УДК 004.8

ИЕРАРХИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ СТРУКТУР АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ БАЙЕСОВСКОЙ СЕТИ КАК СИСТЕМА ГРАФОВ И ГИПЕРГРАФОВ[1]

А.А. Фильченков

Алгебраические байесовские сети относятся к классу логико-вероятностных графических моделей и позволяют осуществлять логико-вероятностный вывод, в том числе и в отношении знаний с неопределенностью, формализуемых через скалярные и интервальные оценки истинности пропозициональных формул. В работе рассмотрены глобальные структуры алгебраической байесовской сети, предложена их систематизация через гиперграфовое представление и выявлена их функциональная иерархия. Предложенная систематизация позволяет приложить методы теории гиперграфов к решению ряда задач анализа глобальных структур алгебраической байесовской сети, в частности, предложить и обосновать критерий для выявления ацикличности ее первичной структуры, а также формирует теоретическую основу алгоритмизации автоматического обучения указанных сетей.

Ключевые слова: алгебраическая байесовская сеть, графы смежности, машинное обучение, глобальная структура, вероятностные графические модели.

Введение

Алгебраические байесовские сети (АБС) лежат на стыке двух классов основных подходов, применяемых к построению математических моделей баз знаний с неопределенностью. Первый из этих классов – подходы, использующие оценки истинности над фрагментами знаний (ФЗ). Ко второму классу относятся так называемые «сетевые» подходы, заключающиеся в использовании графов для моделирования связей (причинно-следственных, логических, реляционных) между элементами или наборами элементов базы знаний [1, 2].

Так, АБС являются математической моделью базы ФЗ с неопределенностью, в которых, в свою очередь, математической моделью ФЗ выступает идеал конъюнктов с заданными над ними оценками вероятности их истинности [1]. Декомпозиция предметной области на базу (набор) таких моделей ФЗ, с прикладной точки зрения, позволяет снизить требования к вычислительным ресурсам (памяти и времени), необходимым для их хранения и обработки, а с теоретической – служит причиной для выделения двух структур АБС: первичной и вторичной.

Первичная структура АБС тесно связана с подходами первого из рассмотренных классов, поскольку представляет собой набор ФЗ. Вторичная же структура АБС – граф [3, 4], построенный над первичной структурой, – согласуется с «сетевыми» подходами. Эти две структурные особенности позволяют отнести АБС к классу логико-вероятностных графических моделей [5], из которого АБС выделяются возможностью использовать интервальные оценки вероятности истинности для представления неопределенности [1, 2]. Помимо первичной и вторичной структур у АБС выделяют также ряд других глобальных структур [6], тесно связанных друг с другом и играющих ключевую роль при решении задачи глобально-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты №№ 12-01-00945-а и 12-01-31202-мол_а.

го обучения АБС. Глобальное обучение АБС – это один из видов машинного (автоматического) обучения, развитие методов, моделей и алгоритмов которого является одной из самых актуальных задач в искусственном интеллекте [2, 5, 7, 8]. Цель данной работы – выявить отношения между указанными глобальными структурами АБС, т.е. описать их иерархию и систематизировать составляющие ее объекты на языке теории гиперграфов. Формально каждое подобное сопоставление является теоремой о представлении, однако и формулировки, и доказательства подобных теорем однотипны, поэтому для краткости мы не будем их воспроизводить в полном масштабе, ограничиваясь лишь содержательным обоснованием и заключением. Выявленные представления позволяют применить известные результаты теории графов (в частности, гиперграфов) в рамках задач теории АБС, в особенности в отношении вопросов построения ациклических и связных вторичных структур.

Будем везде далее под структурой понимать структуру АБС.

Фрагмент знаний и первичная структура как набор фрагментов знаний

Далее во всей работе будем следовать системе терминов теории АБС, основанной на работах [4, 6, 9, 10] и теории графов по [11]. Алфавит $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество атомарных пропозициональных формул (атомов). Фрагмент знаний – пара $C_{A'}, \boldsymbol{p}_{A'}$, где $C_{A'}$ – идеал конъюнктов над подалфавитом $A' \subset A$, не содержащий пустой конъюнкт:

$$C_{A'} = \left\{ \bigwedge_{x_i \in K} x_i | K \subseteq A', K \neq \varnothing \right\},$$

а $\boldsymbol{p}_{A'}$ – функция, заданная на элементах $C_{A'}$, значениями которой являются либо значения из отрезка $[0;1]$, (тогда говорят о скалярных оценках), либо отрезок $[a;b]: 0 \le a \le b \le 1$ (тогда говорят об интервальных оценках). Если ФЗ непротиворечив, то $\boldsymbol{p}_{A'}$ в скалярном случае является вероятностью, а в интервальном – ассоциирована с заданием внешней и внутренней меры. Фрагмент знаний, построенный над A' – подалфавитом A – будем обозначать как $\mathrm{KP}_{A'}$.

Первичной структурой MKP_A, заданной над алфавитом A, называется набор максимальных по включению ФЗ, построенных над подалфавитами A, образующими покрытие A:

$$\mathrm{MKP}_A = \{\mathrm{KP}_{A_i}\}_{i=1..N} : \forall 1 \le i, j \le N C_{A_i} \subsetneq C_{A_j}, A_i \subset A, \text{ причем } \bigcup_{i=1..N} A_i = A.$$

Первичная структура как гиперграф и протоструктура

В данной работе нас будут интересовать лишь структуры АБС (ее «топология»), а не вероятностная семантика, поэтому оказывается достаточным считать первичной структурой набор соответствующих ФЗ подалфавитов [4]. Все рассуждения о подалфавитах, связанные с отношением включения, операциями объединения и пересечения, оказываются справедливы и для построенных над ними идеалов.

Таким образом, в рамках рассмотрения глобальных структур, первичной структурой над алфавитом A называется набор максимальных по включению подалфавитов A, образующих покрытие A: $\mathrm{PS}_A = \{A_i\}_{i=1..N}, \forall 1 \le i, j \le N A_i \subsetneq A_j, A_i \subset A$, причем $\bigcup_{i=1..N} A_i = A.$

С точки зрения классической системы определений теории гиперграфов [11], которой мы будем придерживаться на протяжении всей работы, первичная структура является множеством ребер гиперграфа, вершинами которого выступают атомы A. Будем обозначать такой гиперграф как H_A: $H_{\mathrm{PS}_A} = \langle A, \mathrm{PS}_A \rangle$.

Теорема. Первичная структура является минимальным гиперграфом, т.е. она не содержит голых элементов, вложенных ребер и кратных ребер.

Доказательство. Благодаря максимальности подалфавитов первичная структура не содержит вложенных ребер, кратных ребер, а также голых ребер – т.е. ребер, степень которых равна нулю, поскольку любое неголое ребро будет содержать голое ребро. Благодаря тому, что подалфавиты образуют покрытие алфавита A, в гиперграфе нет голых вершин.

Протоструктурой *АБС* будем называть первичный граф первичной структуры, т.е. ненаправленный граф, построенный над тем же алфавитом, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они смежны в первичной структуре, т.е. входят в один и тот же подалфавит:

$$\mathrm{pS}(\mathrm{PS}_A) = L^{(2)}(H_{\mathrm{PS_A}}) = \langle A, \{(x_i, x_j) \mid \exists A_i \in \mathrm{PS}_A : x_i, x_j \in A_i\} \rangle .$$

Далее для краткости будем под протоструктурой понимать протоструктуру АБС.

Клики в протоструктуре будут совпадать с кликами в H_A, однако максимальные клики в протоструктуре вовсе не обязательно будут совпадать с подалфавитами, входящими в соответствующую первичную структуру.

Магистральная связность и вторичная структура

Если в предыдущем разделе мы строили графы над алфавитом, то теперь будем строить их над первичной структурой. В подобных графах введем функцию нагрузки (веса) вершины: нагрузкой (весом) вершины будем называть соответствующий ей подалфавит. Будем обозначать нагрузку вершины v как $W(v)$.

Сепаратор двух вершин v и u – пересечение нагрузок их вершин: $\mathrm{Sep}(v,u)=W(v)\cap W(u)$. Две вершины будем называть сочлененными, если их сепаратор непуст. Нагрузкой ребра в подобных графах будем называть сепаратор его концов: $W\left((v,u)\right)=\mathrm{Sep}(v,u)$.

Графы максимальных фрагментов знаний (граф МФЗ) над данной первичной структурой PS_A – графы, построенные над подалфавитами, входящими в PS_A, и в которых ребра возможны только сочлененными вершинами. Множество графов МФЗ над первичной структурой PS_A обозначим как $\mathbf{MKPG}(\mathrm{PS}_A)$:

$$G\in\mathbf{MKPG}(\mathrm{PS}_A)\Leftrightarrow\left(G=\langle \mathrm{PS}_A,E\rangle,(u,v)\in E\Rightarrow \mathrm{Sep}(v,u)\neq\varnothing\right).$$

В графе МФЗ нагрузка каждого ребра непуста. С точки зрения структуры гиперграфа H_{PS_A}, это означает, что для любых двух несмежных гиперребер соответствующие им вершины в графе МФЗ не могут быть связны.

Две сочлененные вершины в графе называются магистрально связными, если между ними существует магистральный путь, т.е. такой путь, в котором нагрузка каждой вершины содержит сепаратор концов этого пути. Множество пар магистрально связных сочлененных вершин в графе G обозначим как BBC_G:

$$\mathrm{BBC}_G=\{(u,v)\mid\exists\{x_i\}_{i=0}^{n}:u=x_0,v=x_n,$$

и $\forall i\in\overline{1,n}\ \ (x_{i-1},x_i)\in E(G),W(x_i)\supset W(u)\cap W(v)\}$.

Магистрально связный граф – граф, в котором каждая пара сочлененных вершин магистрально связна. Множество магистрально связных графов над первичной структурой PS_A обозначим как $\mathbf{BBcon}(\mathrm{PS}_A)$:

$$G\in\mathbf{BBcon}(\mathrm{PS}_A)\Leftrightarrow\left(G=\langle \mathrm{PS}_A,E\rangle,\ u,v\in \mathrm{PS}_A,\mathrm{Sep}(v,u)\neq\varnothing\Rightarrow(v,\ u)\in \mathrm{BBC}_G\right).$$

С точки зрения структуры гиперграфа H_{PS_A} это означает, что для каждой пары его смежных гиперребер можно указать последовательность гиперребер, содержащих пересечение их вершин, такую, что в магистрально связном графе соответствующая последовательность вершин образует путь между вершинами, соответствующими исходным гиперребрам (следует отметить, что последовательность может быть и пустой, тогда две соответствующие исходным гиперребрам вершины должны быть соединены ребром).

Граф смежности – магистрально связный граф МФЗ. Множество графов смежности над первичной структурой PS_A обозначим как $\mathbf{JG}(\mathrm{PS}_A)$: $\mathbf{JG}(\mathrm{PS}_A)=\mathbf{MKPG}(\mathrm{PS}_A)\cap\mathbf{BBcon}(\mathrm{PS}_A)$.

Максимальный граф смежности $G_{\max}(\mathrm{PS}_A)$ – граф смежности, число ребер которого максимально: $G_{\max}(\mathrm{PS}_A)=\mathrm{argmax}_{G\in\mathbf{JG}(\mathrm{PS}_A)}|E(G)|$. Заметим, что определение корректно, поскольку над заданной первичной структурой существует единственный максимальный граф смежности [4]. Он обладает рядом интересных особенностей. Во-первых, множество нагрузок его ребер совпадает с множеством непустых сепараторов соответствующей первичной структуры. Во-вторых, максимальный граф смежности является для соответствующего первичной структуре гиперграфа реберным графом (или, иначе, дуальным графом), т.е. графом над ребрами гиперграфа, в котором вершины соединены ребром, если соответствующие им гиперребра смежны:

$$G_{\max}(\mathrm{PS}_A)=L\left(H_{\mathrm{PS}_A}\right)=\left\langle E\left(H_{\mathrm{PS}_A}\right),E\right\rangle,(v,u)\in E\Leftrightarrow W(v)\cap W(u).$$

Минимальным графом смежности называется граф смежности, число ребер которого минимально. Множество минимальных графов смежности над первичной структурой PS_A будем обозначать как $\mathbf{MJG}(\mathrm{PS}_A)$: $\mathbf{MJG}(\mathrm{PS}_A)=\{G'\mid G'=\mathrm{argmin}_{G\in\mathbf{JG}(\mathrm{PS}_A)}|E(G)|\}$. В общем случае минимальных графов смежности может быть несколько [4].

Вторичной структурой может выступать какой-либо граф смежности. Обычно в качестве вторичной структуры рассматривают минимальный граф смежности. Задача обучения вторичной структуры сводится к построению вторичной структуры, оптимальной (или хотя бы приемлемой в определенном смысле) с точки зрения применения алгоритмов глобального логико-вероятностного вывода в АБС [12].

Связность и ацикличность первичной структуры

Вторичная структура, построенная над первичной структурой, должна быть связна; для работы известных алгоритмов апостериорного логико-вероятностного вывода также требуется, чтобы она была и ациклической [12]. Однако не над любой первичной структурой можно построить связную вторичную структуру, так же как и не над любой первичной структурой можно построить ациклическую вторичную структуру [13]. Первичная структура называется связной, если над ней возможно построить граф смежности, который бы являлся связным. Первичная структура называется ациклической, если над ней возможно построить граф смежности, который является ациклическим. Известно [13], что все графы смежности над первичной структурой связны или несвязны одновременно, а также то, что все минимальные по числу ребер графы смежности будут циклическими или ациклическими одновременно.

На основе выявленных в предыдущих разделах соответствий, позволяющих систематизировать объекты теории АБС через графовое и гиперграфовое представление, можно предложить короткое, но строгое и ясное доказательство для следующей теоремы.

Теорема. Первичная структура PS связна тогда и только тогда, когда связен соответствующий ей гиперграф H_{PS}.

Доказательство. Это следует непосредственно из того, что все графы смежности связны или несвязны одновременно, и из того, что максимальный граф смежности как дуальный граф гиперграфа связен или несвязен одновременно с протоструктурой как первичным графом гиперграфа [11].

Доказанная теорема дает простой и проверяемый за $O(n^2)$ критерий цикличности первичной структуры, где n – мощность алфавита A. Последнее важно в контексте синтеза первичной структуры АБС: поскольку известные алгоритмы логико-вероятностного вывода требуют, чтобы первичная структура АБС была ациклической, важно устанавливать это свойство на этапе синтеза именно первичной, а не вторичной структуры [13].

Третичная полиструктура и четвертичная структура

Сужением $G \downarrow U$ графа G (заданного над первичной структурой с введенной на вершинах и ребрах функцией нагрузки) на подалфавит U называется подграф G, состоящий только из тех вершин и ребер G, нагрузка которых содержит U : $G \downarrow U = \{V_i \mid V_i \in V(G), U \subseteq W(V_i)\}, \{E_i \mid E_i \in E(G), U \subseteq W(E_i)\}$.

Множество сужений графа G на произвольные нагрузки будем обозначать как $\mathbf{Nar}(G)$. Для краткости $\mathbf{Nar}(G_{\max}(\mathrm{PS}_A))$ будем обозначать как $\mathbf{Nar}(\mathrm{PS}_A)$. $\mathbf{Nar}(G)$ является частично-упорядоченным множеством, в котором отношение порядка задается включением сужений друг в друга: $(G \downarrow U) \prec (G \downarrow V) \Leftrightarrow (G \downarrow \mathrm{U}) \supset (G \downarrow V) \Leftrightarrow U \subset W$.

Значимой кликой с нагрузкой U для первичной структуры PS_A называется сужение графа $G_{\max}(\mathrm{PS}_A)$ на нагрузку, являющуюся непустым сепаратором (т.е. совпадающим с каким-либо ребром графа $G_{\max}(\mathrm{PS}_A)$). Множество значимых клик для первичной структуры PS_A обозначим как $\mathbf{Clique}(\mathrm{PS}_A)$. Оно как подмножество частично упорядоченного множества также является частично упорядоченным множеством.

Множество значимых клик образует набор гиперребер над МФЗ. Однако соответствующий гиперграф не является в общем случае минимальным, поскольку гиперребра содержатся в других гиперребрах (меньших их по определенному на множестве сужений порядку). В соответствии с этим над множеством $\mathbf{Clique}(\mathrm{PS}_A)$ можно построить направленный граф, в котором ребро от значимой клики P к значимой клике Q проведено тогда и только тогда, когда P содержит Q. Построенный таким образом граф называется родовым графом над множеством $\mathbf{Clique}(\mathrm{PS}_A)$. Родовой граф можно строить и над произвольным подмножеством $\mathbf{Nar}(\mathrm{PS}_A)$.

Родительский граф – это направленный граф над некоторым подмножеством $\mathbf{Nar}(\mathrm{PS}_A)$, в котором ребро проведено от P к Q тогда и только тогда, когда такое ребро содержится в родовом графе и одновременно не существует иного пути от P к Q. Определенный подобным образом родительский граф является транзитивной редукцией родового графа и выступает диаграммой Хассе для подмножества

$\mathbf{Nar}(\mathrm{PS}_A)$, над которым он построен, с порядком, индуцированным порядком над множеством $\mathbf{Nar}(\mathrm{PS}_A)$.

Третичной полиструктурой *АБС* (далее третичной полиструктурой) для данной первичной структуры PS_A называется множество графов (направленных, ненаправленных и гибридных), построенных над подмножествами $\mathbf{Nar}(\mathrm{PS}_A)$.

Замкнутым сверху множеством значимых клик $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS}_A)$ для данной первичной структуры PS_A называется множество $\mathbf{Clique}(\mathrm{PS}_A)$, к которому добавили праклику – сужение $G_{\max}(\mathrm{PS}_A)\downarrow\varnothing$. Праклика совпадает с $G_{\max}(\mathrm{PS}_A)$. Нагрузкой праклики является пустое множество. Благодаря этому множество нагрузок элементов $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS}_A)$ совпадает с множеством сепараторов PS_A.

Рассмотрим произвольный элемент $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS}_A)$, назовем его C_U, где U – его нагрузка. Через $\mathrm{Son}(C_U)$ будем обозначать подмножество $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS}_A)$, соответствующее сыновьям C_U в родительском графе над $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS}_A)$. Два элемента $\mathrm{Son}(C_U)$ называются собратьями, если они пересекаются как сужения ($\mathrm{Son}(C_U)$ – подмножество $\mathbf{Nar}(\mathrm{PS}_A)$, более того, даже $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS}_A)$):

$(S_i,S_j)\in \mathrm{Fel} \Leftrightarrow (S_i,S_j)\in \mathrm{Son}(C_U)\wedge S_i\cap S_j\neq\varnothing$.

Полусиблинговый граф HS_U для элемента $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS}_A)$ с нагрузкой U (назовем его C_U) – это граф, построенный над множеством сыновей C_U, ребра в котором проведены между собратьями: $\mathrm{HS}_U=\mathrm{Son}(C_U),\{(S_i,S_j)|S_i,S_j\in \mathrm{Fel}\}$.

Четвертичная структура – семейство полусиблинговых графов, построенных для каждого сепаратора: $\{\mathrm{HS}_U\mid U\in\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS}_A)\}$.

Родственный граф – гибридный граф, получаемый дополнением направленного родительского графа над $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS}_A)$ ненаправленными ребрами между собратьями. Согласно определению, родственный граф является элементом третичной полиструктуры, при этом множество его ненаправленных ребер совпадает с множеством ребер в четвертичной структуре.

Иерархия глобальных структур

Отношения, возникающие между введенными выше графовыми и гиперграфовыми объектами, представим явно – в виде единой иерархии.

Основной структурой на данный момент выступает первичная структура, с которой начинается построение АБС экспертом или программой, выявляющей в имеющихся данных скрытые закономерности, отражающие стохастические зависимости, независимости и условные независимости [1, 2].

Для данной первичной структуры PS однозначно восстанавливается ее протоструктура $\mathrm{pS}(\mathrm{PS})$. Протоструктура открывает один из возможных подходов осуществить глобальное автоматическое обучение первичной структуры (или первичной и вторичной структур одновременно) [12]. Кроме того, протоструктура может использоваться в анализе особенностей первичной структуры, в частности – для выявления ее связности и ацикличности [14].

Для данной первичной структуры однозначно определяется множество сужений $\mathbf{Nar}(\mathrm{PS})$, а также его подмножество – множество значимых клик $\mathbf{Clique}(\mathrm{PS})$. Последнее множество играет значительную роль в синтезе вторичной структуры, поскольку используется во всех известных алгоритмах ее построения [9, 14].

Множество $\mathbf{Nar}(\mathrm{PS})$, а также его подмножества, в особенности $\mathbf{Clique}(\mathrm{PS})$ выступают в роли множества вершин для графов (в том числе пустого графа), совокупность которых образует третичную полиструктуру. Элементы третичной полиструктуры используются для синтеза вторичной структуры, в том числе для синтеза всех возможных вариантов такой структуры [14]. Родительский граф над расширенным вверх множеством значимых клик $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS})$ используется для построения четвертичной структуры. Последняя тесно связана с третичной полиструктурой: в частности, она индуцирует ненаправленные ребра семейного графа над $\mathbf{Clique}^{\uparrow}(\mathrm{PS})$. Кроме того, наблюдается также и функциональная связь: и элементы третичной полиструктуры, и четвертичная структура используются для выявления ацикличности первичной структуры [15]. Следует отметить, что метод выявления ацикличности первичной структуры на основе четвертичной структуры дает сильный аналитический критерий, лежащий в основе алгоритмов устранения циклов первичной структуры [16].

Необходимо также указать, что родительский граф может использоваться для осуществления алгоритмов апостериорного логико-вероятностного вывода, причем предполагается, что по скорости работы и минимизации ошибок в вычислении оценок такой вывод окажется лучше, чем над любой вторичной структурой, построенной над той же первичной структурой.

Заключение

В рамках данной работы были рассмотрены и систематизированы глобальные структуры алгебраической байесовской сети, в частности, введено понятие ее протоструктуры. Протоструктура, элементы третичной полиструктуры и четвертичная структура не используются непосредственно для осуществления алгоритмов логико-вероятностного вывода или для обеспечения представления знаний, хранящихся в сети, однако играют важную роль в решении задач глобального обучения АБС (являющегося подвидом машинного обучения вероятностных графических моделей), в частности, непосредственно для построения вторичной структуры.

Благодаря представлению первичной структуры и элементов третичной полиструктуры как гиперграфов открывается возможность для использования существующих в этой теории результатов для решения задач в теории АБС; в частности, в работе был предложен критерий ацикличности первичной структуры, опирающийся на свойства протоструктуры.

Выделение объекта как структуры АБС основано на соображениях функциональности: каждая глобальная структура выполняет одну или несколько функций в рамках теории АБС. Иерархия структур строится на основе отношений зависимости при синтезе указанных структур. Так, на вершине иерархии структур, описанной в настоящей работе, оказывается первичная структура, тогда как вторичная структура оказывается в самом низу.

Литература

1. Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В. Байесовские сети: логико-вероятностный подход. – СПб: Наука, 2006. – 607 с.
2. Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И. Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. – СПб: Изд-во СПбГУ, 2009. – 400 с.
3. Тулупьев А.Л., Столяров Д.М., Ментюков М.В. Представление локальной и глобальной структуры алгебраической байесовской сети в Java-приложениях // Труды СПИИРАН. – 2007. – Вып. 5. – С. 71–99.
4. Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. Структурный анализ систем минимальных графов смежности // Труды СПИИРАН. – 2009. – Вып. 11. – С. 104–127.
5. Alpaydin E. Introduction to Machine Learning. – 2nd ed. – Cambridge, Mass. MIT Press, 2010. – 581 p.
6. Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. Третичная структура алгебраической байесовской сети // Труды СПИИРАН. – 2011. – Вып. 18. – С. 164–187.
7. Егоров К.В., Царев Ф.Н., Шалыто А.А. Применение генетического программирования для построения автоматов управления системами со сложным поведением на основе обучающих примеров и спецификации // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 5 (69). – С. 81–89.
8. Тихомиров А.В., Шалыто А.А. Применение генетического подхода для генерации клеточных автоматов // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2011. – № 2 (72). – С. 62–66.
9. Опарин В.В., Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В. Матроидное представление семейства графов смежности над набором фрагментов знаний // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 4 (68). – С. 73–76.
10. Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. Совпадение множеств минимальных и нередуцируемых графов смежности над первичной структурой алгебраической байесовской сети // Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2012. – Вып. 2. – С. 65–74.
11. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
12. Тулупьев А.Л., Фильченков А.А., Вальтман Н.А. Алгебраические байесовские сети: задачи автоматического обучения // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2011. – Т. 9. – № 11. – С. 57–61.
13. Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В. Управление глобальной структурой знаний в интеллектуальных системах, основанных на алгебраических байесовских сетях // Материалы конференции «Информационные технологии в управлении» (ИТУ–2012). – СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». – 2012. – С. 25–33.
14. Фильченков А.А. Алгоритмы построения элементов третичной полиструктуры алгебраической байесовской сети // Труды СПИИРАН. – 2011. – Вып. 3 (18). – С. 237–266.

15. Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. Косвенные признаки цикличности вторичной структуры алгебраической байесовской сети // «Гибридные и синергетические интеллектуальные системы: теория и практика». Материалы 1-го международного симпозиума. Т. 2. – Калининград: БФУ им. Канта, 2012. – С. 9–18.
16. Фильченков А.А., Фроленков К.В., Тулупьев А.Л. Устранение циклов во вторичной структуре алгебраической байесовской сети на основе анализа ее четвертичной структуры // Труды СПИИРАН. – 2012. – Вып. 21. – С. 143–156.

Фильченков Андрей Александрович – СПИИРАН,. мл. научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, аспирант, aaafil@mail.ru