

УДК 536.62

**АЛГОРИТМЫ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ**

К.В. Кириллов, Н.В. Пилипенко

Исследовано применение различных модификаций цифрового фильтра Калмана (ФК) для решения граничных и коэффициентных обратных задач теплопроводности. Приведено описание как математических моделей теплопереноса и измерений, так и алгоритмов вычислительных подпрограмм. Представлены результаты тестирования разработанных программ.

Ключевые слова: дифференциально-разностные модели теплопереноса, граничные и коэффициентные обратные задачи теплопроводности, фильтр Калмана.

Введение

Одной из наиболее проблемных задач теплотрии при исследовании промышленных объектов и технологических процессов является определение нестационарных условий теплообмена с помощью приемников теплового потока (ППП) по измеренным в них температурам или их разностям в отдельных точках. Такие задачи относятся к нестационарным граничным обратным задачам теплопроводности (ОЗТ). Если теплофизические характеристики (ТФХ) ППП известны лишь приблизительно, то необходимо решать комбинированную ОЗТ: граничную ОЗТ – по восстановлению входящих тепловых потоков и коэффициентную ОЗТ – по идентификации соответствующих ТФХ.

Решение прямой задачи теплопроводности

В качестве математической модели для описания одномерного теплопереноса в ППП различных типов применяются дифференциально-разностные модели (ДРМ), подробно описанные в работах [1–3], которые в векторно-матричной форме для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) имеют вид:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{T}(\tau) = F \cdot \mathbf{T}(\tau) + G \cdot \mathbf{U}(\tau),$$

где $\mathbf{T}(\tau)$ и $\mathbf{U}(\tau)$ – векторы состояния и управления; F и G – матрицы обратных связей и управления. Общее решение СОДУ (1) имеет следующий вид:

$$\mathbf{T}(\tau) = \Phi(\tau, \tau_0) \cdot \mathbf{T}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \Phi(\tau, \theta) \cdot G(\theta) \cdot \mathbf{U}(\theta) d\theta,$$

где $\Phi(\tau, \tau_0) = \exp(F(\tau - \tau_0))$ – переходная матрица состояния (матрица Коши) системы; τ_0 – начальный момент времени. Для программной реализации решения (2) вводится дискретное время $\tau_k = k\Delta\tau$, а также дискретные векторы $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}(\tau_k)$ и $\mathbf{U}_k = \mathbf{U}(\tau_k)$. Тогда дискретная переходная матрица $\Phi = \Phi_{k+1,k} = \Phi(\tau_{k+1}, \tau_k)$ может быть вычислена с требуемой точностью путем суммирования необходимого числа членов следующего бесконечного ряда:

$$\Phi = I + F\Delta\tau + \frac{1}{2!} F^2 \Delta\tau^2 + \dots + \frac{1}{m!} F^m \Delta\tau^m + \dots,$$

где I – единичная матрица. Решением прямой задачи теплопроводности (ПЗТ) в этом случае является последовательное применение для каждого момента времени следующей известной формуле расчета \mathbf{T}_{k+1} по значениям Φ и \mathbf{T}_k :

$$\mathbf{T}_{k+1} = \Phi \cdot \mathbf{T}_k + \frac{1}{2} (I + \Phi) \cdot G \cdot \mathbf{U}_k \cdot \Delta\tau.$$

Для учета измерительной схемы ППП и сведений о характере и величинах случайных погрешностей в измерениях температуры используется следующая модель измерений:

$$\mathbf{Y}_k = H \cdot \mathbf{T}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k,$$

где \mathbf{Y}_k и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ – векторы измерений и случайных погрешностей; H – матрица измерений.

Решение обратной задачи теплопроводности

В работах [1, 2] показана целесообразность использования метода параметрической идентификации для решения ОЗТ, так как последний удовлетворяет общепринятым требованиям устойчивости и сходимости вычислительных процедур, точности конечных результатов, универсальности, простоты программной реализации и др. Сущность же метода сводится к предварительной параметризации задачи и последующему нахождению оптимальной несмещенной оценки либо вектора состояния, либо вектора искомых параметров системы, дающей минимум нормы вектора невязки между измеренными в опыте температурами и прогнозами измерений температуры, рассчитанными по модели. Для получения оценок используется рекуррентная вычислительная процедура цифрового ФК. Рассмотрим подробнее два наиболее распространенных ФК: линейный ФК по расширенному вектору состояния системы и нелинейный ФК по вектору искомых параметров.

Под параметризацией ОЗТ понимается априорная кусочно-линейная аппроксимация подлежащего восстановлению теплового потока на всем интервале измерений, где в качестве системы базисных функций применяются *B*-сплайны 1-го порядка. Тогда на *z*-ом участке аппроксимации значение теплового потока находится по следующей формуле:

$$q_z = q_{az} \cdot Sp_{z-1}^{(1)} + q_{bz} \cdot Sp_z^{(1)},$$

где q_{az} и q_{bz} – значения теплового потока на левой и правой границах участка соответственно; $Sp_{z-1}^{(1)}$ и $Sp_z^{(1)}$ – *B*-сплайны. Линейный ФК по расширенному вектору состояния системы (ФК-1) основан на введении расширенного вектора состояния \mathbf{R}_{zk} :

$$\mathbf{R}_{zk} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{zk} \\ \mathbf{Q}_z \end{bmatrix} = [t_{1zk} \quad t_{2zk} \quad \dots \quad t_{nzk} \quad q_{az} \quad q_{bz}]^T,$$

где $\mathbf{Q}_z = [q_{az} \quad q_{bz}]^T$ – вектор искомых параметров, а также на соответствующем расширении ДРМ за счет очевидных уравнений $\dot{q}_{az} = 0$, $\dot{q}_{bz} = 0$ и простейшей коррекции правой части модели измерений.

Алгоритм ФК-1 для одного участка сплайн-аппроксимации описывается следующими уравнениями:

$$\hat{\mathbf{R}}_{k+1}^- = \Phi_{k+1,k} \cdot \hat{\mathbf{R}}_k^+ + \frac{1}{2} (I + \Phi_{k+1,k}) \cdot G_R \cdot \mathbf{U}_k \cdot \Delta \tau;$$

$$P_{k+1}^- = \Phi_{k+1,k} \cdot P_k^+ \cdot \Phi_{k+1,k}^T;$$

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- \cdot H_R^T \cdot (H_R P_{k+1}^- H_R^T + N)^{-1};$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{k+1}^+ = \mathbf{R}_{k+1}^- + K_{k+1} \cdot (\mathbf{Y}_{k+1} - H_R \hat{\mathbf{R}}_{k+1}^-);$$

$$P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1} H_R P_{k+1}^-;$$

где P – ковариационная матрица ошибок оценок; K – весовая матрица; N – ковариационная матрица случайных погрешностей измерений; индексы «-» и «+» обозначают априорные и апостериорные значения, соответственно. Алгоритм ФК-1 обеспечивает нахождение несмещенной оценки $\hat{\mathbf{R}}_k$, т.е.

$E\langle \hat{\mathbf{R}}_k \rangle = E\langle \mathbf{R}_k \rangle$, дающей минимум дискретной квадратичной функции невязки:

$$\Phi(\mathbf{R}_k) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{Y}_k - H_R \mathbf{R}_k)^T \cdot N^{-1} \cdot (\mathbf{Y}_k - H_R \mathbf{R}_k).$$

ФК-1 был реализован в виде программного комплекса «Heat Identification», который непосредственно восстанавливает как температуры, так и входящий тепловой поток, следовательно, его целесообразно использовать в тех случаях, когда начальное распределение температур по толщине ПТП известно лишь приблизительно.

Нелинейный ФК по вектору искомых параметров (ФК-2) основан на введении вектора $\mathbf{Q}_z = [\mathbf{Q}_{az} \quad \mathbf{Q}_{bz}]^T = [q_{a,z} \quad q_{b,z} \quad \lambda_z]^T$, для которого выполняется условие $\mathbf{Q} = const$. Тогда модель ПТП имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{Q}} = 0, \tag{1}$$

а модель измерений

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_k(\mathbf{Q}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}_k, \tag{2}$$

где $\mathbf{Y}_k(\mathbf{Q}_0)$ – модельный вектор измерений; \mathbf{Q}_0 – истинное значение вектора искомых параметров.

К модели (1), (2) может быть применен алгоритм дискретного нелинейного ФК, позволяющий получать рекуррентные оценки $\hat{\mathbf{Q}}_{k+1}$ вектора искомых параметров \mathbf{Q} и ковариационную матрицу P_{k+1} их ошибок по найденным на предыдущем k -ом шаге \mathbf{Q}_k , P_k и известному вектору измерений \mathbf{Y}_{k+1} . Алгоритм имеет следующий вид:

$$K_{k+1} = P_k \cdot \hat{H}_{k+1}^T \cdot (\hat{H}_{k+1} P_k \hat{H}_{k+1}^T + N)^{-1};$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{k+1} = \hat{\mathbf{Q}}_k + K_{k+1} \cdot (\mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_{k+1}(\hat{\mathbf{Q}}_k));$$

$$P_{k+1} = P_k - K_{k+1} \hat{H}_{k+1} P_k,$$

где \hat{H}_{k+1} – матрица функций чувствительности; $\mathbf{Y}_{k+1}(\hat{\mathbf{Q}}_k)$ – модельный вектор измерения, рассчитываемый по модели теплопереноса в ПТП для момента времени $k+1$ с использованием предыдущей оценки $\hat{\mathbf{Q}}_k$ вектора \mathbf{Q}_k .

Матрица функций чувствительности \hat{H}_{k+1} имеет следующий вид:

$$\hat{H}_{k+1} = \left. \frac{\partial \mathbf{Y}_k(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{1,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_a} & \frac{\partial y_{1,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_b} & \frac{\partial y_{1,k}(\mathbf{Q})}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{m,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_a} & \frac{\partial y_{m,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_b} & \frac{\partial y_{m,k}(\mathbf{Q})}{\partial \lambda} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\left. \frac{\partial y_{j,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_a} \right|_{\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_k}$, $\left. \frac{\partial y_{j,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_b} \right|_{\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_k}$ и $\left. \frac{\partial y_{j,k}(\mathbf{Q})}{\partial \lambda} \right|_{\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_k}$ – функции чувствительности j -го измерения к искомому параметру q_a , q_b и λ в $k+1$ момент времени.

Алгоритм ФК-2 обеспечивает нахождение несмещенной оценки $\hat{\mathbf{Q}}_k$, т.е. $E\langle \hat{\mathbf{Q}}_k \rangle = E\langle \mathbf{Q}_k \rangle$, дающей минимум дискретной квадратичной функции невязки:

$$\Phi(\mathbf{Q}_k) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_k(\mathbf{Q}_k))^T \cdot N^{-1} \cdot (\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_k(\mathbf{Q}_k)).$$

ФК-2 был реализован в виде программы «Heat Conduction», который непосредственно восстанавливает как тепловой поток, так и теплопроводность, следовательно, его целесообразно использовать в тех случаях, когда теплопроводность материала ПТП известна лишь приблизительно.

Результаты имитационного моделирования

Ниже представлены результаты математического моделирования для градиентного однородного ПТП типа вспомогательной стенки толщиной $h = 0,005$ м и со следующими ТФХ: $\lambda = 15$ Вт/(м·К); $c = 485$ Дж/(кг·К); $\rho = 8000$ кг/м³. Входящий в ПТП тепловой поток изменялся по закону $q_1(\tau) = [10000 \sin(0,1\tau) + 10000]$ Вт/м², на тыльной стороне $q_2(\tau) = 0$ Вт/м². Задавались температуры поверхности t_1 и второго блока t_2 при уровне погрешностей в измерениях $\sigma = 0,1^\circ\text{C}$; длине участка сплайн-аппроксимации $\Delta_z = 10 \cdot \Delta\tau$ ($\Delta\tau = 0,01$ с); начальном распределении $\mathbf{T}_0 = [30 \ \dots \ 30]^T$ °С.

Результаты восстановления теплового потока и температурного поля по толщине тепломера с помощью ФК-1 представлены на рис. 1. Начальные оценки принимались вдвое меньше эталонных: $\hat{\mathbf{R}}_0 = [15 \ \dots \ 15 \ 5000 \ 5000]^T$, а начальное значение ковариационной матрицы $P_0 = \text{diag}(100, \dots, 100, 10^{12}, 10^{12})$.

Результаты восстановления теплового потока и уточнения теплопроводности материала ПТП с помощью ФК-2 представлены на рис. 2. Начальные оценки принимались, как и в предыдущем случае, в двое меньше эталонных: $\hat{\mathbf{Q}}_0 = [5000 \ 5000 \ 7,5]^T$, а начальное значение ковариационной матрицы: $P_0 = \text{diag}(10^{12}, 10^{12}, 100)$.

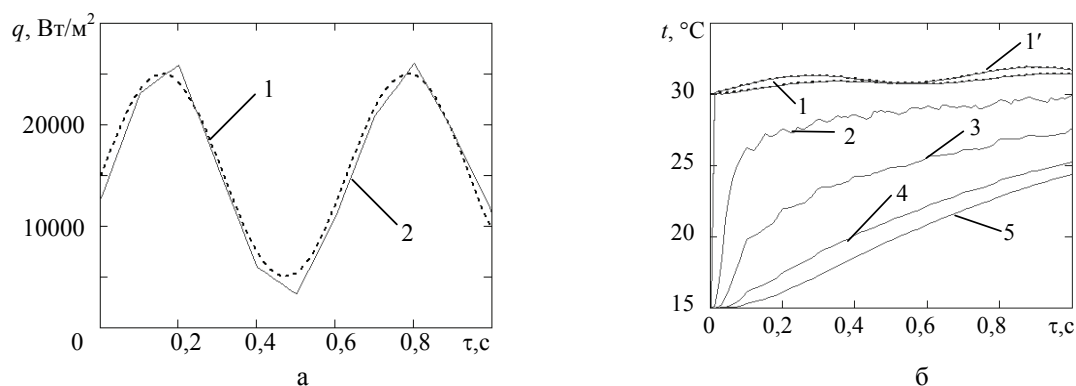


Рис. 1. Эталонный (1) и восстановленный (2) тепловые потоки (а); заданная на поверхности первого блока (1') и восстановленные на блоках 1–5 температуры ПТП (б)

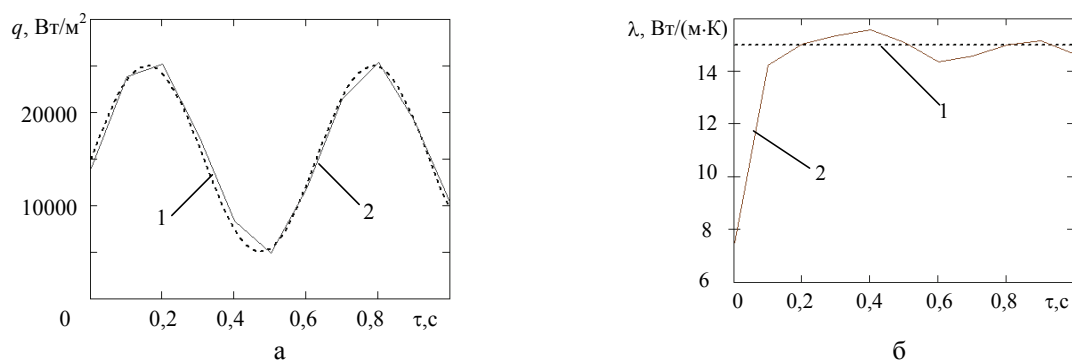


Рис. 2. Эталонные (1) и восстановленные (2) значения теплового потока (а) и теплопроводности ПТП (б)

Заключение

В статье приведено описание математических моделей, как процесса теплопереноса, так и измерений в различных типах сенсоров нестационарного теплового потока; рассмотрены алгоритмы программ для решения прямых и обратных задач теплопроводности. Для получения оценок значений теплового потока разработаны программы двух модификаций ФК, которые позволили оценить поток в реальном времени.

Приведены результаты математического моделирования по восстановлению теплового потока и уточнению теплопроводности материала, которые позволяют утверждать, что разработанные методики расчетов могут быть использованы в энергосберегающих технологиях, в частности, при определении тепловых потерь ограждающих конструкций зданий и сооружений в нестационарном режиме.

Литература

1. Пилипенко Н.В. Методы параметрической идентификации в нестационарной теплотометрии (ч. 1) // Изв. вузов. Приборостроение. – 2003. – № 8. – С. 50–54.
2. Пилипенко Н.В. Методы параметрической идентификации в нестационарной теплотометрии (ч. 2) // Изв. вузов. Приборостроение. – 2003. – № 10. – С. 67–71.
3. Pilipenko N. Parametrical Identification of Differential-difference Heat Transfer Models in Non-stationary Thermal Measurements // Heat Transfer Research. – 2008. – V. 39. – № 4. – P. 311–315.

Кириллов Кирилл Валерьевич

– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, kirill.kirilov@gmail.com

Пилипенко Николай Васильевич

– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, pilipenko38@mail.ru