

УДК 535.1

## ФАЗОВАЯ САМОМОДУЛЯЦИЯ ОДНОПЕРИОДНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

А.А. Дроздов, С.А. Козлов

Получены аналитические и численные решения уравнения динамики поля светового импульса в изотропной диэлектрической среде с нормальной групповой дисперсией и безынерционной кубической нелинейностью для граничного условия вида однопериодной оптической волны. Показано, что уширение спектра таких предельно коротких по числу колебаний импульсов в нелинейной среде происходит как в высоко-, так и в низкочастотную область. Максимум спектральной плотности смещается в низкочастотную область. Возникновения привычного в среде с кубической нелинейностью излучения утроенных частот не происходит, а генерируется волна с центральной частотой в примерно четыре с половиной раза большей исходной центральной частоты волны.

**Ключевые слова:** однопериодные импульсы, фазовая само модуляция, нелинейные диэлектрические среды.

### Введение

Фазовая само модуляция интенсивных сверхкоротких световых импульсов в прозрачных оптических средах теоретически изучалась ранее в большом числе работ [1, 2]. В последнее десятилетие особо

большой интерес вызвали исследования особенностей этого нелинейного явления для импульсов, содержащих лишь несколько колебаний светового поля [3–5]. В работе [6], по-видимому, впервые явление фазовой самомодуляции экспериментально наблюдалось для предельно коротких по числу колебаний однопериодных импульсов (single cycle pulses), которые генерируются в терагерцовом спектральном диапазоне [7]. В настоящей работе особенности фазовой самомодуляции однопериодных волн в изотропных диэлектрических средах с нормальной групповой дисперсией и безынерционной кубической нелинейностью рассмотрены теоретически.

**Уравнение динамики поля излучения из малого числа колебаний  
в нелинейной диэлектрической среде**

Уравнение, описывающее эволюцию линейно поляризованного излучения, спектр которого находится в области прозрачности нелинейной диэлектрической среды и в той ее части, где групповая дисперсия нормальная, можно записать в виде [8]

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{N_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - a \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + gE^2 \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где  $E$  – электрическое поле светового импульса;  $z$  – пространственная координата, вдоль которой распространяется импульс;  $t$  – время;  $c$  – скорость света в вакууме;  $N_0$ ,  $a$  – параметры, характеризующие зависимость линейного показателя преломления  $n_0$  среды от частоты  $\omega$  излучения:

$$n_0(\omega) = N_0 + a\omega^2, \quad (2)$$

параметр  $g$  характеризует безынерционную кубическую по полю нелинейность поляризационного отклика среды и связан с коэффициентом ее нелинейного показателя преломления  $n_2$  соотношением  $g = 2n_2/c$  [9].

Для получения аналитических решений уравнения (1) целесообразно провести следующую его нормировку. Введем новые безразмерные переменные  $\tilde{E} = E/E_0$ ,  $\tilde{z} = z/\lambda_0$ ,  $\tilde{t} = t/T_0$ , где  $E_0$  – максимальное значение напряженности электрического поля на входе в нелинейную среду,  $T_0$  – центральный период колебаний поля входного излучения,  $\lambda_0 = cT_0/N_0$  – центральная длина волны. В этих переменных уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{t}} - A \frac{\partial^3 \tilde{E}}{\partial \tilde{t}^3} + G \frac{\partial \tilde{E}^3}{\partial \tilde{t}} = 0, \quad (3)$$

где безразмерный коэффициент  $A = ac/N_0T_0^2$  характеризует дисперсию линейного показателя преломления диэлектрической среды;  $G = cgE_0^2/3N_0$  описывает вклад безынерционной кубической по полю нелинейности. При дальнейшем анализе уравнения (3) знак «~» будем опускать.

**Аналитическое решение нелинейного уравнения динамики поля**

Для получения аналитического решения уравнения (3) будем использовать метод последовательных приближений Пикара [10], в котором малым будем предполагать параметр  $G$ . В этом разделе работы ограничимся анализом решений нормированного уравнения (3) для случая, когда дисперсией линейного показателя преломления среды можно пренебречь, т.е. когда выполняется условие  $G \gg A$ . Например, это неравенство выполняется для кристалла ниобата лития ( $N_0 = 4,7$ ,  $a = 3,4 \times 10^{-38} \text{ с}^3/\text{см}$ ,  $n_2 = 5,4 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2/\text{Вт}$  [6]) в поле терагерцового излучения с интенсивностью  $I = 1,0 \cdot 10^8 \text{ Вт}/\text{см}^2$  и центральным периодом  $T_0 = 4,7 \cdot 10^{-12} \text{ с}$ . Этим условиям, при которых в работе [6] экспериментально наблюдалась фазовая самомодуляция, соответствуют  $G = 7,7 \cdot 10^{-5}$ ,  $A = 9,8 \cdot 10^{-6}$ . Приведенные параметры дисперсии ниобата лития  $N_0$  и  $a$  были рассчитаны авторами методом наименьших квадратов при аппроксимации частотной зависимости показателя преломления стехиометрического кристалла  $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$  [11].

В соответствии с выбранным методом решение уравнения (3) будем искать в виде

$$E = E^{(0)} + GE^{(1)} + G^2E^{(2)} + \dots, \quad (4)$$

в котором ограничимся только двумя первыми слагаемыми. Тогда в представлении (4) нормированное уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial E^{(0)}}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial E^{(0)3}}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решение первого уравнения системы (5) имеет вид [12]:

$$E^{(0)}(z, t) = E^{(0)}(t - z). \quad (6)$$

Второе уравнение системы (5) также несложно решить в квадратурах, переписав его в новых переменных  $z' = z$ ,  $\tau = t - z$ . Тогда его решение примет следующий вид [13]:

$$E^{(1)}(z', \tau) = - \int_{z'_0}^{z'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( E^{(0)}(\tau) \right)^3 dz'' \quad (7)$$

Временную эволюцию поля световой волны на входе в среду (при  $z'_0 = 0$ ) будем рассматривать в виде однопериодного импульса

$$E^{(0)}(0, \tau) = E_0 \frac{\tau}{\tau_p} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_p^2}\right), \quad (8)$$

где  $E_0$  – его амплитуда,  $\tau_p$  – длительность. Волна (8) хорошо аппроксимирует, например, терагерцовое излучение фотопроводящих поверхностей полупроводников при их облучении фемтосекундными импульсами [14]. Соответственно спектр такого излучения имеет вид

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E^{(0)}(0, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} E_0 \tau_p^2 i \omega e^{-\left(\frac{\tau_p \omega}{2}\right)^2}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что максимум спектра приходится на центральную частоту  $\omega_0 = \sqrt{2}/\tau_p$ .

Решение (7) с учетом (8) может быть приведено к виду

$$E^{(1)}(z', \tau) = -3E_0 \left(\frac{\tau^2}{\tau_p^3}\right) \left(1 - 2\frac{\tau^2}{\tau_p^2}\right) \left(\exp\left(-\frac{3\tau^2}{\tau_p^2}\right)\right) (z' - z'_0), \quad (10)$$

спектр которого имеет вид:

$$G^{(1)}(\omega) = \frac{\sqrt{3\pi}}{36} E_0^3 \tau_p^2 \omega^2 e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{\tau_p \omega}{2}\right)^2} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_p \omega}{3}\right)^2\right). \quad (11)$$

Из решения (11) следует, что спектральная плотность излучения, генерируемого в нелинейной среде, обращается в ноль на утроенной центральной частоте  $\omega = 3\sqrt{2}/\tau_p = 3\omega_0$ . Этот вывод чрезвычайно любопытен, так как генерация излучения на утроенных частотах – это классическое нелинейное оптическое явление в средах с кубической нелинейностью. Однако выяснилось, что для однопериодного импульса (8) для центральной частоты спектра исходного излучения это не так. Оценим теперь частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности генерируемого излучения на новых высоких частотах. Взяв производную от выражения (11) по частоте и приравняв ее к нулю, находим, что

$$\omega_{\max}^{(1)} = \sqrt{42}/\tau_p \approx 4,6\omega_0. \quad (12)$$

Таким образом, итерационное решение (4) уравнения динамики светового поля (1) для однопериодной на входе в нелинейную среду волны (8) в бездисперсионном приближении имеет вид

$$E(z', \tau) = E^{(0)}(\tau) + GE^{(1)}(z', \tau) = E_0 \frac{\tau}{\tau_p} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_p^2}\right) \times \left[1 - 3G\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right) \left(1 - 2\frac{\tau^2}{\tau_p^2}\right) \left(\exp\left(-\frac{2\tau^2}{\tau_p^2}\right)\right) (z' - z'_0)\right]. \quad (13)$$

### **Иллюстрации аналитического решения нелинейного уравнения динамики поля для граничного условия вида однопериодной волны**

На рис. 1 приведена иллюстрация решения (13) при  $G(z' - z'_0) = 0,3$ . На рис. 1, а, изображена рассчитанная в первой итерации поправка (10) к электрическому полю волны, а на рис. 1, б, – поправка (11) к модулю спектра. Пунктиром показаны временная и спектральная структуры поля однопериодной волны на входе в среду. На рис. 1, в, приведено общее решение (13), которое описывает результат самовоздействия однопериодной оптической волны в нелинейной среде без учета ее дисперсии.

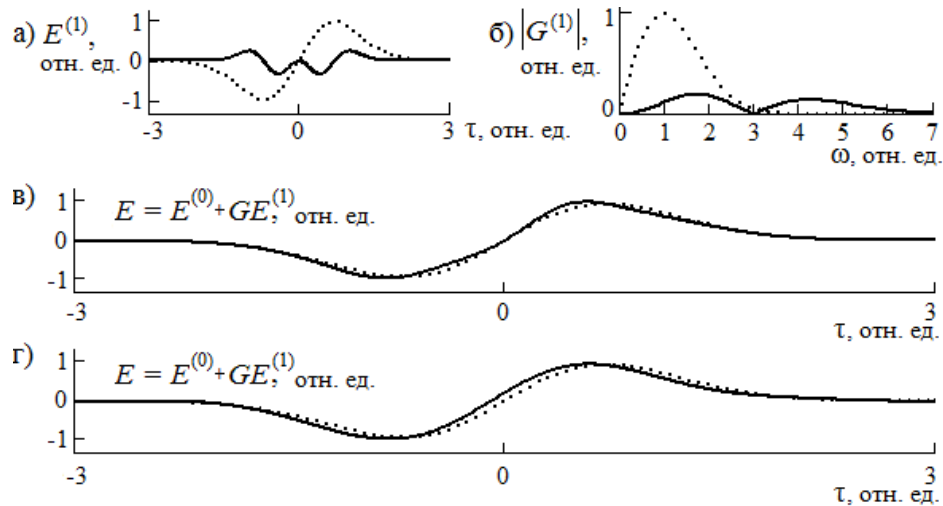


Рис. 1. Изменение временной и спектральной структур однопериодной оптической волны из-за ее самовоздействия в нелинейной диэлектрической среде: итерационная добавка к полю  $E^{(1)}$  (а) и модулю спектра  $G^{(1)}$  (б); результирующее поле с совместным действием эффектов фазовой само модуляции и генерации утроенных частот (в) и с учетом только эффекта фазовой само модуляции (г). Пунктиром показаны структуры поля и спектра начального импульса

Рис. 1, б, иллюстрирует обращение в ноль на утроенной центральной частоте модуля спектра  $G^{(1)}$  поправки (10) к полю волны. Видно, что генерируемая в нелинейной среде добавка к основным частотам излучения простирается от трех до семи центральных частот. Ее максимум находится на частоте в примерно 4,5 раза большей исходной центральной частоты волны. Из рис. 1, в, видно, что максимум и минимум однопериодной волны из-за самовоздействия излучения в нелинейной среде начинают запаздывать во времени. Под самовоздействием здесь будем понимать эффекты фазовой само модуляции и генерации в поле начального излучения утроенных частот, которые в бездисперсионной среде не разделимы. Видно, что при совместном влиянии этих явлений происходит и искажение временного профиля импульса. Для сравнения на рис. 2, г, приведено изменение временной структуры волны, которое происходило бы без учета эффекта генерации утроенных частот. Оно, естественно, полностью соответствует хорошо известному характеру фазовой само модуляции для импульсов из большого числа колебаний.

### Результаты численного моделирования эволюции исходно однопериодной оптической волны в нелинейной диэлектрической среде

Для численного моделирования динамики поля излучения в нелинейной оптической среде удобна другая нормировка уравнения (1). Введем новые переменные  $\bar{E} = E/E_0$ ,  $\bar{z} = a\omega_0^3 z$ ,  $\bar{t} = \omega_0 t$ , где  $E_0$  – максимальное значение напряженности электрического поля на входе в нелинейную среду,  $\omega_0$  – центральная частота излучения, и перейдем к «запаздывающему» времени  $\bar{\tau} = \bar{t} - N_0 \bar{z}/c$ . В новых переменных уравнение (1) приводится к виду [3, 8]

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial^3 \bar{E}}{\partial \bar{\tau}^3} + \bar{G} \bar{E}^2 \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{\tau}} = 0, \quad (14)$$

где описывающий вклад безынерционной кубической по полю нелинейности безразмерный коэффициент  $\bar{G} = cg E_0^2 / 3N_0 = 4n_2 I / ac\omega_0^2$ . Например, рассмотренному выше кристаллу ниобата лития в поле терагерцового излучения с центральной частотой 1,0 ТГц и интенсивностью  $I = 1,0 \cdot 10^8$  Вт/см<sup>2</sup> соответствует  $\bar{G} = 5,4 \cdot 10^{-2}$ . В качестве модели однопериодного импульса на входе среду (при  $\bar{z} = 0$ ) будем по-прежнему брать зависимость (8), которая в новых переменных принимает вид

$$E^{(0)}(0, \bar{t}) = \frac{\bar{t}}{\omega_0 \tau_p} \exp\left(-\frac{\bar{t}^2}{\omega_0^2 \tau_p^2}\right), \quad (15)$$

На рис. 2 приведены результаты численного моделирования по уравнению (14) эволюции временной структуры поля однопериодной волны (15) в среде с параметром  $\bar{G} = 5,4 \cdot 10^{-2}$ .

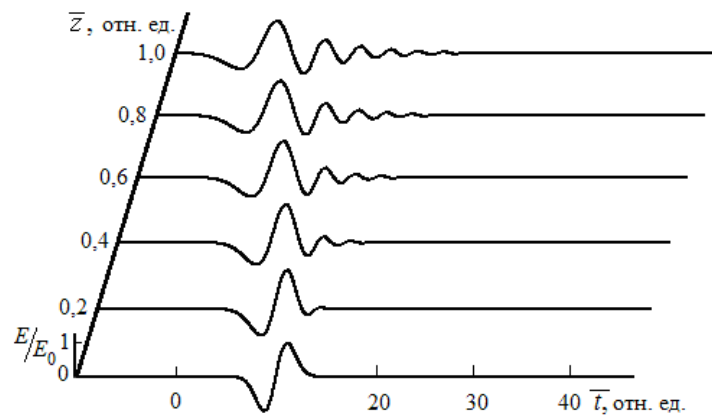


Рис. 2. Динамика электрического поля  $E$ , нормированного на максимальное значение входного поля  $E_0$ , в среде с параметром  $\bar{G} = 5,4 \cdot 10^{-2}$

Из рис. 2 видно, что уже на расстоянии  $\bar{z} = 1,0$  ( $z = 1,2$  мм) происходит увеличение длительности импульса, измеряемой по уровню половины максимальной амплитуды поля, за счет дисперсии линейного показателя преломления среды примерно в 4 раза. Расчеты показывают, что уширения спектра импульса при таком параметре  $\bar{G}$  практически не происходит, т.е. среда для излучения является линейной.

На рис. 3, 4 приведены аналогичные результаты численного моделирования по уравнению (14) эволюции временной и спектральной структур исходно однопериодной волны (15), распространяющейся в среде с параметром  $\bar{G} = 5,4$ . Из рис. 3 видно, что по мере генерации новых колебаний электрического поля на заднем фронте волны уже с расстояния  $\bar{z} = 0,4$  ( $z = 0,5$  мм) от основной волны отделяется импульс, максимальная амплитуда поля которого составляет величину порядка 2% амплитуды входного поля.

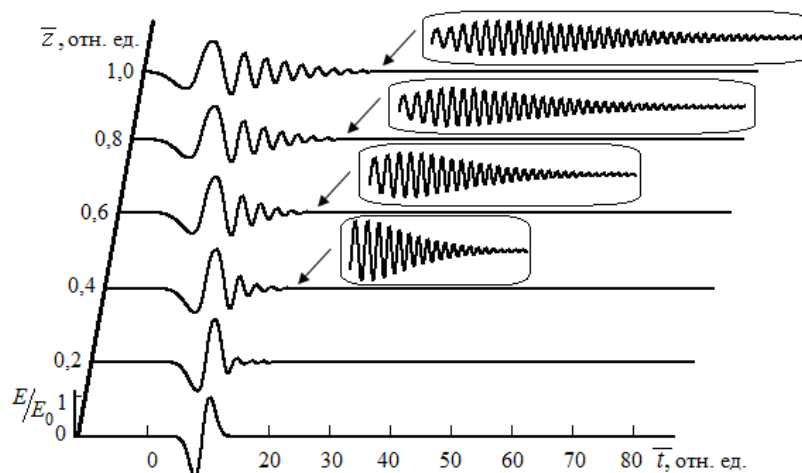


Рис. 3. Динамика электрического поля  $E$ , нормированного на максимальное значение входного поля  $E_0$ , в среде с параметром  $\bar{G} = 5,4$ . Во вставке изображено электрическое поле образующейся новой временной структуры

На рис. 4 приведена иллюстрация эволюции спектральной плотности  $G$  однопериодной волны в среде с параметром  $\bar{G} = 5,4$ , нормированной на максимальную входную спектральную плотность  $G_0$ . Из рисунка видно, что при распространении исходно однопериодной волны в среде с таким параметром  $\bar{G}$  происходит значительное смещение спектральной плотности как в высокочастотную область с характерным минимумом на частоте в примерно 3,5 раза большей начальной центральной частоты, так и в низкочастотную область с приблизительно 20% сдвигом максимума ее плотности. Видно, что происходит генерация волны с центральной частотой примерно в 4 раза большей центральной, спектральная плотность которой составляет величину порядка 3% от максимальной спектральной плотности.

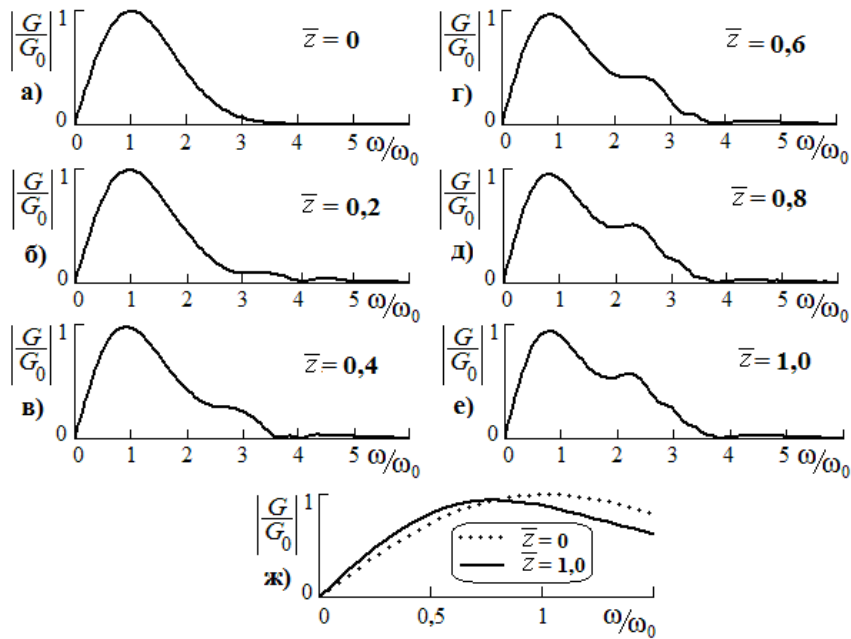


Рис. 4. Динамика модуля спектральной плотности  $G$ , нормированной на максимальную входную спектральную плотность  $G_0$ , в среде с параметром  $\bar{G} = 5,4$  (а–е). Смещение максимума спектральной плотности волны на выходе из среды в низкочастотную область (ж)

#### Заключение

В работе рассмотрены особенности фазовой самомодуляции световых волн, содержащих на входе в нелинейную среду лишь одно полное колебание светового поля. Показано, что уширение спектра однопериодных импульсов в изотропной диэлектрической среде с нормальной дисперсией и безынерционной кубической нелинейностью происходит как в высоко-, так и в низкочастотную область. Возникновения излучения утроенных частот не происходит, а генерируется волна с центральной частотой в примерно 4,5 раза большей исходной центральной частоты волны.

Работа поддержана грантами НШ-5707.2010.2 и РНП 2.1.1/4923.

#### Литература

1. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. – М.: Наука, 1988. – 312 с.
2. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир, 1996. – 324 с.
3. Козлов С.А., Самарцев В.В. Основы фемтосекундной оптики. – М.: Физматлит, 2009. – 292 с.
4. Беспалов В.Г., Козлов С.А., Сутягин А.Н., Шполянский Ю.А. Сверхуширение спектра интенсивных фемтосекундных лазерных импульсов и их временное сжатие до одного колебания светового поля // Оптический журнал. – 1998. – Т. 65. – № 10. – С. 85–88.
5. Белашенков Н.Р., Дроздов А.А., Козлов С.А., Шполянский Ю.А., Цыпкин А.Н. Фазовая самомодуляция фемтосекундных световых импульсов, спектры которых сверхуширены в диэлектриках с нормальной групповой дисперсией // Оптический журнал. – 2008. – Т. 75. – № 10. – С. 3–8.
6. Hebling J., Hoffmann M.C., Ka-Lo Yeh, Tóth G. and Keith A.N. Nonlinear lattice response observed through terahertz SPM // Springer Series in Chemical Physics. – 2009. – V. 92. – Part 8. – P. 651–653.
7. Крюков П.Г. Фемтосекундные импульсы. – М.: Физматлит, 2008. – 208 с.
8. Козлов С.А., Сазонов С.В. Нелинейное распространение импульсов длительностью в несколько колебаний светового поля в диэлектрических средах // ЖЭТФ. – 1997. – Т. 111. – № 2. – С. 404–418.
9. Беспалов В.Г., Козлов С.А., Шполянский Ю.А. Метод анализа динамики распространения фемтосекундных импульсов с непрерывным спектром в прозрачных оптических средах // Оптический журнал. – 2000. – Т. 67. – № 4. – С. 5–11.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
11. Palfalvi L., Hebling J., Kuhl J., Peter A. and Polgar K. Temperature dependence of the absorption and refraction of Mg-doped congruent and stoichiometric LiNbO<sub>3</sub> in the THz range // J. Appl. Phys. – 2005. – V. 97. – 123505.
12. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 384 с.

13. Буяновская Е.М., Козлов С.А. Закономерности взаимодействия встречных световых волн из малого числа колебаний в нелинейных диэлектрических средах // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – Т. 66. – № 2. – С. 23–29.
14. Беспалов В.Г., Крылов В.Н., Путилин С.Э., Стаселько Д.И. Генерация излучения в дальнем ИК диапазоне спектра при фемтосекундном оптическом возбуждении полупроводника InAs в магнитном поле // Оптика и спектроскопия. – 2002. – Т. 93. – № 1. – С. 158–162.

*Дроздов Аркадий Анатольевич*

– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, arkadiy.drozdov@gmail.com

*Козлов Сергей Аркадьевич*

– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор физ.-мат. наук, профессор, декан, kozlov@mail.ifmo.ru