

УДК 681.51.015

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТЫ
СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА

С.В. Арановский, А.А. Бобцов, А.А. Пыркин

Рассмотрена задача идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала. Показана практическая значимость рассматриваемой задачи, получена динамическая модель сигнала и предложен алгоритм идентификации линейно меняющейся частоты. Приведен численный пример, иллюстрирующий работоспособность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: идентификация, линейно меняющаяся частота, синусоидальный сигнал.

Введение

В работе рассматривается задача идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала вида $y(t) = A \sin(\omega t^2/2 + \varphi)$. Несмотря на кажущуюся математическую экзотичность задачи (традиционно строится алгоритм идентификации для сигналов $A \sin(\omega t + \varphi)$), необходимо отметить, что проблема идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала имеет реальное прикладное значение и может возникать, например, в задачах компенсации возмущений. Проблема идентификации постоянной частоты гармонического сигнала была хорошо изучена за последнее десятилетие, разработано большое число функционирующих в реальном времени алгоритмов [1–8]. В то же время задача идентификации переменной частоты синусоидального сигнала в литературе практически не рассматривается. На данный момент авторам не известны методы, позволяющие в реальном времени оценивать частоту такого сигнала. Существующие методы, в частности, алгоритм [8], позволяют оценивать частоту гармонического сигнала, имеющего трапецевидную форму (рис. 1), но не обеспечивают нулевую ошибку оценивания.

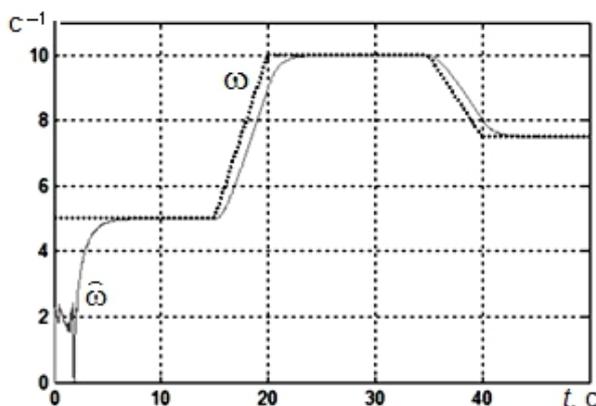


Рис. 1. Оценка частоты $\hat{\omega}$ при изменении частоты ω методом [8]

В работе ставится цель разработать алгоритм идентификации линейно меняющейся частоты гармонического сигнала.

Возмущения с линейно меняющейся частотой при управлении телескопом

Рассмотрим, как связана обсуждаемая в работе задача с прикладной проблемой компенсации возмущений при управлении телескопом. Широкое распространение в телескопостроении получили вентильные двигатели [9, 10]. Такие машины имеют много достоинств, но, к сожалению, не лишены недостатков. Одним из недостатков является наличие пульсирующего зубцового момента, который для трехфазных машин может быть описан как

$$M_p(\alpha) = M_a \sin\left(pn \frac{6}{2\pi} \alpha + \varphi_p\right), \quad (1)$$

где α — угол поворота двигателя; $M_p(\alpha)$ — значение зубцового момента в угле α ; M_a — амплитуда пульсаций момента; pn — число пар полюсов; φ_p — фаза зубцового момента. Очевидно, что если ось

телескопа вращается с постоянной скоростью $\dot{\alpha} = \text{const}$, то во временной области зубцовый момент описывается гармонической функцией $M_p(t) = M_a \sin(\omega_p t + \varphi_p)$ с частотой

$$\omega_p = pn \frac{6}{2\pi} \dot{\alpha} = \text{const}.$$

Проблема компенсации зубцового момента в приводах телескопов не нова. Она решалась, например, при построении систем управления группировкой телескопов VLT, Чили [11]. Однако при этом рассматривалась задача компенсации пульсаций момента только для той оси, приводами которой они вызваны. Естественно, что при этом значение угла α доступно прямому измерению, как и значение $\dot{\alpha}$, и задача компенсации сводится к определению только амплитуды и фазы сигнала при известной частоте.

Традиционно оптические телескопы включают в себя две оси – азимутальную и ось угла места, при этом в фотоприемном устройстве используются светочувствительные матрицы. Однако в ряде ситуаций оправдано использование вместо матрицы линейки светочувствительных элементов, размещенной на третьей оси телескопа – оси сканирования. В этом случае ось сканирования осуществляет периодические колебательные движения, а поступающие со светочувствительной линейки столбцы формируют полный кадр изображения. Недостатком такой конструкции является то, что, в отличие от азимутальной и угломестной осей, которые всегда ортогональны, угол между осью сканирования и азимутальной может меняться от 0° до 90° и совпадает с углом наклона оси угла места к горизонту. Соответственно моменты, создаваемые приводами одной оси, оказывают возмущающее воздействие на вторую ось с коэффициентом пропорциональности, равным косинусу угла между осями. Если угломестная ось ориентирована в зенит, то плоскость сканирования перпендикулярна азимутальной плоскости, и взаимное влияние осей отсутствует. Если же ось угла места ориентирована в горизонт, то взаимное влияние осей максимально, момент, создаваемый приводами азимутальной оси, полностью передается на ось сканирования, и наоборот.

Рассмотрим задачу компенсации пульсаций зубцового момента приводов азимутальной оси, передаваемых на сканирующую ось. Первый возможный подход заключается в передаче информации об угле поворота одной оси в систему управления другой осью. В этом случае задача компенсации становится тривиальной, но расплачиваться за это приходится увеличением информационного потока в каналах связи, появлением задержек и снижением максимальной частоты дискретизации систем управления. Второй путь – идентификация параметров возмущающего момента с его последующей компенсацией. Это потребует внедрения алгоритмов идентификации, но снизит объем передаваемой по каналам связи информации. Как было отмечено выше, при движении с постоянной скоростью зубцовый момент представляет собой гармоническую функцию времени с постоянной частотой. В этом случае для идентификации параметров возмущения (частоты, амплитуды и фазы) разработано большое число функционирующих в реальном времени алгоритмов [1–8], позволяющих решить задачу компенсации возмущения.

Более сложная задача идентификации возникает, если предположить, что траектория движения оси телескопа состоит из участков движения с постоянной скоростью (сопровождение медленных объектов) и участков равноускоренного движения (переход между различными объектами, сопровождение быстро движущихся объектов, проекция траекторий которых на азимутальную ось описывается параболой). В этом случае развитие зубцового момента (1) во времени будет описываться гармонической функцией с линейно меняющейся частотой, и для компенсации такого возмущения потребуется решить задачу идентификации линейно меняющейся частоты.

Математическая постановка задачи

Рассматривается синусоидальный сигнал вида

$$y(t) = A \sin(\omega t^2 / 2 + \varphi), \tag{2}$$

где A , ω и φ – неизвестные параметры. Ставится задача синтеза алгоритма идентификации неизвестной частоты ω .

Основной результат

Продифференцируем уравнение (2) трижды:

$$\ddot{y} = \theta(3ty + t^2 \dot{y})$$

или

$$p^3 y = \theta(3ty + t^2 py), \tag{3}$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; $\theta = -\omega^2$ – неизвестный параметр. Для оценки неизвестного параметра θ произведем параметризацию модели (3) следующим образом:

$$p(p+1)^2 y = (2p^2 + p)y + \theta(3ty + t^2 py),$$

причем $t^2 py = pt^2 y - 2ty$. Запишем:

$$py = \frac{2p^2 + p}{(p+1)^2} y + \theta \frac{3}{(p+1)^2} ty + \theta \frac{p}{(p+1)^2} t^2 y - \theta \frac{2}{(p+1)^2} ty. \quad (4)$$

Введем следующие обозначения

$$\xi_1 = \frac{1}{(p+1)^2} y, \quad \xi_2 = \frac{1}{(p+1)^2} ty, \quad \xi_3 = \frac{1}{(p+1)^2} t^2 y,$$

при подстановке которых, выражение (4) примет вид

$$py = (2p^2 + p)\xi_1 + \theta\xi_2 + \theta\xi_3.$$

Тогда можно записать параметризованную модель в виде

$$\dot{y} = 2\ddot{\xi}_1 + \dot{\xi}_1 + \theta\xi_2 + \theta\xi_3 = 2\ddot{\xi}_1 + \dot{\xi}_1 + \theta(\xi_2 + \xi_3) = \varsigma_1 + \theta\varsigma_2, \quad (5)$$

где $\varsigma_1 = 2\ddot{\xi}_1 + \dot{\xi}_1$ и $\varsigma_2 = \xi_2 + \xi_3$ – измеряемые сигналы.

Теперь построим алгоритм идентификации параметра θ . Временно предположим, что параметр θ известен. Запишем алгоритм идентификации следующим образом:

$$\dot{\hat{\theta}} = -k\varsigma_2^2\hat{\theta} + k\varsigma_2^2\theta, \quad (6)$$

где коэффициент $k > 0$. Для доказательства работоспособности алгоритма (6) рассмотрим ошибку $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. Дифференцируя $\tilde{\theta}$, получаем

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}} = -k\varsigma_2^2\tilde{\theta}.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = \tilde{\theta}^2 / 2. \quad (7)$$

Дифференцируя (7), получаем

$$\dot{V} = -k\varsigma_2^2\tilde{\theta}^2 = -k\varsigma_2^2V \leq 0. \quad (8)$$

Из (8) следует устойчивость положения равновесия $\tilde{\theta} = 0$. Интегрируя (8), получаем

$$V(t) = V(t_0)e^{-k\alpha(t)},$$

где t_0 – начальный момент времени; $\alpha(t) = \int_{t_0}^t \varsigma_2^2 d\tau$. Легко видеть, что $\alpha(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, а, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0$.

Таким образом, алгоритм идентификации (6) обеспечивает сходимость настраиваемого параметра $\hat{\theta}(t)$ к θ . Теперь построим реализуемый алгоритм, в котором параметр θ не измеряется. Из уравнения (5) находим

$$\dot{y} - \varsigma_1 = \theta\varsigma_2. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), имеем

$$\dot{\hat{\theta}} = -k\varsigma_2^2\hat{\theta} + k\varsigma_2\dot{y} - k\varsigma_2\varsigma_1. \quad (10)$$

Поскольку переменная \dot{y} неизвестна, то введем в рассмотрение сигнал

$$\chi = \hat{\theta} - k\varsigma_2 y. \quad (11)$$

Дифференцируя (11), получаем реализацию алгоритма идентификации вида

$$\dot{\chi} = -k\varsigma_2^2\hat{\theta} - k\dot{\varsigma}_2 y - k\varsigma_2\varsigma_1, \quad (12)$$

$$\hat{\theta} = \chi + k\varsigma_2 y. \quad (13)$$

Очевидно, что при дифференцировании (13) будет получено выражение (10). Алгоритм идентификации (12), (13) обеспечивает сходимость $\hat{\theta}(t)$ к θ . Для поиска параметра ω достаточно провести следующую несложную процедуру $\hat{\omega} = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}$, где $\hat{\omega}$ – оценка частоты ω .

Пример

Рассмотрим сигнал вида (2) с параметрами $\omega = 0,5$; $A = 2$; $\varphi = 1$. На рис. 2 представлена временная диаграмма сигнала $y(t)$. На рис. 3, а, б, представлены результаты моделирования алгоритма идентификации параметра ω с коэффициентами $k = 1$ и $k = 0,01$ соответственно. На рис. 4, а, б, представлены графики переходных процессов оценки $\hat{\omega}$ при коэффициентах алгоритма идентификации $k = 0,001$ и $k = 0,2$ для сигнала $y(t)$ с параметрами $\omega = 2$; $A = 5$; $\varphi = -2$.

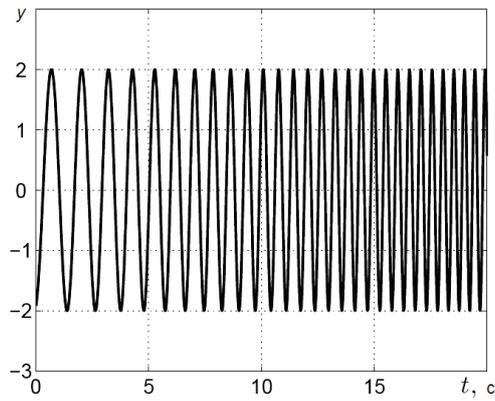


Рис. 2. Временная диаграмма сигнала $y(t)$

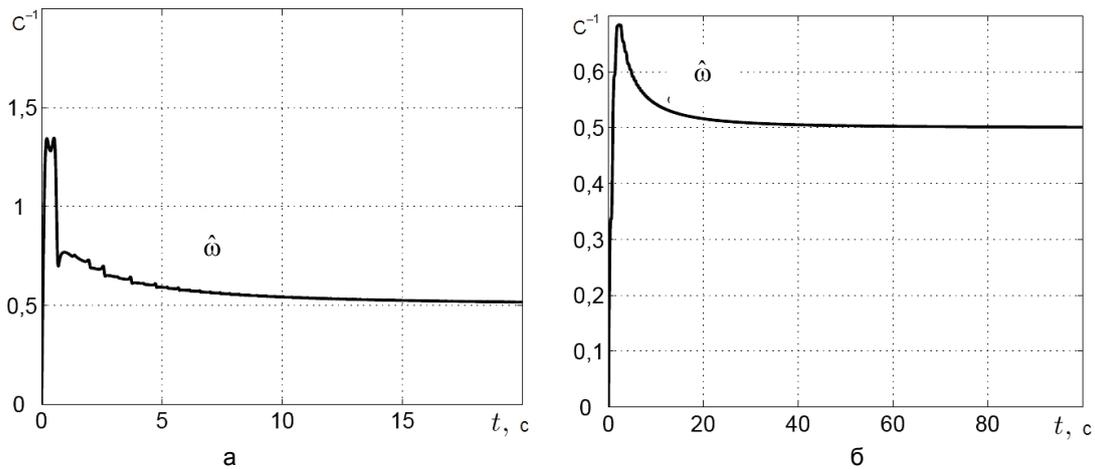


Рис. 3. Переходные процессы для переменной $\hat{\omega}$ при $\omega = 0,5$: $k = 1$ (а); $k = 0,01$ (б)

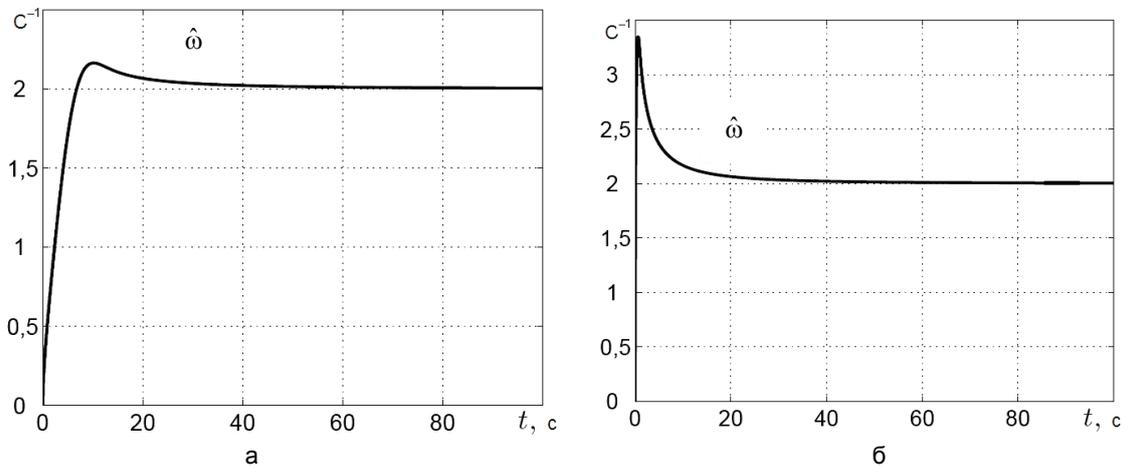


Рис. 4. Переходные процессы для переменной $\hat{\omega}$ при $\omega = 2$: $k = 0,001$ (а); $k = 0,2$ (б)

Заключение

Рассмотрена задача идентификации частоты синусоидального сигнала с линейно меняющейся частотой. Получена динамическая модель генератора сигнала вида $y(t) = A \sin(\omega t^2 / 2 + \varphi)$, предложен алгоритм идентификации вида (12), (13), обеспечивающий сходимость настраиваемого параметра $\hat{\omega}$ к истинному значению ω . Предложенный алгоритм имеет настроечный коэффициент k , варьируя который можно изменять быстродействие алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (контракт № 11.519.11.4007).

Литература

1. Арановский С.В., Бобцов А.А., Кремлев А.С., Лукьянова Г.В., Николаев Н.А. Идентификация частоты смещенного синусоидального сигнала // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 9. – С. 3–9.
2. Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А. Адаптивный наблюдатель неизвестного синусоидального выходного возмущения для линейного объекта // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 11. – С. 108–116.
3. Арановский С.В., Бобцов А.А., Кремлев А.С. Компенсация конечномерного квазигармонического возмущения для нелинейного объекта // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 4. – С. 14–21.
4. Арановский С.В., Бобцов А.А., Никифоров В.О. Синтез наблюдателя для нелинейного объекта в условиях гармонического возмущения, приложенного к выходной переменной // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 3. – С. 32–39.
5. Marino R., Tomei R. Global Estimation of Unknown Frequencies // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – № 47. – P. 1324–1328.
6. Hou M. Amplitude and frequency estimator of a sinusoid // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2005. – V. 50. – P. 855–858.
7. Marino R., Santosuosso G.L. Output regulation for a class of nonlinear systems with unknown sinusoidal disturbances // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. – 2005. – С. 3321–3326.
8. Stanislav Aranovskiy, Alexey Bobtsov, Artem Kremlev, Nikolay Nikolaev, Olga Slita. Identification of frequency of biased harmonic signal // European Journal of Control. – 2010. – № 4. – P. 129–139.
9. Васильев В.Н., Томасов В.С., Шаргородский В.Д., Садовников М.А. Состояние и перспективы развития прецизионных электроприводов комплексов высокоточных наблюдений // Изв. вузов. Приборостроение. – 2008. – № 6. – С. 5–12.
10. Аракелян А.К., Афанасьев А.А. Вентильные электрические машины. – М.: Энергоатомиздат, 1997. – 236 с.
11. Erm T., Sandrock S. Adaptive correction of periodic errors improves telescope performance // Proceedings of the American Control Conference. – 2005. – V. 6. – P. 3776–3777.

*Арановский Станислав
Владимирович*

– Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, ст. научный сотрудник, s.aranovskiy@gmail.com

Бобцов Алексей Алексеевич

– Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, декан, bobtsov@mail.ifmo.ru

Пыркин Антон Александрович

– Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, мл. научный сотрудник, a.pyrkin@gmail.com