

УДК 681.785.552.2

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ВОГНУТОЙ ПРОПУСКАЮЩЕЙ ГОЛОГРАММНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ

Э.Р. Муслимов

Проведено теоретическое исследование абберационных и фокусирующих свойств новой элементной базы – пропускающей вогнутой голограммной дифракционной решетки (ПВГДР). Показана возможность построения на основе такой решетки спектрографа с плоским полем, приведены выражения для определения параметров схемы и параметров записи. Проведено моделирование ряда схем таких спектрографов, на его основе выработаны рекомендации к выбору конструктивных параметров.

**Ключевые слова:** ПВГДР, абберационная функция, коррекция аббераций, плоское поле, моделирование.

### Введение

Известно, что вогнутая дифракционная решетка может являться единственным элементом оптической схемы спектрального прибора. Кроме того, голограммные дифракционные решетки (ГДР) в сравнении с классическими нарезными обладают широкими возможностями для коррекции аббераций. По сравнению же с неклассическими нарезными решетками они характеризуются меньшим уровнем рассеянного света, равномерностью дифракционной эффективности по спектральному диапазону, а также возможностью изготовления решеток больших размеров на поверхности любой формы. При этом на практике наиболее распространены отражательные вогнутые голограммные дифракционные решетки (ВГДР). В то же время все вышеперечисленные достоинства относятся и к ПВГДР. Помимо этого, использование таких дифракционных решеток позволило бы в ряде случаев получить более простые конструктивные решения [1], а также, учитывая успехи в технологии их изготовления, увеличить дифракционную эффективность [2]. В связи с этим представляется актуальным исследование абберационных свойств пропускающих дифракционных решеток и их коррекционных возможностей.

### Теоретическое исследование

ГДР представляет собой зарегистрированную на светочувствительном материале интерференционную картину, образованную двумя когерентными пучками света. Записывающие когерентные пучки получают, разделяя светоделительными зеркалами излучение лазера. При этом форма штрихов и расстояние между ними определяются положением записывающих источников и длиной волны записи [3]. Совмещенная схема записи и работы ПВГДР приведена на рис. 1.

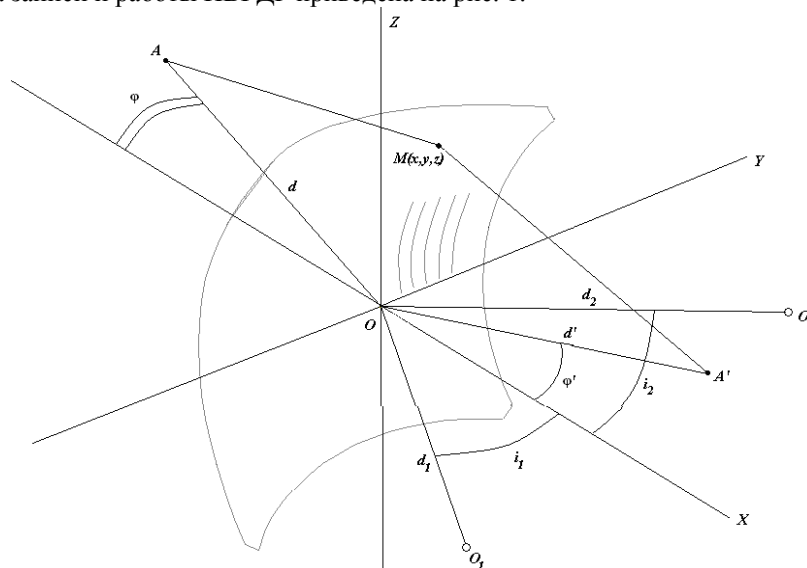


Рис. 1. Схема записи и работы ПВГДР:  $A$  – точка на входной щели;  $A'$  – ее изображение;  $O$  – вершина решетки;  $M(x, y, z)$  – произвольная точка на поверхности решетки;  $O_1$  и  $O_2$  – точечные источники записи;  $\varphi$ ,  $\varphi'$  – углы падения и дифракции соответственно;  $d$ ,  $d'$  – удаление от вершины решетки точек  $A$  и  $A'$  соответственно;  $(i_1, d_1)$  и  $(i_2, d_2)$  – полярные координаты источников записи

Для исследования абберационных и фокусирующих свойств вогнутых отражательных дифракционных решеток принято использовать характеристическую (абберационную) функцию [4–7]. Аналогичный подход для исследования свойств классической (имеющей эквидистантные прямолинейные штрихи) пропускающей вогнутой дифракционной решетки использован в работе [5]. Развита в этой работе теория распространена на ПВГДР.

Функция оптического пути для луча, выходящего из центра входной щели и дифрагированного в произвольной точке решетки, имеет вид

$$V = (AM) + (MA') - k\lambda m(y, z),$$

где  $k$  – порядок дифракции;  $\lambda$  – длина волны;  $m(y, z)$  – количество штрихов на поверхности решетки между точками  $O$  и  $M$ ;  $N$  – число штрихов на 1 мм поверхности решетки в ее центре;  $R$  – радиус поверхности решетки;  $\lambda_0$  – длина волны записи.

Разлагая функцию оптического пути в ряд и группируя слагаемые, получаем:

$$V = -yF_0 + \frac{y^2}{2R}F_1 + \frac{z^2}{2R}F_2 + \frac{y^3}{2R^2}F_3 + \frac{yz^2}{2R^2}F_4 + \frac{y^4}{8R^3}F_5 + \frac{y^2z^2}{4R^3}F_6 + \frac{z^4}{8R^3}F_7 + \dots \quad (1)$$

Именно соотношение (1) и принято называть абберационной функцией.

Условие  $F_0 = 0$  дает основное уравнение пропускающей ГДР. Каждый из коэффициентов в разложении (1) характеризует определенную абберацию:  $F_1$  характеризует фокусировку в меридиональной плоскости и абберацию дефокусировки соответственно;  $F_2$  – фокусировку в сагиттальной плоскости и астигматизм соответственно;  $F_3$  – меридиональную кому;  $F_4$  – сагиттальную кому;  $F_5, F_6, F_7$  – абберации третьих порядков [7]. Равенство коэффициента  $F_i$  нулю является условием коррекции соответствующей абберации.

Первые четыре коэффициента имеют следующий вид:

$$F_0 = -\sin \varphi + \sin \varphi' - \frac{k\lambda}{\lambda_0} (\sin i_1 - \sin i_2),$$

$$F_1 = R \left[ \left( -\frac{\cos^2 \varphi}{d} + \frac{\cos \varphi}{R} \right) + \left( \frac{\cos^2 \varphi'}{d'} - \frac{\cos \varphi'}{R} \right) \right] - \frac{k\lambda}{\lambda_0} H_1,$$

$$F_2 = R \left[ \left( -\frac{1}{d} + \frac{\cos \varphi}{R} \right) + \left( \frac{1}{d'} - \frac{\cos \varphi'}{R} \right) \right] - \frac{k\lambda}{\lambda_0} H_2,$$

$$F_3 = R^2 \left[ -\frac{\sin \varphi}{d} \left( -\frac{\cos^2 \varphi}{d} + \frac{\cos \varphi}{R} \right) - \frac{\sin \varphi'}{d'} \left( \frac{\cos^2 \varphi'}{d'} - \frac{\cos \varphi'}{R} \right) \right] - \frac{k\lambda}{\lambda_0} H_3,$$

где слагаемые, содержащие параметры голографирования, обозначены в виде коэффициентов

$$H_1 = R \left( \frac{\cos^2 i_1}{d_1} - \frac{\cos i_1}{R} \right) - R \left( \frac{\cos^2 i_2}{d_2} - \frac{\cos i_2}{R} \right),$$

$$H_2 = R \left( \frac{1}{d_1} - \frac{\cos i_1}{R} \right) - R \left( \frac{1}{d_2} - \frac{\cos i_2}{R} \right), \quad (2)$$

$$H_3 = R^2 \frac{\sin i_1}{d_1} \left( \frac{\cos^2 i_1}{d_1} - \frac{\cos i_1}{R} \right) - R^2 \frac{\sin i_2}{d_2} \left( \frac{\cos^2 i_2}{d_2} - \frac{\cos i_2}{R} \right).$$

Отметим, что соотношения (2) для коэффициентов, определяющих координаты источников записи, полностью совпадают с соответствующими соотношениями для отражательной голограммной решетки. Это позволяет при определении параметров записи по известным значениям  $H_i$  использовать алгоритмы и программы, разработанные для отражательных голограммных решеток.

Для использования современных серийных фотоэлектрических многоканальных приемников необходимо, чтобы спектр фокусировался на плоскости. Найдем соотношения, позволяющие определить параметры схемы и записи ПВГДР, при которых спектр располагается на плоскости, перпендикулярной лучу средней длины волны  $\lambda_{cp}$ , т.е.

$$d' = \frac{d'_{cp}}{\cos(\varphi'_0 - \varphi')}.$$

Минимизации дефокусировки по полю будем добиваться по методу наименьших квадратов. Из практики известно, что для остальных аббераций достаточно осуществлять коррекцию на средней длине

волны [7]. Все условия записываются для центра входной щели, положение которой считается заданным. Тогда условия коррекции aberrаций на плоскости задаются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial H_1} = 0, \\ \frac{\partial I_1}{\partial d'_{cp}} = 0, \\ R \left( -\frac{1}{d} + \frac{\cos \varphi}{R} \right) + \left( \frac{1}{d'_{cp}} - \frac{\cos \varphi'_0}{R} \right) - \frac{k\lambda_{cp}}{\lambda_0} H_2 = 0, \\ R^2 \left[ -\frac{\sin \varphi}{d} \left( -\frac{\cos^2 \varphi}{d} + \frac{\cos \varphi}{R} \right) + \frac{\sin \varphi'_0}{d'_{cp}} \left( \frac{\cos^2 \varphi'_0}{d'_{cp}} - \frac{\cos \varphi'_0}{R} \right) \right] - \frac{k\lambda_{cp}}{\lambda_0} H_3 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$I_1 = \int_{\varphi'_1}^{\varphi'_2} F_1 d\varphi'.$$

Учтем также зависимость длины волны от угла дифракции

$$\frac{\sin \varphi - \sin \varphi'}{\sin i_1 - \sin i_2} = \frac{k\lambda}{\lambda_0}$$

и частоты штрихов от углов голографирования

$$\sin i_1 - \sin i_2 = N\lambda_0.$$

Тогда из первых двух уравнений системы (3) после интегрирования и дифференцирования получим систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{R}{6d'_{cp}} a_1 + a_2 - \frac{H_1}{N\lambda_0} a_3 = 0, \\ -\frac{R}{d'_{cp}} a_3 - a_4 + \frac{H_1}{N\lambda_0} a_5 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos 2\varphi'_0 \sin \varphi' \cos^5 \varphi' + (5 \cos 2\varphi'_0 + 6 \sin^2 \varphi'_0) \left( \frac{3}{8} \varphi' + \frac{1}{4} \sin 2\varphi' + \frac{1}{32} \sin 4\varphi' \right) - \sin 2\varphi'_0 \cos^6 \varphi' \Big|_{\varphi'_1}^{\varphi'_2}, \\ a_2 &= S \cos \varphi'_0 \left( \sin \varphi' - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi' \right) - S \sin \varphi'_0 \frac{\cos^3 \varphi'}{3} - \cos \varphi'_0 \left( \frac{3}{8} \varphi' + \frac{1}{4} \sin 2\varphi' + \frac{1}{32} \sin 4\varphi' \right) + \sin \varphi'_0 \frac{\cos^4 \varphi'}{4} \Big|_{\varphi'_1}^{\varphi'_2}, \\ a_3 &= -\cos \varphi'_0 \frac{\cos^4 \varphi'}{4} + \sin \varphi'_0 \left( \frac{\varphi'}{8} - \frac{\sin 4\varphi'}{32} \right) - \sin \varphi \cos \varphi'_0 \left( \sin \varphi' - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi' \right) + \sin \varphi \sin \varphi'_0 \frac{\cos^3 \varphi'}{3} \Big|_{\varphi'_1}^{\varphi'_2}, \\ a_4 &= -S \cos \varphi' - S \sin \varphi \cdot \varphi' - \frac{\sin^2 \varphi'}{2} + \sin \varphi \sin \varphi' \Big|_{\varphi'_1}^{\varphi'_2}, \\ a_5 &= \frac{1}{2} \varphi' - \frac{\sin 2\varphi'}{4} + \sin^2 \varphi \cdot \varphi' + 2 \sin \varphi \cos \varphi' \Big|_{\varphi'_1}^{\varphi'_2}, \\ S &= -\frac{R \cos^2 \varphi}{d} + \cos \varphi. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (4), находим значения  $H_1$  и  $d'_{cp}$ , затем из уравнений (3) определяем  $H_2$  и  $H_3$ , после чего из уравнений (2) при известных значениях  $N$  и  $\lambda_0$  можем найти координаты источников записи. Найти решение системы уравнений (4), которое соответствовало бы действительной входной щели ( $d > 0$ ), не удастся, поэтому решетка должна устанавливаться в сходящемся пучке, формируемом некоторой предшествующей оптической системой (например, объективом астрономического телескопа).

Результаты моделирования схем спектрографов с ПВГДР

В качестве примера рассмотрим спектрограф нормального падения с плоским полем для видимого спектрального диапазона 380–770 нм на основе ПВГДР, имеющей радиус кривизны 400 мм и число штрихов на 1 мм в вершине 255. Обратная линейная дисперсия равна 9,593 нм/мм. Входная щель расположена в центре кривизны решетки, т.е.  $d = 400$  мм. Проведя расчет для указанных параметров при длине волны записи  $\lambda_0 = 441,6$  нм, получим:

$$d'_{cp} = 403,87 \text{ мм}, H_1 = -0,016016, H_2 = -0,00095, H_3 = -0,002237.$$

Тогда параметры записи решетки имеют следующие значения:

$$d_1 = 1498,501219 \text{ мм}, d_2 = 1199,562949 \text{ мм}, i_1 = 34^\circ 41' 32'', i_2 = 27^\circ 9' 55''.$$

Результаты расчета aberrаций и аппаратных функций (АФ) спектрографа для входной щели шириной 0,035 мм с шагом 0,007 мм представлены в табл. 1, где используются следующие обозначения:  $\delta y'$  – ширина АФ на половине высоты;  $\Delta y'$  – составляющие aberrаций в меридиональной плоскости;  $\Delta z'$  – составляющие aberrаций в сагиттальной плоскости;  $y'$  – координата точки пересечения главного луча с поверхностью изображения;  $m$  и  $M$  – меридиональная и сагиттальная координаты точки пересечения главного луча с плоскостью входного зрачка соответственно. За меридиональную плоскость при этом принимается плоскость дисперсии, а за сагиттальную – плоскость, перпендикулярная ей и содержащая входную щель. В качестве подложки использован ахроматический мениск.

$m$	$M$	$\lambda_{cp} = 575 \text{ нм}$		$\lambda_1 = 380 \text{ нм}$		$\lambda_2 = 770 \text{ нм}$	
		$y' = 0 \text{ мм}$		$y' = -20,252 \text{ мм}$		$y' = 20,404 \text{ мм}$	
		$\Delta y'$	$\Delta z'$	$\Delta y'$	$\Delta z'$	$\Delta y'$	$\Delta z'$
20	0	0,0165	0	-0,0333	0	-0,0330	0
14,1	0	0,0116	0	-0,0236	0	-0,0228	0
-14,1	0	-0,0117	0	0,0243	0	0,0205	0
-20	0	-0,0167	0	0,0348	0	0,0282	0
0	-14,1	0	0	0	-0,0988	0	0,0987
0	-20	0	0	0	-0,1401	0	0,1400
$\delta y'$		0,036		0,067		0,059	
$\delta \lambda, \text{ нм}$		0,345		0,643		0,566	

Таблица 1. Результаты расчета aberrаций и АФ спектрографа

Схема может также иметь светосильный вариант с относительным отверстием 1:3 (под относительным отверстием понимается отношение диаметра входного зрачка к удалению плоскости спектра)  $d'_{cp}$ . В этом случае для устранения остаточной дефокусировки вблизи плоскости изображения устанавливается цилиндрическая линза.

Для определения оптимальных параметров спектрографа было проведено моделирование ряда схем. Во всех схемах рабочим являлся видимый спектральный диапазон, использовалось нормальное падение. При этом во всех схемах сохранялись значения относительного отверстия (1:10) и длины спектра (не более 32,2 мм). Выполнение последнего условия достигалось варьированием частоты штрихов  $N$ .

Зависимость предела разрешения от радиуса решетки, полученная по результатам моделирования, представлена на рис. 2. Видно, что предел разрешения, как и aberrации, уменьшается с увеличением радиуса (и расстояния до щели). Следовательно, для получения меньших aberrаций при одинаковой светосиле и размерах приемника необходимо увеличивать габариты спектрографа, которые, как правило, ограничены. С другой стороны, исследование технологичности различных схем спектрографов показало, что наиболее выгодными с технологической точки зрения являются схемы с небольшими значениями радиуса кривизны и частоты штрихов ПВГДР, поскольку для них реализуема компактная схема записи.

Однако в указанных схемах не учитывались aberrации оптической системы, формирующей сходящийся пучок. Определенный практический интерес представляет случай, когда изображение входной щели формируется в нулевом порядке другой ГДР – отражательной. Такая установка позволит существенно расширить возможности прибора – работать одновременно в двух спектральных диапазонах с различной дисперсией, используя общую систему обработки спектров. В этом случае отражательная решетка вносит значительные aberrации, в первую очередь – большой астигматизм. Коррекция астигматизма возможна за счет введения асферики на первой поверхности подложки. Результаты aberrационного расчета для спектрографа с указанными выше параметрами, работающего в нулевом порядке серийного спектрографа ДФС-458, представлены в табл. 2. Первая поверхность подложки является торической, при

этом  $R_m=402,83$ ;  $R_s=223,00$ , где  $R_m$  и  $R_s$  – радиусы кривизны в меридиональном и сагиттальном сечениях соответственно.

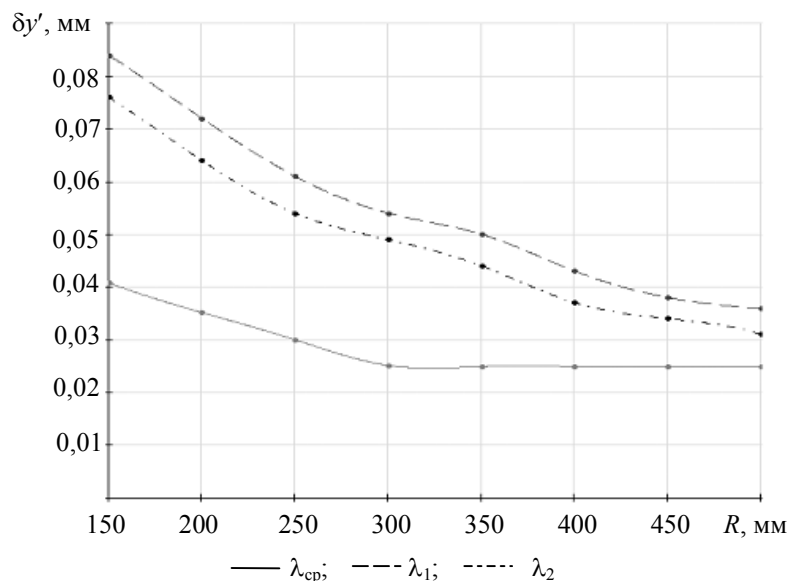


Рис. 2. Зависимость предела разрешения спектрографа с ПВГДР от радиуса решетки

$m$	$M$	$\lambda_{cp}=575$ нм $y'=0$ мм		$\lambda_1=380$ нм, $y'=-20,25$ мм		$\lambda_2=770$ нм $y'=20,40$ мм	
		$\Delta y'$	$\Delta z'$	$\Delta y'$	$\Delta z'$	$\Delta y'$	$\Delta z'$
28	0	0,0526	0	-0,0848	0	-0,0827	0
14	0	0,0132	0	-0,0295	0	-0,0285	0
-14	0	-0,0154	0	0,0010	0	0,0002	0
-28	0	-0,0619	0	-0,0291	0	-0,0303	0
0	15	0,0165	0,0381	0,0160	-0,1528	0,0170	0,1523
0	30	0,0660	0,0744	0,0639	-0,3075	0,0679	0,3028

Таблица 2. Результаты абберационного расчета для спектрографа с отражательной решеткой

### Выводы

Таким образом, проведенные исследования показали, что ВПГДР обладает абберационными и фокусирующими свойствами, отличными от свойств отражательных решеток, и на ее основе могут быть получены перспективные схемы спектральных приборов.

### Литература

1. Нагулин Ю.С., Павлычева Н.К. Плоская прозрачная дифракционная решетка в сходящемся пучке // Оптико-механическая промышленность. – 1978. – № 7. – С. 73–74.
2. Батомункуев Ю.Ц., Мещеряков Н.А. Внеосевые объемные голограммные элементы для ближнего инфракрасного диапазона спектра // Изв. вузов. Приборостроение. – 2009. – Т. 52. – № 6. – С. 43–47.
3. Пейсахсон И.В. Оптика спектральных приборов. – 2-е изд. – Л.: Машиностроение, 1975. – 312 с.
4. Beutler H.G. The theory of the concave grating // J. Opt. Soc. Am. – 1945. – V. 35. – P. 311–350.
5. Noda H., Namioka T., Seya M. Geometric theory of the grating // J. Opt. Soc. Am. – 1974. – V. 64. – № 8. – P. 1031–1042.
6. Majumdar K., Singh Mahipal. On the theory of concave transmission grating // Optics Communications. – 1970. – V. 1. – Is. 7. – P. 329–333.
7. Павлычева Н.К. Спектральные приборы с неклассическими дифракционными решетками. – Казань: Изд-во Казан. ГТУ, 2003. – 198 с.

Муслимов Эдуард Ринатович – Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, студент, ehduard-muslimv@rambler.ru