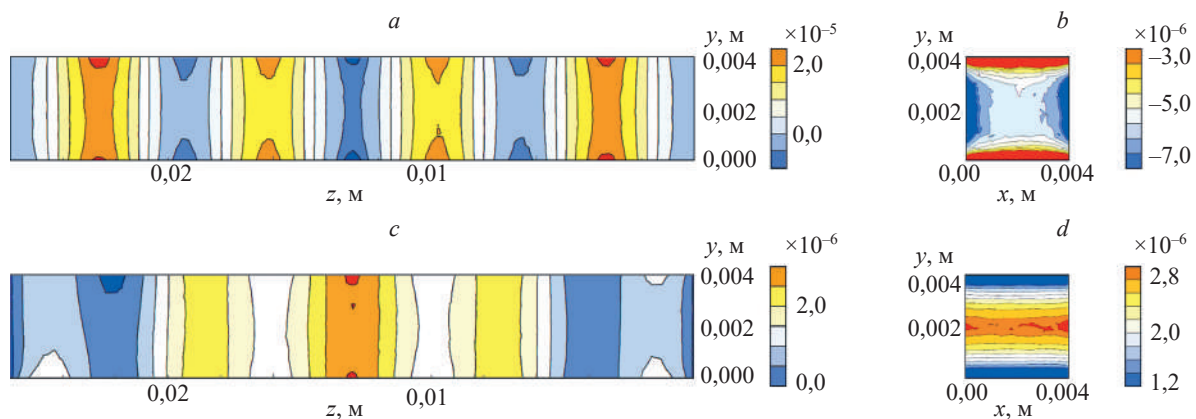


Рис. 4. Распределение деформаций типа сдвиг в толще центрального сечения кристалла ниобата лития: сдвиг XY , частота 446 006 Гц, сечение XZ (a); сдвиг XY , частота 446 006 Гц, сечение XY (b); сдвиг YZ , частота 482 687 Гц, сечение XZ (c); сдвиг YZ , частота 482 687 Гц, сечение XY (d)

Fig. 4. The distribution of shear deformations in the thickness of the central section of a lithium niobate crystal: XY shift, frequency 446,006 Hz, cross section XZ (a); XY shift, frequency 446,006 Hz, cross section XY (b); YZ shift, frequency 482,687 Hz, cross section XZ (c); YZ shift, frequency 482,687 Hz, cross section XY (d)

по толще эффекта фотоупругости, и, следовательно, различную поляризационно-фазовую модуляцию, для различных траекторий лучей оптического излучения, проходящих через кристалл.

Используя выражение (6), произведем расчет поля тензора коэффициента преломления, для примера тепловая карта приращения показателей преломления Δn_1 и Δn_2 имеется на рис. 5.

Исследования ниобата лития, например в работе [9], показывают, что на резонансных частотах усиливается проявление нелинейных эффектов и трансформации волновых форм. Интересна природа возникновения поверхностных акустических волн: волн Рэлея и квази-поверхностных волн [19, 20]. Когда в результате пьезодеформации происходит сжатие/растяжение некоторого конечного кристаллического объема, внутренние области, за счет упругого взаимодействия с окружающими структурами кристаллической решетки, испытывают большое противодействие, чем области, расположенные ближе к поверхности и на самой поверхности, следовательно, в поверхностных областях амплитуды колебаний будут выше, чем во внутренних. При этом, с выходом на поверхность, форма колебаний трансформируется из продольных в поперечные. Изложенный механизм возникновения (вытеснения) волн на поверхность схож с явлением поверхностного эффекта в радиоэлектронике, но в случае электрического скин-эффекта противодействие колебаниям во внутренних областях возникает в результате индукции противо-ЭДС [21, 22], которая во внутренней части проводника больше, чем во внешней.

Экспериментальная часть

Фотография и блок-схема экспериментальной установки приведены на рис. 6. Генератор и усилитель гармонического напряжения, приложенного к кристаллу ниобата лития вдоль оси y , обеспечивал регулировку по амплитуде от 0 В до 35 В и по частоте от 100 кГц до 1 МГц. Частотный диапазон для исследований выбран, с учетом формы и размеров кристалла, так что бы можно было наблюдать различные моды волновых возмущений, резонансы и нелинейные эффекты.

При этом на относительно низких частотах (учитывая размеры кристалла) число элементов сетки метода конечных элементов, для получения достаточной точности решения, относительно невелико и исчисляется десятками тысяч (в частном случае приведенного решения 57 271), что доступно для относительно быстрых вычислений на персональном компьютере. В результате воздействия переменного напряжения в кристалле возникали пьезоколебания и одновременно проявлялись эффекты динамической фотоупругости и Поккельса. Через кристалл вдоль оптической оси z проходил линейно поляризованный под углом 45° к осям x и y лазерный луч, на выходе из кристалла лазерный луч проходил через анализатор в виде поляризационного светоделительного куба, также осуществляющего поляризационное светоделение под углом 45° к осям x и y . После прохождения через анализатор луч, разделенный на две поляризационные составляющие, падал на фотодиоды фотоприемников. Настройка положения фотодиодов производилась по центру симметричного коноскопического изображения, возникающего при расфокусировке части лазерного излучения как следствие двулучепреломления ниобата лития. Установка луча по центру симметричного коноскопического изображения позволяет с высокой точностью установить прохождение луча через центр кристалла вдоль оси z . Таким образом, осуществлялся прием двух поляризационных компонент, проходящих через кристалл. Регистрируемые фотоприемниками колебания являлись следствием оптической поляризационно-фазовой модуляции лазерного излучения за счет эффектов динамической фотоупругости и Поккельса, в соответствии с изложенной теоретической моделью.

На установке (рис. 6) проводились серии экспериментов двух видов. В первой серии экспериментов при воздействующем на кристалл синусоидальном напряжении постоянной амплитуды и развертке по частоте от 100 кГц до 1 МГц производилась регистрация амплитуды колебаний оптического излучения. Дополнительно выполнялась регистрация результатов исследования резонансным методом по схеме включения кристалла ниобата лития между генератором и осциллографом при свипировании напряжения по частоте в том же

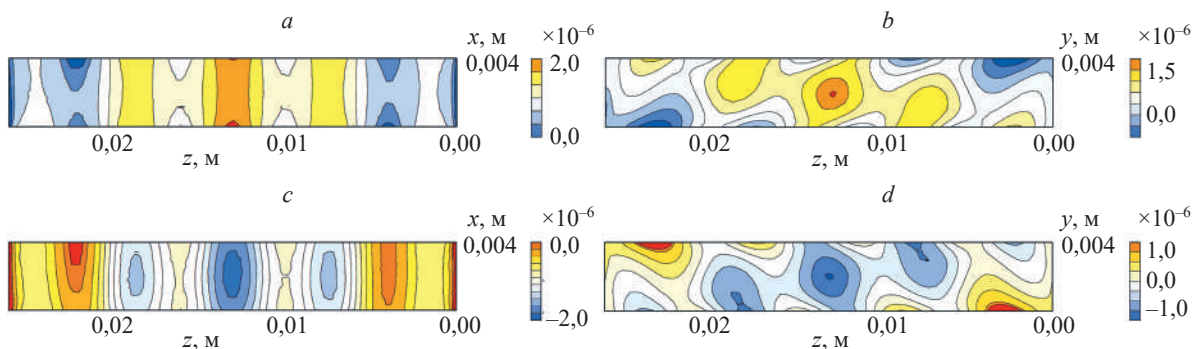


Рис. 5. Распределение приращений коэффициентов преломления: $\text{Re}\{\Delta n_1(\mathbf{r})\}$ в сечениях XZ (a) и YZ (b); $\text{Re}\{\Delta n_2(\mathbf{r})\}$ в сечениях XZ (c) и YZ (d)

Fig. 5. Distribution of refractive index increments: $\text{Re}\{\Delta n_1(\mathbf{r})\}$ in sections XZ (a) and YZ (b); $\text{Re}\{\Delta n_2(\mathbf{r})\}$ in sections XZ (c) and YZ (d)

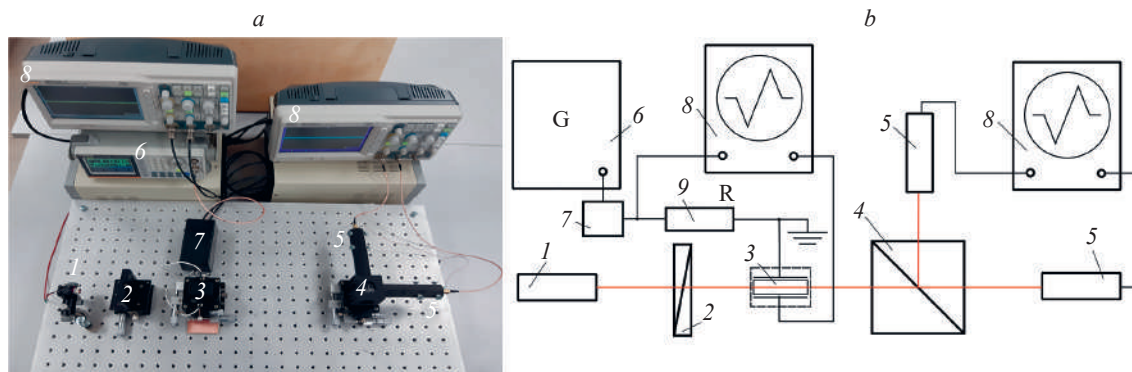


Рис. 6. Экспериментальная установка: фотография (а) и блок-схема (b): 1 — источник лазерного излучения; 2 — поляризатор; 3 — кювета с кристаллом ниобата лития; 4 — поляризационный куб (анализатор); 5 — фотоприемники излучения; 6 — генератор (G); 7 — усилитель напряжения; 8 — осциллограф; 9 — токовый шунт (резистор R)

Fig. 6. Experimental setup: photograph (a) and block diagram (b): 1 — laser radiation source; 2 — polarizer; 3 — cuvettes with lithium niobate crystal; 4 — polarizing cube (analyzer); 5 — photodetectors of radiation; 6 — generator (G); 7 — voltage amplifier; 8 — oscilloscope; 9 — current shunt (resistor R)

диапазоне от 100 кГц до 1 МГц. Во второй серии экспериментов производилась регистрация зависимости формы оптического сигнала (рис. 8 и 9) от амплитуды и фазы приложенного к кристаллу напряжения и тока.

На графиках (рис. 7) показаны результаты первой серии экспериментов в диапазоне от 100 кГц до 1 МГц полученными следующими способами: (рис. 7, а) — оптический метод, реализованный на установке (рис. 6); (рис. 7, b) — резонансный метод; и метод численного моделирования (рис. 7, c). По результатам эксперимента (рис. 7, a, b) выявлены три явно выраженных резонанса значения частот, которых для удобства анализа сведены в табл. 1. Наиболее значимые по амплитуде оптические и электрические резонансы близки

по частотам. Оптический метод является значительно более чувствительным, и даже при относительно грубой оценке резонансов методом непрерывного свипирования частоты, позволяет выявить больше деталей, чем резонансный метод. Резонансы малой амплитуды методом непрерывного свипирования регистрируются недостаточно ясно, повысить качество регистрации в общем случае можно за счет накопления данных. Заметим, что оптический и резонансный методы регистрируют изменения различных, но взаимосвязанных свойств, и потому по-разному проявляющих отклик на идентичные возмущения.

При моделировании (рис. 7, c), резонансы выявлялись по максимумам $\Delta\psi$ (9), так же как и при экспери-

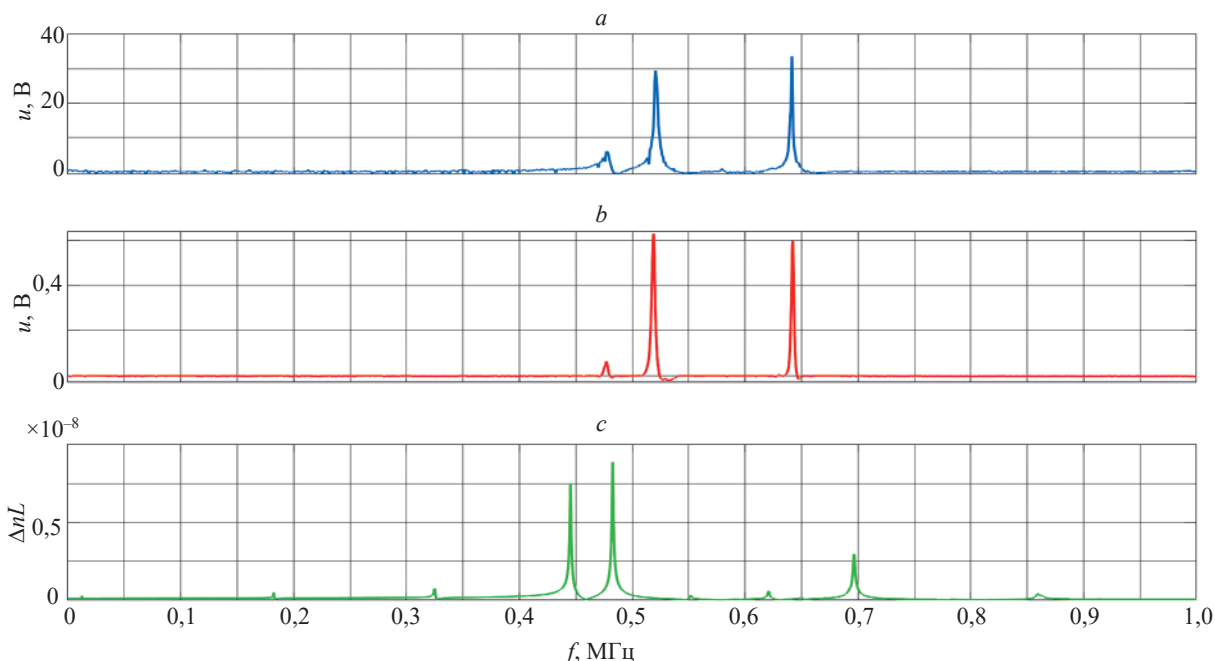


Рис. 7. Исследование амплитудно-частотных характеристик в диапазоне от 100 Гц до 1 МГц: эксперимент (резонансный метод) (a); эксперимент (метод оптического просвечивания) (b); численное моделирование (c)

Fig. 7. Investigation of frequency response in the range from 100 Hz to 1 MHz: experiment (resonance method) (a); experiment (optical transmission method) (b); numerical simulation (c)

Таблица 1. Частоты резонансов, выявленные различными методами, Гц

Table 1. Resonance frequencies detected by various methods

Оптический метод	Резонансный метод	Моделирование
476 240 ± 50	473 170 ± 50	446 006 ± 1
518 840 ± 50	517 340 ± 50	482 687 ± 1
642 120 ± 50	641 960 ± 50	696 620 ± 1

менте, получено три наиболее выраженных резонанса (табл. 1), но смещенные в пределах 4–8,5 % от значений, полученных экспериментально. Полученный результат можно объяснить вариабельностью тензоров: механической упругости и пьезоэлектрических коэффициентов [13, 14], и определяющими граничные условия экспериментальными особенностями крепления кристалла, которые особенно влияют на поверхностные квазиволны и волны Релея. Электрооптические и пьезооптические свойства ниобата лития имеют значительную зависимость от условий формирования и последующих воздействий на кристаллическое тело, включая легирование, наличие и типа дислокаций, наличия и способа формирования доменов, релаксационных процессов фоторефракции [23] и пр., что проявляется в виде вариабельности свойств реальных кристаллов [4, 24]. Из-за вариабельности свойств реальных кристаллов, как следствие имеются отличия справочных характеристик, полученных из различных источников, например, по данным [13, 14, 25–27] табличные значения некоторых элементов тензоров упругих модулей отличаются до 12 %. Определенное влияние на точность вычислений оказывает диаметр сетки разбиения при решении дифференциальных уравнений (1), (4) с помощью метода конечных элементов. При моделировании не был сделан подбор параметров, дающих полное соответствие экспериментальным данным, но были использованы тензоры механической упругости и пьезоэлектрических коэффициентов в виде «как есть» полагаясь на справочные значения [28]. Данное решение было связано с тем, что основной задачей исследований является разработка модели и метода проведения эксперимента, а не уточнение численных значений тензоров механической упругости и пьезоэлектрических коэффициентов, для конкретного образца кристалла.

Детектирование резонансной моды колебаний производилось на основании определения максимальной из ненормированных интегральных сумм тензора деформаций:

$$\max_{r,v} \left\{ M_{rv} = \int_N |S_{rv}(\mathbf{r}(v))| dv \right\}, r, v = \overline{1, 3}, \quad (10)$$

по объему кристалла N . Для трех наиболее выраженных резонансов значения $\max_{r,v} M_{rv}$ интеграла от модуля тензора деформаций $|S_{rv}(\mathbf{r})|$ сведены в табл. 2, резонансные моды с наибольшими значениями интегральных сумм тензора деформаций отмечены цветом.

Скорость распространения соответствующей моды рассчитаем как: $v = 2L_k f / \chi$, где L_k — линейный размер кристалла в направлении $k = \overline{1, 3}$; f — частота резонанса; χ — порядок моды. Анализ изображений сечений (рис. 3 и 4) позволяют оценить: число пучностей, в направлении распространения волны, которое равно порядку моды χ ; определить тип волны продольная и квази-продольная (L и QL), поперечная или квази-поперечная (S или QS). Результаты расчетов и анализа сведены в табл. 3. Так, например, на частоте резонанса 446 005 Гц максимальные интегральные суммы (табл. 2) по (10) выявлены для деформаций типа: растяжение/сжатие $M_{33} = 1,815 \cdot 10^{-12}$ и сдвиг $M_{23} = 3,913 \cdot 10^{-12}$. Для деформаций типа растяжение/сжатие (мода 3,3) число пучностей составляет 8, причем колебания значительно вытеснены к поверхности, где продольная форма колебаний постепенно трансформируется в поперечные, т. е. резонансные колебания являются квази-волнами типа QL (рис. 3, а, b) распространяющимися в направлении оси z . Для моды 2,3 распространение колебаний происходит в направлении перпендикулярном плоскости сдвига, т. е. в направлении оси x . Из рис. 4, а видно, что в направлении x имеется одна пучность, следовательно, порядок моды — единица, из рис. 4, а, b заметно некоторое вытеснение волн на поверхность, поэтому классифицируем моду как S/QS. На частоте 446 005 Гц наиболее значимая интегральная амплитуда $M_{23} > M_{33}$, из чего следует, что первая резонансная сдвиговая мода 2,3, что отмечено в табл. 2 цветом (■). Достаточно интересны для анализа резонансные колебания на частоте 482 687 Гц мода растяжения/сжатия 3,3 (рис. 3, c) кристалл изгибается

Таблица 2. Интеграл амплитуд различных мод

Table 2. The integral of the amplitudes of different modes

r, v	На частоте, Гц		
	446 005	482 687	696 620
1,1	$9,885 \times 10^{-13}$	$1,872 \times 10^{-12}$	$4,799 \times 10^{-12}$
2,2	$8,148 \times 10^{-13}$	$1,754 \times 10^{-12}$	$4,730 \times 10^{-12}$
3,3	$1,815 \times 10^{-12}$	$2,939 \times 10^{-12}$	$5,162 \times 10^{-13}$
1,2	$9,808 \times 10^{-14}$	$1,858 \times 10^{-13}$	$1,452 \times 10^{-13}$
1,3	$2,572 \times 10^{-13}$	$2,587 \times 10^{-13}$	$1,528 \times 10^{-13}$
2,3	$3,913 \times 10^{-12}$	$6,612 \times 10^{-12}$	$5,535 \times 10^{-13}$

Примечание: резонансные моды отмечены цветом: ■ — резонансная мода первого порядка; ■ — резонансная мода второго порядка.

в виде латинской буквы «S», при этом наблюдается две пучности, на которые накладываются 8 пучностей. Волна с двумя пучностями «S»-формы не является резонансной, так как оценка ее скорости показывает нереальное для ниобата лития значение (≈ 12 км/с), а ее амплитуда значительно меньше, чем амплитуда моды восьмого порядка. Волна с восемью пучностями является резонансной. Аналогичный анализ на основании данных табл. 2 и рис. 3 и 4 произведем для резонансов на частоте 482 687 Гц и 696 620 Гц. Результаты анализа сведены в табл. 3.

Вторая серия экспериментов посвящена исследованию нелинейных пьезо-возмущений в кристалле ниобата лития и регистрации их с помощью оптического метода, по схеме приведенной на изображении (рис. 6). Регистрация производилась на частоте резонанса 518 840 Гц, зарегистрированного при физическом эксперименте (табл. 1), амплитуда возмущающего гармонического напряжения регулировалась от 0 В до 35 В. Характерные формы сигнала на фотоприемниках (рис. 6) оптического сигнала приведены на рис. 8, с ростом напряжения заметны значительные искажения гармонической формы, т. е. проявления нелинейности.

Одновременная регистрация прикладываемого к кристаллу тока $\dot{I}(\omega)$ и напряжения $\dot{U}(\omega)$ позволила определить комплексную мощность $P(\omega) = \dot{I}(\omega)\dot{U}(\omega) = \text{Re}[P(\omega)] + j\text{Im}[P(\omega)]$, приложенную к кристаллу (рис. 9, c). Разность фаз тока $\dot{I}(\omega)$ и напряжения $\dot{U}(\omega)$, изображены на рис. 9, d. На рис. 9, a приведены модули первых пяти (исключая постоянную составляющую) гармонических компонент $h(\omega) = \mathbb{F}\{\gamma(I(t))\}$, где $\gamma(I(t))$ — реализуемое на фотоприемнике преобразование оптического сигнала $I(t)$ в электрический. Здесь $H(\omega)$ — спектр преобразованного оптического сигнала $\gamma(I(t))$ без постоянной составляющей. График относительной мощности $W = \int_{\omega} |H(\omega)|^2 d\omega$ сигнала $W = \int_{\omega} |H(\omega)|^2 d\omega$ показан на рис. 9, b.

Результаты эксперимента подтверждают возникновение значительных нелинейных колебаний при относительно малом напряжении возмущения на частоте пьезорезонанса кристалла. Следует отметить, что регистрация нелинейных компонент «подмешанных» к возмущающему напряжению в результате прямого пьезоэффекта является значительно менее чувствительным способом, чем регистрация динамической фотоупруго-

Таблица 3. Определение типа и порядка мод, по данным моделирования
Table 3. Determination of the type and order of modes based on simulation data

Частота резонанса, Гц	r, ν	$M_{r\nu}$	Направление распространения, k	Порядок моды, χ	Тип волны	Скорость, м/с
446 005	3,3	$1,815 \times 10^{-12}$	3	8	QL	2899,03
	2,3	$3,913 \times 10^{-12}$	1	1	S/QS	3568,04
482 687	3,3	$2,939 \times 10^{-12}$	1	8	QL	3137,47
	2,3	$6,612 \times 10^{-12}$	1	1	S	3861,50
696 620	1,1	$4,799 \times 10^{-12}$	1	1	L	5572,96
	2,2	$4,730 \times 10^{-12}$	2	1	L	5572,96

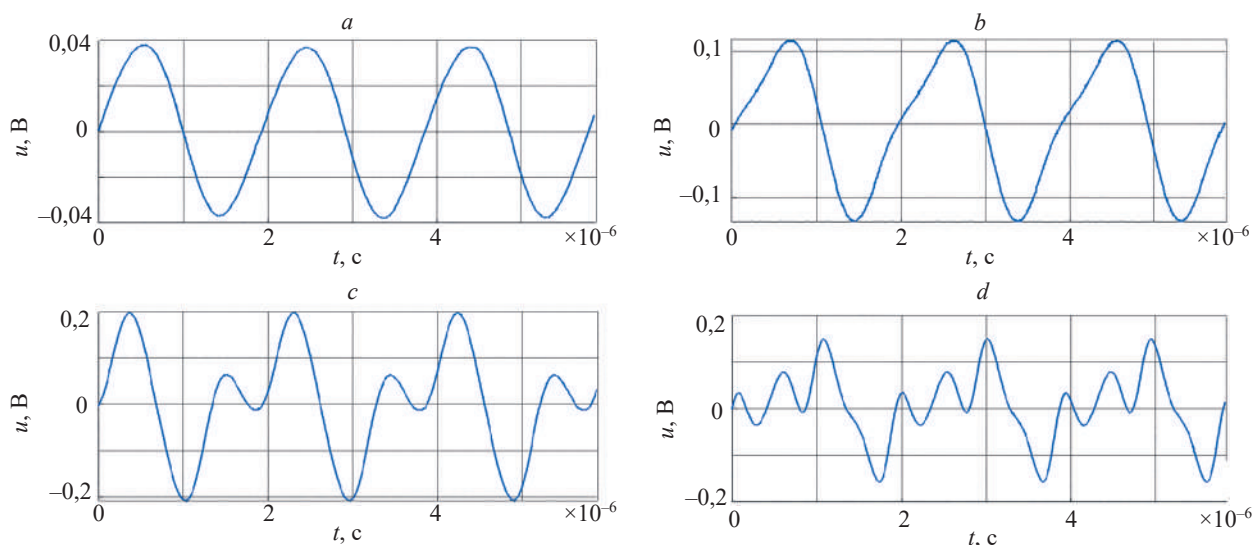


Рис. 8. Формы оптического сигнала при различных амплитудах гармонического монохроматического возмущающего напряжения, приложенного к кристаллу: 5 В (a); 10 В (b); 20 В (c); 30 В (d)

Fig. 8. Optical waveforms at different amplitudes of harmonic monochromatic disturbing voltage applied to the crystal: 5 V (a); 10 V (b); 20 V (c); 30 V (d)

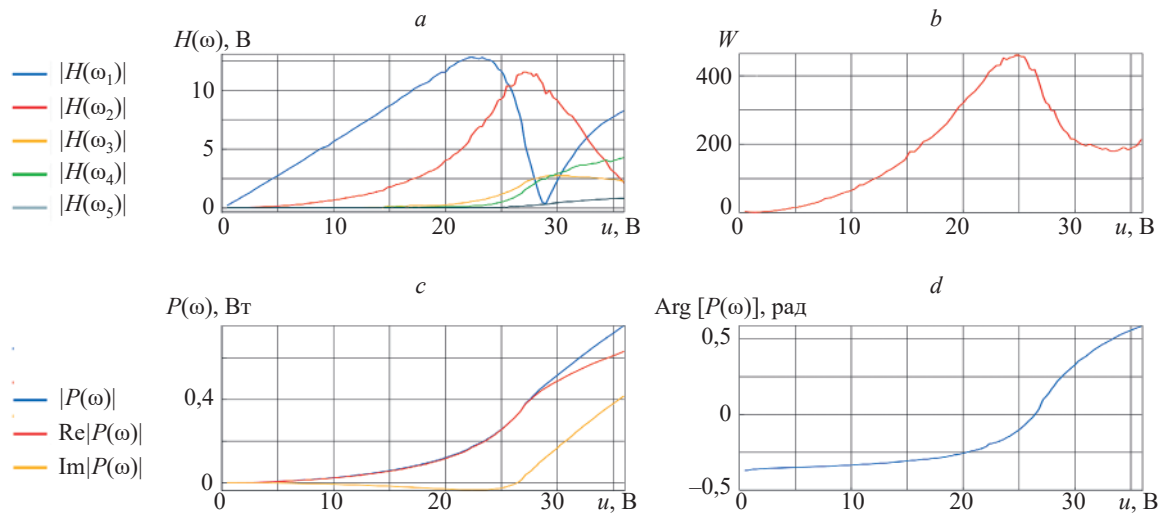


Рис. 9. Графики исследования нелинейных эффектов: модули спектральных компонент оптического сигнала (a); относительная мощность переменной части оптического сигнала (b); комплексная мощность электрического сигнала (c); разность фаз тока и напряжения (d)

Fig. 9. Graphs of nonlinear effects research: modules of spectral components of the optical signal (a); relative power of the variable part of the optical signal (b); complex power of the electrical signal (c); phase difference of current and voltage (d)

сти. При амплитуде напряжения более 5 В (рис. 8), даже по форме осциллограммы становятся заметны нелинейные искажения, причем кристалл работает подобно конденсатору (ток опережает напряжение (рис. 9, d)), но с повышением напряжения разность фаз постепенно убывает достигает нуля при 26,5 В, примерно при этом же напряжении становятся равными друг другу амплитуды первой и второй гармоник. Интересным фактом является падение амплитуды первой гармоники до нуля при примерно 28 В (рис. 9, a). После перехода фазы через ноль напряжение начинает опережать ток (рис. 9, d), при этом существенно снижается мощность оптических колебаний (рис. 9, b) при одновременном увеличении числа значимых высших гармоник. Таким образом, происходят значительные нелинейные изменения свойств колебательного контура в зависимости от амплитуды внешнего напряжения. Неоднородность деформаций, поверхностный эффект и нелинейные колебания приводят к тому, что особенности поляризационно-фазовой модуляции имеют существенную зависимость от траектории оптического луча через кристалл. Например, для регистрации поверхностных волн имеет смысл определить прохождение луча в поверхностных слоях, а при исследовании центральной части — через центр кристалла.

Обсуждение, выводы

Разработана, реализована в виде программы и апробирована математическая модель динамики фотоупругих и электрооптических явлений в пьезокристаллах.

Моделирование пространственной дисперсии и диссипации волновой энергии позволило учесть особенности свойственные нецентросимметричным кристаллам. Отдельное внимание уделено разработке математического аппарата конверсии мод в кристаллическом теле, возмущенном упругими волнами. Основные возможности модели:

- определение распределения упругих деформаций кристаллического объекта при пьезовозмущении;
- идентификация резонансных частот, типа и порядка волновых мод;
- определение амплитуды динамической фотоупругости для произвольных траекторий распространения оптического излучения;
- картирование распределения внутри кристалла: электрического поля, деформаций типа растяжение/сжатие и сдвиг, коэффициентов преломления;
- расчет конверсии мод обыкновенной и необыкновенной волн.

Для проверки модели разработана экспериментальная установка и порядок проведения натурных экспериментов. Сопоставление экспериментальных данных и данных моделирования показало их соответствие с достаточно высокой точностью.

Разработанная экспериментальная установка и порядок проведения эксперимента для исследования нелинейных пьезо-фотоупругих и электрооптических явлений, краткий анализ показал возможность извлечения значительного объема ценной информации, что по мнению авторов, требует дальнейших исследований и позволяет считать предложенный метод эффективным.

Литература

1. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987. 616 с.
2. Палатников М.Н., Сандлер В.А., Сидоров Н.В., Ефремов И.Н., Макарова О.В. Оценка степени униполярности кристаллов LiNbO₃ при исследовании их статических и динамических пьезоэлектрических свойств // Неорганические материалы. 2020. Т. 56. № 11. С. 1215–1220. doi: 10.31857/S0002337X20110123
3. Матвеев В.А., Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Разработка и изготовление электрооптического модулятора на основе эффекта Поккельса // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2025. Т. 68. № 3. С. 239–248. doi: 10.17586/0021-3454-2025-68-3-239-248
4. Голенищев-Кутузов А.В., Голенищев-Кутузов В.А., Калимуллин Р.И., Семенников А.В. Динамика фотоиндуцированных изменений упругих характеристик кристаллов ниобата лития, допированных ян-теллеровскими ионами Fe²⁺ // Физика твердого тела. 2017. Т. 59. № 2. С. 296–301. doi: 10.21883/FTT.2017.02.44051.297
5. Ефремов И.Н., Бирюкова И.В., Теплякова Н.А., Палатников М.Н. Получение крупногабаритных нефоторефрактивных кристаллов LiNbO₃:Zn методом Чохральского из расплава // Труды Кольского научного центра РАН. Серия: Технические науки. 2023. Т. 14. № 3. С. 132–137. doi: 10.37614/2949-1215.2023.14.3.024
6. Clementi G. LiNbO₃ films: integration for piezoelectric and pyroelectric energy harvesting. Université Bourgogne Franche-Comté, 2020. 199 p.
7. Гуляев Ю.В., Кмита А.М., Котелянский И.М. Возбуждение и усиление поверхностных акустических волн в структуре полупроводник–пьезоэлектрическая пленка — полупроводники // Физика и техника полупроводников. 1971. Т. 5. № 1. С. 80–84.
8. Зайцев Б.Д., Калинин В.Ю., Кузнецова И.Е. Нелинейное электроакустическое взаимодействие упругих волн в пластинах ниобата лития // Акустический журнал. 1999. Т. 45. № 2. С. 229–234.
9. Зарембо А.К., Кrasilников В.А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // Успехи физических наук. 1970. Т. 102. № 4. С. 549–586.
10. Бородина И.А., Джоши С.Г., Зайцев Б.Д., Кузнецова И.Е. Акустические волны в тонких пластинах ниобата лития // Акустический журнал. 2000. Т. 46. № 1. С. 42–46.
11. Boyd R.W. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 2020. 634 p.
12. Гришенцев А.Ю. Метод синтеза алфавитов ортогональных сигнальных широкополосных сообщений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18. № 6. С. 1074–1083. doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1074-1083
13. IEEE Standard on Piezoelectricity: 176-1987 // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 1996. V. 43. N 5. P. 54.
14. Ballato A., Ballato J. Acoustic properties of piezoelectric cubic crystals // International Journal of Ceramic Engineering and Science. 2023. V. 5. N 5. P. e10182. doi: 10.1002/ces2.10182
15. Агранович В.М., Гинзбург В.Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1979. 432 с.
16. Guo Y., Kadota M., Tanaka S. Hetero acoustic layer surface acoustic wave resonator composed of LiNbO₃ and quartz // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2024. V. 71. N 1. P. 182–190. doi: 10.1109/TUFFC.2023.3337249
17. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Физматлит, 1979. 640 с.
18. Баранский К.Н. Физическая акустика кристаллов. М.: Ленанд, 2017. 144 с.
19. Койгеров А.С., Балышева О.Л. Численный анализ параметров псевдоповерхностных акустических волн в кристаллах ниобата и танталата лития // Радиотехника и электроника. 2021. Т. 66. № 12. С. 1224–1232. doi: 10.31857/S0033849421120123
20. Lim H.S., Huang J.D., Zhang V.L., Kuok M.H., Ng S.C. Evaluation of acoustic physical constants of LiNbO₃ at hypersonic frequencies // Journal of Applied Physics. 2003. V. 93. N 12. P. 9703–9708. doi: 10.1063/1.1577403
21. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Т. 3. СПб.: Питер, 2006. 377 с.

References

1. Yariv A., Yeh P. *Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation*. Wiley, 1984, 589 p.
2. Palatnikov M.N., Sandler V.A., Sidorov N.V., Efremov I.N., Makarova O.V. Estimating the degree of unipolarity of LiNbO₃ crystals using static and dynamic piezoelectric measurements. *Inorganic Materials*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1153–1158. doi: 10.1134/s0020168520110126
3. Matveev V.A., Grishentsev A.Yu., Korobeynikov A.G. Development and manufacturing of an electro-optical modulator based on the Pockels effect. *Journal of Instrument Engineering*, 2025, vol. 68, no. 3, pp. 239–248. (in Russian). doi: 10.17586/0021-3454-2025-68-3-239-248
4. Golenishchev-Kutuzov A.V., Golenishchev-Kutuzov V.A., Kalimullin R.I., V. Semennikov A.V. Dynamics of photo-induced changes in the elastic characteristics of lithium niobate crystals doped with Jahn-Teller Fe²⁺ ions. *Physics of the Solid State*, 2017, vol. 59, no. 2, pp. 304–309. doi: 10.1134/s106378341702007x
5. Efremov I.N., Biryukova I.V., Teplyakova N.A., Palatnikov M.N. Obtaining large-sized non-photonorefractive LiNbO₃:Zn crystals by the Chokhralsky method from a melt. *Transactions of the Kola Science Centre of RAS. Series: Engineering Sciences*, 2023, vol. 14, no. 3, pp. 132–137. (in Russian). doi: 10.37614/2949-1215.2023.14.3.024
6. Clementi G. *LiNbO₃ Films: Integration for Piezoelectric and Pyroelectric Energy Harvesting*. Université Bourgogne Franche-Comté, 2020, 199 p.
7. Gulyaev Yu.V., Kmita A.M., Kotelyansky I.M. Excitation and amplification of the surface sound waves in a piezoelectric film-semiconductor structure. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov*, 1971, vol. 5, no. 1, pp. 80–84. (in Russian)
8. Zaitsev B.D., Kalinin V.Yu., Kuznetsova I.E. Nonlinear electroacoustic interaction of elastic waves in lithium niobate plates. *Akusticheskij Zhurnal*, 1999, vol. 45, no. 2, pp. 229–234. (in Russian)
9. Zarembo A.K., Krasilnikov V.A. Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 1970, vol. 102, no. 4, pp. 549–586. (in Russian)
10. Borodina I.A., Joshi S.G., Zaitsev B.D., Kuznetsova I.E. Acoustic waves in the thin lithium niobate plates. *Akusticheskij Zhurnal*, 2000, vol. 46, no. 1, pp. 42–46. (in Russian)
11. Boyd R.W. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 2020, 634 p.
12. Grishentsev A.Yu. Synthesis method for alphabets of orthogonal signaling broadband communications. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 6, pp. 1074–1083. (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-6-1074-1083
13. IEEE Standard on Piezoelectricity: 176-1987. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1996, vol. 43, no. 5, pp. 54.
14. Ballato A., Ballato J. Acoustic properties of piezoelectric cubic crystals. *International Journal of Ceramic Engineering and Science*, 2023, vol. 5, no. 5, pp. e10182. doi: 10.1002/ces2.10182
15. Agranovich V.M., Ginzburg V.L. *Crystal Optics Taking into Account Spatial Dispersion and Exciton Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 432 p. (in Russian)
16. Guo Y., Kadota M., Tanaka S. Hetero acoustic layer surface acoustic wave resonator composed of LiNbO₃ and quartz. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2024, vol. 71, no. 1, pp. 182–190. doi: 10.1109/TUFFC.2023.3337249
17. Sirotn Yu.I., Shaskolskaya M.P. *Fundamentals of Crystal Physics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1979. 640 p. (in Russian)
18. Baransky K.N. *Physical Acoustics of Crystals*. Moscow, Lenand Publ., 2017, 144 p. (in Russian)
19. Koigerov A.S., Balysheva O.L. Numerical analysis of parameters of pseudosurface acoustic waves in lithium niobate and tantalate crystals. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2021, vol. 66, no. 12, pp. 1388–1395. doi: 10.1134/s1064226921120123
20. Lim H.S., Huang J.D., Zhang V.L., Kuok M.H., Ng S.C. Evaluation of acoustic physical constants of LiNbO₃ at hypersonic frequencies. *Journal of Applied Physics*, 2003, vol. 93, no. 12, pp. 9703–9708. doi: 10.1063/1.1577403
21. Demirchyan K.S., Neiman L.R., Korovkin N.V., Chechurin V.L. *Theoretical Basics of Electrical Engineering*. Vol. 3. St. Petersburg, Piter Publ., 2006, 377 p. (in Russian)

22. Гришенцев А.Ю. Моделирование распределения плотности тока в сложном неоднородном проводнике. Часть 1 // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2006. № 29. С. 87–94.
23. Шандаров С.М., Шандаров В.М., Мандель А.Е., Буримов Н.И. Фоторефрактивные эффекты в электрооптических кристаллах. Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. 244 с.
24. Ren X., Lee C., Xue K., Ou S., Yu Y., Chen Z., Yu M. Photorefractive and pyroelectric photonic memory and long-term stability in thin-film lithium niobate microresonators // *Npj Nanophotonics*. 2025. V. 2. N 1. P. 1–6. doi: 10.1038/s44310-024-00052-3
25. Yamada T., Niizeki N., Toyoda H. Piezoelectric and elastic properties of lithium niobate single crystals // *Japanese Journal of Applied Physics*. 1967. V. 6. N 2. P. 151. doi: 10.1143/JJAP.6.151
26. Damle R.V. Elastic constants of lithium niobate // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 1992. V. 25. N 7. P. 1091–1095. doi: 10.1088/0022-3727/25/7/009
27. Smirnov A., Anisimkin V., Ageykin N., Datsuk E., Kuznetsova I. Influence of Lamb wave anisotropy on detection of water-to-ice phase transition // *Sensors*. 2024. V. 24. N 24. P. 7969. doi: 10.3390/s24247969
28. Gualtieri J.G., Kosinski J.A., Ballato A. Piezoelectric materials for acoustic wave applications // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 1994. V. 41. N 1. P. 53–59. doi: 10.1109/58.265820
22. Grishentsev A.Yu. Modeling the current density distribution in a complex inhomogeneous conductor. Part 1. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2006, no. 29, pp. 87–94. (in Russian)
23. Shandarov S.M., Shandarov V.M., Mandel A.E., Burimov N.I. *Photorefractive Effects in Electro-Optical Crystals*. Tomsk, TUSUR Publ., 2012, 244 p. (in Russian)
24. Ren X., Lee C., Xue K., Ou S., Yu Y., Chen Z., Yu M. Photorefractive and pyroelectric photonic memory and long-term stability in thin-film lithium niobate microresonators. *Npj Nanophotonics*, 2025, vol. 2, no. 1, pp. 1–6. doi: 10.1038/s44310-024-00052-3
25. Yamada T., Niizeki N., Toyoda H. Piezoelectric and elastic properties of lithium niobate single crystals. *Japanese Journal of Applied Physics*, 1967, vol. 6, no. 2, pp. 151. doi: 10.1143/JJAP.6.151
26. Damle R.V. Elastic constants of lithium niobate. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1992, vol. 25, no. 7, pp. 1091–1095. doi: 10.1088/0022-3727/25/7/009
27. Smirnov A., Anisimkin V., Ageykin N., Datsuk E., Kuznetsova I. Influence of Lamb wave anisotropy on detection of water-to-ice phase transition. *Sensors*, 2024, vol. 24, no. 24, pp. 7969. doi: 10.3390/s24247969
28. Gualtieri J.G., Kosinski J.A., Ballato A. Piezoelectric materials for acoustic wave applications. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1994, vol. 41, no. 1, pp. 53–59. doi: 10.1109/58.265820

Авторы

Гришенцев Алексей Юрьевич — доктор технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 56321138400](https://orcid.org/0000-0003-1373-0670), <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>, AGrishentsev@yandex.ru

Матвеев Владимир Александрович — студент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, <https://orcid.org/0009-0004-0681-1792>, Stellar13@gmail.com

Горошков Вячеслав Александрович — заведующий лабораторией, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [sc 58110677200](https://orcid.org/0000-0001-9950-5778), <https://orcid.org/0000-0001-9950-5778>, gorosvia@ya.ru

Герасимов Игорь Владимирович — доктор технических наук, профессор, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, 197022, Российская Федерация, [sc 57144017000](https://orcid.org/0000-0002-0965-1438), <https://orcid.org/0000-0002-0965-1438>, ivgerasimov-45@yandex.ru

И Вэньлун — кандидат технических наук, доцент, декан факультета, Цзянсийский аграрный университет, Наньчан, 330045, Китай, [sc 57191615896](https://orcid.org/0000-0002-9266-3498), <https://orcid.org/0000-0002-9266-3498>, yiwenlong@jxau.edu.cn

Дукельский Константин Владимирович — доктор технических наук, доцент, заместитель генерального директора, АО «Научно-производственное объединение Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова», Санкт-Петербург, 192171, Российская Федерация, [sc 6602633236](https://orcid.org/0000-0002-1627-7499), <https://orcid.org/0000-0002-1627-7499>, kdukel@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18.05.2026

Одобрена после рецензирования 25.06.2026

Принята к печати 26.07.2026

Authors

Alexey Yu. Grishentsev — D.Sc., Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 56321138400](https://orcid.org/0000-0003-1373-0670), <https://orcid.org/0000-0003-1373-0670>, AGrishentsev@yandex.ru

Vladimir A. Matveev — Student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, <https://orcid.org/0009-0004-0681-1792>, Stellar13@gmail.com

Vyacheslav A. Goroshkov — Head of Laboratory, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [sc 58110677200](https://orcid.org/0000-0001-9950-5778), <https://orcid.org/0000-0001-9950-5778>, gorosvia@ya.ru

Igor V. Gerasimov — D.Sc., Full Professor, Saint Petersburg Electrotechnical University “LETI”, 197022, Russian Federation, [sc 57144017000](https://orcid.org/0000-0002-0965-1438), <https://orcid.org/0000-0002-0965-1438>, ivgerasimov-45@yandex.ru

Wenlong Yi — PhD, Associate Professor, Dean, Jiangxi Agricultural University, Nanchang, 330045, China, [sc 57191615896](https://orcid.org/0000-0002-9266-3498), <https://orcid.org/0000-0002-9266-3498>, yiwenlong@jxau.edu.cn

Konstantin V. Dukelsky — D.Sc., Associate Professor, Deputy General Director, JSC “Research and Production Corporation S.I. Vavilova”, 192171, Russian Federation, [sc 6602633236](https://orcid.org/0000-0002-1627-7499), <https://orcid.org/0000-0002-1627-7499>, kdukel@mail.ru

Received 18.05.2026

Approved after reviewing 25.06.2026

Accepted 26.07.2026



Работа доступна по лицензии
Creative Commons
«Attribution-NonCommercial»