

УДК 517/519:62.50:681.306

**ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ  
ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ  
АНТРОПОКОМПОНЕНТОВ-ОПЕРАТОРОВ В СОСТАВЕ  
СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Н.А. Дударенко, М.В. Полякова, А.В. Ушаков**

Ставится задача формирования векторно-матричного модельного описания (МО) сложной динамической системы (СДС) с антропокомпонентами-операторами на основе интервальных представлений. С использованием аппарата интервальной арифметики и алгебры формируется оценка роста значения относительной интервальности системных компонентов МО СДС при переходе от передаточных функций к векторно-матричному представлению метода пространства состояний. По полученным оценкам определяется степень применимости аппарата теории чувствительности в рамках функции чувствительности первого порядка для оценки вариаций функционалов вырождения СДС на угловых реализациях интервальных системных параметров критериальных матриц.

**Ключевые слова:** интервальный системный параметр, векторно-матричное представление, сложная динамическая система, оценка относительной интервальности, интервальность функционала вырождения.

**Введение**

Проблема, вынесенная в заголовок статьи, возникает, когда исследователь анализирует СДС на предмет ее возможного вырождения. Статья носит технологический характер и посвящена случаю, когда параметры системы – интервальные, причем построение критериальной матрицы опирается на векторно-матричное описание СДС.

В статье рассматривается процесс формирования интервальных векторно-матричных модельных представлений сложных динамических систем с антропокомпонентами-операторами, реализуемый по канонической двухшаговой схеме. Первый шаг этой схемы состоит в формировании передаточных функций антропокомпонентов-операторов с интервальными системными параметрами. Второй шаг состоит в переходе от аппарата передаточных функций к аппарату векторно-матричных представлений метода пространства состояний с использованием процедур интервальной алгебры, поэтому встает задача контроля роста относительной интервальности системных компонентов. Последнее обстоятельство авторами берется под особый контроль в связи с тем, что при решении задач оценки интервальности функционалов вырождения используется аппарат чувствительности в рамках функции чувствительности первого порядка, корректность применимости которого ограничена известными рамками [1].

**Формирование интервальных векторно-матричных модельных представлений  
антропокомпонентов-операторов в составе сложных динамических систем**

Сформируем интервальные векторно-матричные представления антропокомпонентов-операторов с учетом: эффективности их деятельности на различных этапах рабочей смены и характера возложенной на них функциональной нагрузки в технологическом процессе.

Рассмотрим варианты модельных описаний антропокомпонентов-операторов, относящихся к классу «информационных операторов» (ИО). Так, первый вариант модельного представления описывает поведение оператора в составе СДС, занятого в обработке информационного потока, характеризующегося заметной динамикой его модификации. Примерами первого варианта модельного описания антропокомпонентов-операторов являются представители таких профессий, как пилоты летательных аппаратов, механики-водители танков, водители транспортных средств и т.д.

Передаточная функция с интервальными системными параметрами для описания отношения «вход–выход» антропокомпонента-оператора первого варианта, полученная на основе библиографического анализа проблемы [2], обычно задается в форме

$$[W_{uoi}(s)] = \frac{[k_1]([T_{11}]s + 1)}{([T_{12}]s + 1)([T_{13}]s + 1)} \cdot e^{-[\tau_1]s}, \tag{1}$$

где  $[k_1]$  – интервальный коэффициент, характеризующий передачу воспринимаемой антропокомпонентом-оператором «картинной информации» в моторное движение конкретного физиологического органа информационного оператора;  $[T_{11}]$ ,  $[T_{12}]$ ,  $[T_{13}]$  – интервальные постоянные времени: дифференцирующего

звена, математически учитывающего способность упреждать (экстраполировать) развитие информационного процесса антропокомпонентом-оператором; процесса восприятия информации антропокомпонентом-оператором, вызванного несовершенством ее представления и адаптацией оператора к ней; инерционной реакции, вызванной нервно-мышечной динамикой физиологического органа антропокомпонента-оператора, соответственно;  $[\tau_1]$  – величина чистого запаздывания, определяемая тренированностью антропокомпонента-оператора. Значения интервальных величин:  $[k_1] = [0,75; 1,25]$ ;  $[T_{11}] = [1,35; 2,25]$  с;  $[T_{12}] = [15; 25]$  с;  $[T_{13}] = [0,81; 1,36]$  с;  $[\tau] = [0,15; 0,25]$  с.

Второй вариант модельного представления описывает поведение антропокомпонента-оператора в составе СДС, обрабатывающего информационный поток с заметным уровнем информационной однотипности и монотонности. Примерами этого модельного описания являются представители таких профессий, как диспетчеры дистанционного управления распределенными технологическими ресурсами, операторы автоматизированных рабочих мест; аналитики энергосистем, инерционных технологических процессов и т.д.

Передаточная функция с интервальными системными параметрами для описания отношения «вход–выход» антропокомпонента-оператора второго варианта, полученная на основе библиографического анализа проблемы [2], задается в форме

$$[W_{uo2}(s)] = \frac{[k_2]([T_{21}]s + 1)}{([T_{22}]s + 1)s} \cdot e^{-[\tau_2]s}, \quad (2)$$

где  $[k_2]$  – интервальный коэффициент, характеризующий передачу воспринимаемой «картинной информации» в моторное движение физиологического органа антропокомпонента-оператора;  $[T_{21}]$ ,  $[T_{22}]$  – интервальные постоянные времени:  $[T_{21}]$  характеризует способность антропокомпонента-оператора предвидеть развитие информационного процесса;  $[T_{22}]$  – совокупная временная оценка длительности процесса восприятия информации, вызванная несовершенством ее представления и уровнем адаптируемости к ней антропокомпонента-оператора (кроме того, она характеризует естественную задержку реакции антропокомпонента-оператора, связанную с динамикой нервно-мышечной системы человека);  $[\tau_2]$  – величина реакции запаздывания, определяемая тренированностью антропокомпонента-оператора;  $1/s$  – интегрирующее звено в передаточной функции отражает способность антропокомпонента-оператора накапливать опыт. Значения интервальных величин:  $[k_2] = [0,75; 1,25]$ ;  $[T_{21}] = [1,35; 2,25]$  с;  $[T_{22}] = [15; 25]$  с;  $[\tau] = [0,15; 0,25]$  с.

Теперь обратимся к модельному описанию класса «технологических операторов» (ТО) с интервальными системными параметрами. Примерами антропокомпонентов, принадлежащих этому классу, являются представители профессий, занятых в формировании материальных потоков, связанных с обработкой и формированием узлов и деталей, функциональное соединение которых образует готовый потребительский продукт. Для построения передаточной функции с учетом эффективности работы антропокомпонента-оператора в течение рабочей смены приведем кривую на рисунке [3].



Рисунок. Кривая эффективности деятельности антропокомпонента-оператора на разных этапах рабочей смены: ВР – темп «вработывания»; ОЭ – фаза оптимальной эффективности деятельности антропокомпонента; ПК – фаза полной компенсации; НК – фаза неустойчивой компенсации; КП – фаза конечного прорыва

Для модели ТО выделим темп «вработывания» и темп уставания. Последний, согласно рисунку, формируется, начиная с этапа полной компенсации, и имеет место до конца рабочей смены. Выбранные факторы влияют в течение рабочей смены на производительность антропокомпонента-оператора. Учитывая их, передаточная функция с интервальными параметрами для модели ТО примет вид

$$[W_3(s)] = \frac{[T_{31}]s}{[T_{31}]s+1} \cdot \frac{1}{[T_{32}]s+1} \cdot \frac{1}{s}, \quad (3)$$

где  $[T_{31}]$ ,  $[T_{32}]$  – интервальные постоянные времени: нарастания усталости (спадание производительности труда) по экспоненциальному закону у антропокомпонента-оператора; нарастания производительности труда («вработывание») антропокомпонента-оператора с началом рабочей смены соответственно;  $1/s$  – интегрирующее звено, которое отражает процесс накопления результата выполнения технологического задания антропокомпонентом-оператором по обработке и формированию узлов и деталей, функциональное соединение которых образует готовый потребительский продукт.

Если воспользоваться экспоненциальной аппроксимацией отрезков кривой рисунка, то для постоянных времени можно записать  $[T_{31}] = [20850; 34750]c$ ;  $[T_{32}] = [600; 1800]c$ .

Охарактеризуем интервальные системные параметры передаточных функций антропокомпонентов типа ИО и ТО оценками их относительной интервальности постоянных времени, задаваемых в форме

$$[\delta_I T_{ij}] = \frac{|\Delta T_{ij}|}{|T_{ij0}|} \leq 0,25 \quad (i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 3}); \quad [\delta_I \tau_i] = \frac{|\Delta \tau_i|}{|\tau_{i0}|} \leq 0,25 \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (4)$$

В соотношениях (4) заложены требования к величинам относительных интервальных оценок системных параметров, которые гарантируют обеспечение нормального функционирования СДС.

В ходе проведенной работы по формированию интервальных векторно-матричных модельных представлений сложных динамических систем с антропокомпонентами-операторами авторы сделали важное примечание: переход от аппарата передаточных функций к аппарату векторно-матричных представлений метода пространства состояний с использованием арифметических процедур приводит к накоплению относительных интервальностей композитарных матричных элементов, что наглядно представлено в таблице.

$\delta_I \{[\#]\} \%$	0	5	10	15	20	25	30	50
$\delta_I \{[*]\}^{-1} \%$	0	5	10	15	20	25	30	50
$\delta_I \{[(\circ)][(\bullet)]\} \%$	0	10,25	21	32,25	44,4	56,25	69	125
$\delta_I \{[(\bullet)][(*)]^{-1}\} \%$	0	5	19,8	29,33	38,46	47,05	55,04	80
$\delta_I \{[(\circ)][(\bullet)][(*)]^{-1}\} \%$	0	15,78	33,3	52,76	61,32	98,49	125,1	262,5

Таблица. Значения оценок относительных интервальностей композированных матричных компонентов

### Функционалы вырождения. Оценка их интервальности

Ограничимся динамической моделью ТО. Для него характерно то обстоятельство, что задание на рабочую смену математически представляет собой вынуждающую силу, а потому в качестве критериальной матрицы  $N$  следует брать матрицу  $N_e(t)$ , описывающую вынужденное движение системы по выходу [4], задаваемую в форме

$$N_e(t) = C(Te^{Et} - e^{Ft}T), \quad (5)$$

где матрица  $T$  удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра [5]

$$TE - FT = GP, \quad (6)$$

а матрица  $E$  представляет собой матрицу состояний модели задающего воздействия  $g(t)$ .

Для контроля вырождения воспользуемся аппаратом функционалов вырождения [4], определяемых выражением

$$J_v(N) = \alpha_v \{N\} / \alpha_1 \{N\}; \quad v = \overline{m, 1}, \quad (7)$$

где  $N$  –  $(m \times m)$  – критериальная матрица антропокомпонента, участвующего в технологическом процессе сложной динамической системы, а  $\alpha_v \{N\}; \quad v = \overline{m, 1}$  – элементы алгебраического спектра сингулярных чисел матрицы  $N$ . Если критериальная матрица  $N$  оказывается интервальной, т.е. представляемой в форме

$$[N] = N_0 + [\Delta N], \quad (8)$$

где  $N_0$  – медианная составляющая интервальной критериальной матрицы  $[N]$  с фиксированными скалярными компонентами, а  $[\Delta N]$  – симметричный интервальный матричный компонент интервальной

критериальной матрицы  $[N]$ , то интервальным становится и каждый функционал  $J_v(N)$  вырождения критериальной матрицы  $N$ , для которого становится справедливой запись

$$J_v\{[N]\} = [J_v(N)] = J_{v0}(N) + [\Delta J_v(N)] = J_{v0}(N) + \left[ \underline{\Delta J_v(N)}; \overline{\Delta J_v(N)} \right] \quad (9)$$

и который можно охарактеризовать оценкой его относительной интервальности, вычисляемой в силу соотношения

$$\delta_I J_v = \left| \frac{[\Delta J_v]}{J_{v0}} \right|. \quad (10)$$

Введем гипотезу об относительной интервальности всех элементов модельного представления СДС с антропокомпонентами, которая состоит в предположении, что величина этой интервальности не нарушает возможности корректного использования аппарата теории чувствительности [1] в рамках функции чувствительности первого порядка.

### Оценка интервальных компонентов функционалов вырождения СДС с антропокомпонентами с помощью функции чувствительности сингулярных чисел

Осуществим параметризацию в соответствии с правилом: каждый элемент матрицы, имеющий интервальную природу, представим в форме зависимости его от относительного параметра  $q$  с номинальным значением  $q_0$ , равным нулю ( $q_0 = 0$ ), и вариацией, равной оценке относительной интервальности этого параметра, так что интервальный системный компонент  $[[*]]$  получает представление  $[[*]] = (*)_0 + [\Delta(*)] = [ \{(*)_0\} \cdot (1 - q_*) , \{(*)_0\} \cdot (1 + q_*) ] = [ \{(*)_0\} \cdot (1 \pm q_*) ] : |q_*| \leq \delta_I(*).$

**Утверждение.** Функция чувствительности  $\alpha_{iq_j}$  сингулярного числа  $\alpha_i(q) \in \sigma_\alpha \{N(q)\}$  к вариации  $j$ -го компонента  $q_j$ ;  $j = \overline{1, p}$ ;  $1 \leq p \leq (m \times m)$  вектора параметров  $q$  относительно его номинального значения  $q_0 = 0$  может быть вычислена в силу соотношения

$$\alpha_{iq_j} = (U^T)^i N_{q_j} V_i = (U^T N_{q_j} V_i)_{ii}. \quad \square \quad (11)$$

Доказательство утверждения приведено в [1]. ■

Представим функционал вырождения  $J_v(q)$  как функцию от векторного параметра  $q$  в мультипликативной форме

$$J_v(q) = \alpha_v \{q\} \cdot \alpha_1^{-1} \{q\}. \quad (12)$$

Тогда функция чувствительности  $J_{vq_j}$  функционала вырождения  $J_v(q)$  к вариации  $j$ -го элемента

$q_j$  вектора  $q$ , вычисляемая в силу определения  $J_{vq_j} = \left. \frac{\Delta J_v(q)}{\Delta q_j} \right|_{q=q_0} : j = \overline{1, p}$ , может быть представлена с

использованием функций чувствительности  $\alpha_{iq_j}$  сингулярных чисел  $\alpha_i (i = \overline{1, m})$  в форме

$$J_{vq_j} = \alpha_{vq_j} \cdot \alpha_1^{-1} - \alpha_v \cdot \alpha_1^{-2} \alpha_{v1q_j}. \quad (13)$$

Выражение (13) для функции чувствительности  $J_{vq_j}$  функционала вырождения  $J_v(q)$  позволяет записать для него полную вариацию  $\Delta J_v = \Delta J_v(\Delta q)$ , определяемую соотношением

$$\Delta J_v = S_v \Delta q, \quad (14)$$

где  $S_v = \text{row} \{ J_{vq_j} : j = \overline{1, p} \}$  – матрица-строка функций чувствительности функционала вырождения  $J_v(q)$ ,  $\Delta q = \text{col} \{ \Delta q_j : j = \overline{1, p} \}$  – вектор-столбец полных вариаций системных параметров.

В силу того, что  $\Delta q$  является интервальным, сохраняется интервальность полной вариации  $\Delta J_v = \Delta J_v(\Delta q)$  функционала вырождения, так что оказывается справедливой запись

$$[\Delta J_v] = \left[ \underline{\Delta J_v}, \overline{\Delta J_v} \right], \quad \underline{\Delta J_v} = -\overline{\Delta J_v}, \quad \overline{\Delta J_v} = \max_{\Delta q} \|\Delta J(\Delta q)\| = \sum_{i=1}^p J_{vq_j} |\Delta q_j| \text{sgn } J_{vq_j}. \quad (15)$$

Использование аппарата функций чувствительности сингулярных чисел критериальных матриц позволяет с помощью эффективной вычислительной процедуры конструировать интервальный компонент в форме (15) интервального функционала вырождения (9), порождаемого интервальностью критериальной матрицы, на основе представления (8).

### **Заключение**

Решена задача формирования интервальных векторно-матричных модельных представлений антропо-компонентов-операторов в составе сложных динамических систем. Для решения задачи оценки возможного вырождения СДС, в технологическом процессе которого участвуют антропокомпоненты-операторы с интервальными параметрами, с использованием интервальных функционалов вырождения сформирована эффективная вычислительная процедура, использующая возможности аппарата теории параметрической чувствительности алгебраического спектра сингулярных чисел критериальной матрицы.

### **Литература**

1. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2002. – 218 с.
2. Jury E.I. and Pavlidis T. A Literature Survey of Biocontrol Systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1963. – AC-8. – P. 210–217.
3. Шипилов А.И., Шипилова О.А. Высокая работоспособность персонала – забота кадровика // Кадры предприятия. – 2003. – № 3. – С. 7–15.
4. Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В. Вырождение производственной динамической системы, вызванное усталостью ее антропокомпонентов // Изв.вузов. Приборостроение. – 2009. – Т. 52. – № 11. – С. 66–72.
5. Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В. Алгебраическая постановка задачи контроля системного вырождения сложных технических систем // Мехатроника. Автоматизация. Управление. – 2010. – № 5. – С. 18–22.

*Дударенко Наталья Александровна* – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, dudarenko@yandex.ru

*Полякова Майя Вячеславовна* – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, 12noch@mail.ru

*Ушаков Анатолий Владимирович* – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, Ushakov-avg@yandex.ru