9 ЭКОНОМИКА И ФИНАНСЫ. МЕНЕДЖМЕНТ

УДК 519.688

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕН ОПЦИОНОВ АЗИАТСКОГО ТИПА С ДИСКРЕТНЫМИ ДИВИДЕНДАМИ ВНЕ ПЕРИОДА УСРЕДНЕНИЯ

М.С. Косяков, М.В. Пономарев, Д.В. Иванов, Ю.А. Шполянский

Представлены два метода расчета цен опционов азиатского типа с арифметическим усреднением с учетом выплаты многократных дискретных дивидендов вне периода усреднения: метод прямого моделирования Монте-Карло и предложенный авторами статьи оригинальный подход, основанный на конечно-разностной схеме Кранка–Николсона с использованием аналитической аппроксимации Куррана в качестве терминального условия. Результаты сравнительного тестирования показали, что точность оригинального метода является приемлемой для практических задач при использовании рекомендованных в работе размеров сеток, зависящих от входных параметров. При этом время расчета составляет единицы (доли) миллисекунд на современном персональном компьютере в сравнении с единицами секунд для метода Монте-Карло.

Ключевые слова: азиатский опцион, дискретные дивиденды, метод Монте-Карло, конечно-разностные методы, схема Кранка–Николсона, аппроксимация Куррана.

Введение

Опционом называется производный финансовый инструмент – контракт, согласно которому потенциальный покупатель или продавец получает право, но не обязательство, совершить покупку (опцион типа call) или продажу (опцион типа put) некоторого базового актива по заранее оговоренной цене исполнения (strike price) в определенный момент в будущем, называемый датой исполнения опциона [1].

Выплата по классическому европейскому опциону определяется ценой базового актива на дату исполнения и известной ценой исполнения. Данное условие открывает возможность манипуляций над ценой базового актива непосредственно перед исполнением опциона, что, в свою очередь, ведет к увеличению или уменьшению выплаты. Чтобы ослабить эффект возможной манипуляции, были предложены так называемые азиатские опционы. Их отличительной особенностью является зависимость выплаты от усредненного значения цены базового актива за некоторый промежуток времени – период усреднения. Длительность этого периода и число дат, в которые регистрируются цены для усреднения (даты усреднения), бывают различными. Широко распространены, например, азиатские опционы, в которых даты усреднения – это последние дни срока контракта (часто 10 дней), включая дату исполнения. Такие опционы называют азиатскими «хвостами» (tails).

Одной из важнейших задач систем алгоритмической торговли, позволяющих совершать торговые операции на электронных финансовых рынках с помощью специализированных компьютерных систем, является расчет теоретических цен опционов в реальном времени с учетом постоянного изменения их параметров. Важно отметить, что теоретическое ценообразование азиатских опционов из-за наличия усреднения цен значительно усложняется по сравнению с европейскими опционами. Зависимость цены азиатского опциона от текущей цены базового актива, арифметического среднего и времени описывается дифференциальным уравнением в частных производных. Среднее входит в уравнение как параметр, но при решении играет роль еще одной независимой переменной, поэтому задача определения цены фактически является трехмерной [1]. Точные аналитические решения этой задачи неизвестны [1, 2]. При условии отсутствия выплат дискретных дивидендов найдены приближенные аналитические решения [2]. Хорошее приближение обеспечивается аппроксимацией Куррана [2, 3].

Прямые конечно-разностные методы не позволяют получать решение в реальном времени из-за размерности задачи. В случае, когда дивидендные выплаты пропорциональны цене базового актива, задачу можно переписать в виде двумерного уравнения и эффективно решать численно ([4, 5] и ссылки в них). Однако, если выплаты дискретных дивидендов произвольны, понизить размерность не удается.

В настоящей работе представлены подходы для решения задачи ценообразования азиатских опционов с произвольными дискретными дивидендами. Рассмотрен метод Монте-Карло прямого моделирования стохастического процесса изменения цены базового актива. Метод сравнительно прост в реализации, но его главным недостатком является низкая скорость сходимости и, как следствие, большое время вычислений и (или) высокие требования к производительности используемого оборудования. Это сильно ограничивает возможности его применения в современных системах алгоритмической торговли. В связи с этим в работе авторами предложен и проанализирован альтернативный оригинальный подход, основанный на конечно-разностной схеме Кранка–Николсона [1, 6] с использованием аналитической аппроксимации Куррана [3] в качестве терминального условия, что позволило осуществлять расчеты в реальном времени. Проведены сравнение результатов вычислений, анализ погрешностей, сформулированы рекомендации по настройке параметров численных алгоритмов для повышения точности результатов.

Ценовые модели опционов

Для расчета цен опционов используются стохастические модели, называемые ценовыми моделями опционов. В их основе лежит постулирование стохастического процесса, моделирующего поведение цены базового актива. Одна из наиболее популярных моделей расчета цен опционов − модель Блэка–Шоулза [1]. Модель Блэка–Шоулза отражает изменение цены опциона в зависимости от ряда параметров и формализуется в виде дифференциального уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0\,, \tag{1}$$

где $V(S,t)$ – цена опциона; S – цена базового актива; t – время (изменяется в сторону уменьшения от даты исполнения опциона T до 0); r – безрисковая процентная ставка; σ – волатильность.

Выплата P по европейскому колл (call) опциону определяется формулой:

$$P(S)=V(S,T)=\max\left[\left(S(T)-K\right),0\right],$$

где T – дата исполнения; K – цена исполнения. Выплата по пут (put)-опциону равна

$$P(S)=V(S,T)=\max\left[\left(K-S(T)\right),0\right].$$

При выплате дивиденда по базовому активу его цена S меняется скачкообразно в момент выплаты, однако цена опциона V остается непрерывной [1]:

$$V(S,t_d^-)=V(S_d(S,D),\,t_d^+)\,, \tag{2}$$

где t_d^- – момент времени непосредственно перед, а t_d^+ – непосредственно после выплаты дивиденда; $S_d(S,D)$ – теоретическая модель изменения цены S при выплате дивиденда величиной D. В данной работе используется модель [7]

$$S_d(S,D)=\max(S-D,0)\,. \tag{3}$$

В работе рассматриваются азиатские опционы с дискретным арифметическим усреднением значения цены базового актива. Пусть t_i, $i=1,\ldots,m$ − даты усреднения, где m − число дат. Тогда среднее арифметическое в дату t_i определяется суммой

$$A_i=\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}S(t_k)\,.$$

Каждое последующее значение A_i, кроме того, можно выразить через предыдущее:

$$A_i=\frac{i-1}{i}A_{i-1}+\frac{1}{i}S(t_i)\,.$$

В очередную дату усреднения t_i регистрируется цена актива $S(t_i)$ и значение усредненной цены A пересчитывается, поэтому изменяется и цена самого опциона V. Значения V непосредственно перед и после пересчета связаны соотношением [1]

$$V(S,A,t_i^-)=V\left(S,\frac{i-1}{i}A+\frac{1}{i}S,t_i^+\right),$$

где t_i^- – момент непосредственно перед, а t_i^+ – непосредственно после усреднения.

Выплаты по азиатским колл- и пут-опционам равны соответственно

$$P(S,A)=V(S,A,T)=\max\left[(A-K),0\right], \tag{4}$$

$$P(S,A)=V(S,A,T)=\max\left[(K-A),0\right]. \tag{5}$$

Метод Монте-Карло расчета теоретических цен азиатских опционов

Метод Монте-Карло основан на проведении большого числа испытаний согласно стохастическому процессу с параметрами, отвечающими реальному процессу. В нашем случае воспользуемся стохастической моделью изменения цены актива [8]:

$$S(t+\Delta t)=S(t)\exp\left(r-0{,}5\sigma^2\,\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}X\right), \tag{6}$$

где $S(t)$ – цена актива в момент времени t; X – случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение. Теоретическая цена азиатского опциона в настоящий момент времени t_0 определяется как

$$V(S,t_0)=\exp\left[-r(T-t_0)\right]\,E\left\{P(S,A)\right\}, \tag{7}$$

где $E\{x\}$ – математическое ожидание случайной величины x. В дальнейшем будем считать $t_0=0$.

По формуле (6) для каждой реализации стохастического процесса можно определить значение цены актива $S(t_d)$ в момент выплаты дивиденда t_d, а также в каждый из моментов усреднения t_i. Необходимо отметить, что в момент выплаты дивиденда t_d цена актива подлежит изменению согласно выражению (3). Выплаты по азиатским колл- и пут-опционам P_k для k-го испытания определяются выражениями (4) и (5). Оценки математического ожидания и дисперсии для N реализаций равны соответственно

$$\hat{P} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} P_k \ , \ s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(P_k - \hat{P}\right)^2 ,$$

а оценка теоретической цены азиатского опциона определяется согласно (7). В работе рассматривался 95%-ный доверительный интервал получаемой оценки выплаты по азиатскому опциону, определяемый диапазоном $\left[\hat{P} - 1{,}96 s/\sqrt{N} ; \hat{P} + 1{,}96 s/\sqrt{N}\right]$.

Как уже было отмечено, основным недостатком прямого метода Монте-Карло является низкая скорость сходимости: ошибка вычислений пропорциональна $s/\sqrt{N}$. Это сильно ограничивает использование прямого метода Монте-Карло в задачах алгоритмической торговли и чаще всего требует применения специализированных вычислительных средств, если расчет цен другими методами невозможен.

Анализ оригинального сеточного метода: комбинация схемы Кранка–Николсона и аппроксимации Куррана

Низкая скорость сходимости метода Монте-Карло и, как следствие, большое время вычислений и (или) высокие требования к производительности используемого оборудования вынуждают искать альтернативные подходы к расчету цен азиатских опционов с учетом выплаты дискретных дивидендов. В этой связи авторами предложен оригинальный численный метод, схема которого показана на рис. 1. Временной промежуток от даты исполнения T до даты выплаты последнего дивиденда t_d (в сторону уменьшения t), включающий весь период усреднения, покрывается приближенной аналитической аппроксимацией Куррана для цен азиатских опционов без дивидендов [3]. Так с учетом (2) формируется распределение цены $V(S, t_d^-)$ для всех точек сетки по S. Это распределение используется в качестве терминального условия разностной схемы Кранка–Николсона численного решения дифференциального уравнения (1), в общем случае с учетом многократных выплат дивидендов согласно (2) [1]. Таким образом, схема Кранка–Николсона используется на участке от даты последнего дивиденда t_d до текущего момента $t_0 = 0$ (также в сторону уменьшения t).

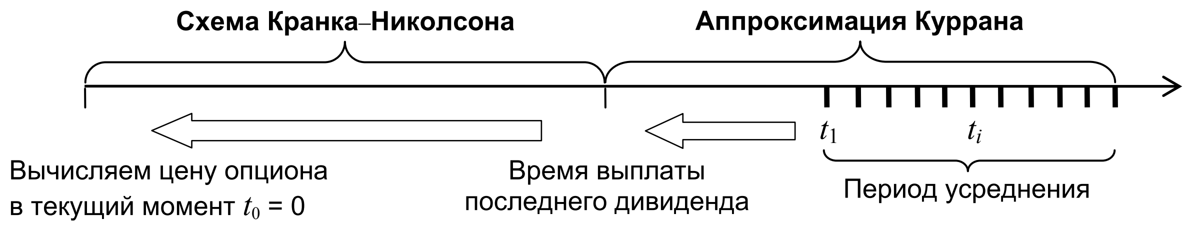

Рис. 1. Аппроксимация Куррана как терминальное условие для схемы Кранка-Николсона

Для проверки применимости предлагаемого подхода и определения параметров, влияющих на точность расчетов, было проведено тестирование оригинального численного метода с помощью метода Монте-Карло. В ходе тестирования теоретическая цена опциона рассчитывалась обоими методами при различных наборах параметров опциона. При моделировании методом Монте-Карло значения нормально распределенных случайных величин формировались из равномерно распределенных величин с помощью преобразования Бокса-Мюллера [9, 10].

На рис. 2, а, б, показаны погрешность Δ и относительная погрешность δ определения цены азиатского колл опциона V сеточным методом в зависимости от цены базового актива S при различных значениях волатильности при условии выплаты одного дивиденда. Зависимости построены для следующих значений параметров: цена исполнения K = 166 у.е.; дата исполнения T = 1 год; даты усреднения – ежедневно в течение последних 10 дней (m = 10); безрисковая процентная ставка r = 0,10 в год; момент выплаты дивиденда t_d = 0,75 года; размер дивиденда D = 12,7 у.е. Для метода Монте-Карло число испытаний составляло $N = 10^7$, а ширина доверительного интервала не превышала 0,1% от получаемого значения V. Параметры сетки в численном методе решения дифференциального уравнения (1) определялись значениями максимальной цены $S_{\max} = 3K$, минимальной цены $S_{\min} = 0$ и количеством шагов равномерной сетки по цене актива n_S = 150 и времени n_t = 200 шагов/год. Как видно из рис. 2, а, б, погрешность предложенного метода расчета цен азиатских опционов тем выше, чем выше значение волатильности.

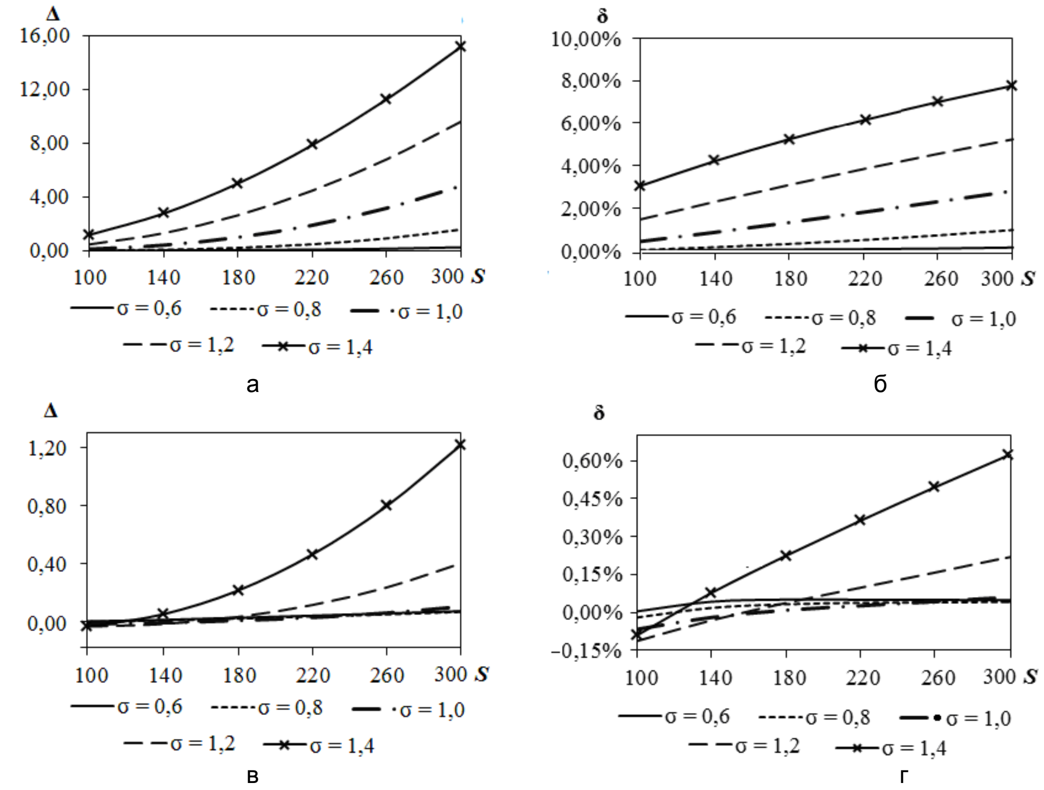

Рис. 2. Погрешность Δ и относительная погрешность δ сеточного метода при условии выплаты одного дивиденда для параметров сетки $S_{\max} = 3K$ и $n_S = 150$ (а)–(б) и для $S_{\max} = 6K$ и $n_S = 300$ (в)–(г)

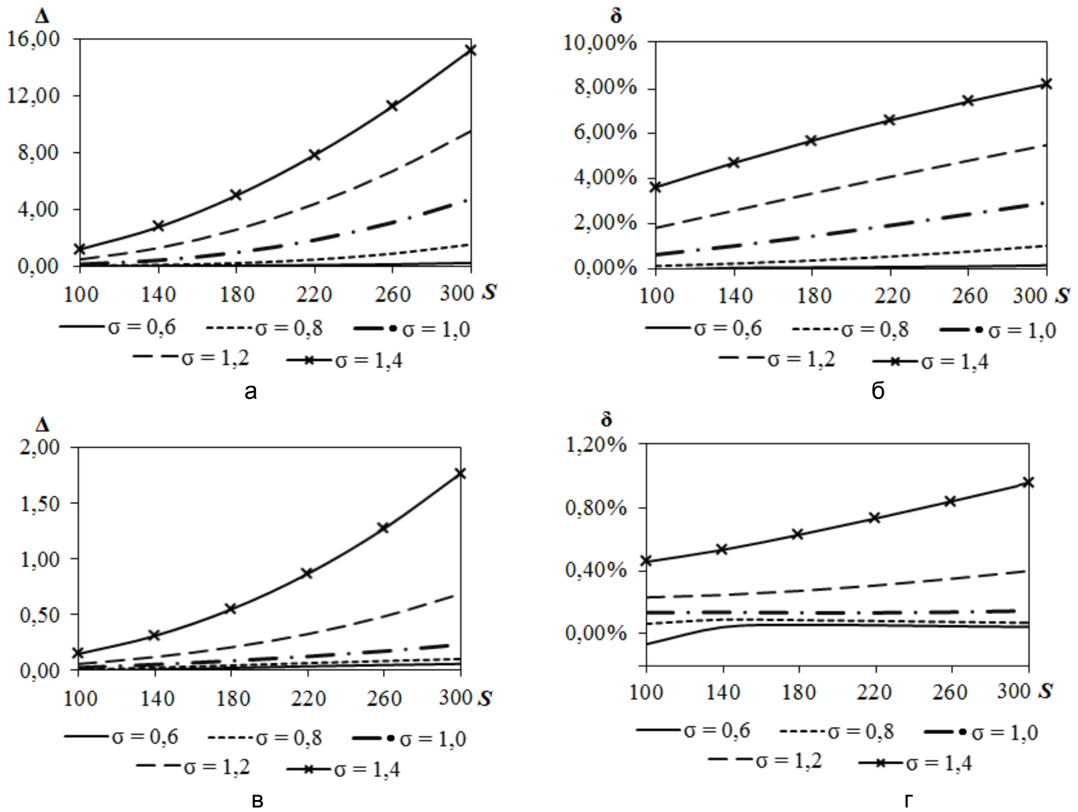

Рис. 3. Погрешность Δ и относительная погрешность δ сеточного метода при условии выплаты трех дивидендов для параметров сетки $S_{\max} = 3K$ и $n_S = 150$ (а)–(б) и для $S_{\max} = 6K$ и $n_S = 300$ (в)–(г)

Для уменьшения погрешности численного метода при значениях $\sigma \geq 1$ было предложено увеличивать количество точек в сетке, а также ее верхний предел в два раза, сохранив шаг сетки по цене неизменным. Из рис. 2, в, г, на которых представлены погрешности предложенного сеточного метода для

$S_{max} = 6K$ и $n_S = 300$, следует, что при достаточном количестве узлов сетки относительная погрешность расчета предложенным численным методом не превышает 1%. Подобное поведение наблюдалось и при других значениях параметров вычисления. Так, на рис. 3, а–г, показаны соответствующие зависимости при условии выплаты трех дивидендов: моменты выплаты $t_d^1 = 0{,}11$; $t_d^2 = 0{,}41$; $t_d^3 = 0{,}75$ года; соответствующие размеры дивидендов: $D_1 = 5{,}3$; $D_2 = 9{,}2$; $D_3 = 12{,}7$ у.е.; параметры сеток совпадают с параметрами для результатов, представленных на рис. 2.

Таким образом, предложенный сеточный метод при правильно выбранных параметрах сетки является достаточно точным решением задачи ценообразования азиатских опционов с учетом выплаты дискретных дивидендов. Время расчета составляет единицы (доли) миллисекунд на стандартном персональном компьютере по сравнению с единицами секунд при использовании метода Монте-Карло.

Заключение

В работе рассмотрена задача ценообразования опционов азиатского типа с учетом выплаты дискретных дивидендов и арифметическим усреднением, не имеющая точного аналитического решения. Описан алгоритм решения данной задачи методом Монте-Карло. Расчет цены опциона с помощью метода Монте-Карло является прямым многократным моделированием стохастического процесса изменения цены базового актива и имеет вероятностную оценку погрешности, определяемую шириной получаемого доверительного интервала. Главным недостатком данного метода является низкая скорость сходимости и, как следствие, большое время вычислений и (или) высокие требования к производительности используемого оборудования. Несмотря на возможности использования модификаций метода Монте-Карло, направленных на уменьшение дисперсии случайной величины для ускорения его сходимости, применимость данного метода в современных системах алгоритмической торговли весьма ограничена.

В этой связи в работе предложен и проанализирован альтернативный оригинальный подход, основанный на конечно-разностной схеме Кранка–Николсона с использованием аналитической аппроксимации Куррана в качестве терминального условия, что позволяет удовлетворить требованию расчета в реальном времени. Для проверки применимости предлагаемого подхода и определения параметров, влияющих на точность вычислений, было проведено сравнительное тестирование оригинального сеточного метода с помощью метода Монте-Карло. Результаты тестирования показали, что точность оригинального метода является приемлемой для практических задач при использовании рекомендованных в работе размеров сеток, зависящих от входных параметров расчета, в первую очередь от волатильности. При этом время вычислений составляет единицы (доли) миллисекунд на современном персональном компьютере в сравнении с единицами секунд для метода Монте-Карло.

Литература

1. Willmott P. On quantitative finance. – 2-d ed. – John Wiley & Sons, Ltd., 2006. – V. 1.–3. – 1500 p.
2. Haug E.G. The complete guide to option pricing formulas. – 2-d ed. – McGraw-Hill, 2007. – 530 p.
3. Curran M. Beyond average intelligence // Risk. – 1992. – V. 5. – № 10. – P. 60–63.
4. Vecer J. Unified pricing of Asian options // Risk. – 2002. – V. 15. – № 6. – P. 113–116.
5. Lord R. Partially exact and bounded approximations for arithmetic Asian options // Journal of Computational Finance. – 2006. – V. 10. – № 2. – P. 1–52.
6. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
7. Haug E.G., Haug J., Lewis A. Back to Basics: a new approach to the discrete dividend problem // Wilmott magazine. – September, 2003. – P. 37–47.
8. Hongbin Zhang. Pricing Asian Options using Monte Carlo Methods. – Department of Mathematics Uppsala University, 2009. – 36 p.
9. Reuven Y. Rubinstein, Dirk P. Kroese. Simulation and the Monte Carlo Method. – John Wiley & Sons, Ltd, 2008. – 372 p.
10. Joshi. M.S. C++ Design Patterns and Derivatives Pricing. – University of Melbourne, 2008. – 292 p.

Косяков Михаил Сергеевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, mkosyakov@gmail.com

Пономарев Максим Васильевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, студент, maxim.v.ponomarev@gmail.com

Иванов Дмитрий Владимирович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант; Тбрикс АБ, математик; dm.vl.ivanov@gmail.com

Шполянский Юрий Александрович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор физ.-мат. наук, доцент; Тбрикс АБ, ведущий математик, shpolyan@mail.ru