4 АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 621.397.331+517.968

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СМАЗАННЫХ ПОД УГЛОМ И ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ БЕЗ УЧЕТА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

М.В. Дайнеко, В.С. Сизиков

Рассматривается задача реконструкции смазанных под углом и зашумленных изображений методом квадратур с регуляризацией Тихонова. При восстановлении смазанных изображений применяется новый подход – прием усечения и размытия краев, не учитывающий «граничные условия».

Ключевые слова: смазанные под углом изображения, реконструкция изображений, метод регуляризации Тихонова, граничные условия.

Введение

Реконструкция искаженных (смазанных и зашумленных) изображений является актуальной задачей в области цифровой обработки изображений. Данная некорректная задача описывается обычно набором одномерных интегральных уравнений (ИУ) Фредгольма I рода типа свертки [1–13]

$$(1/\Delta)\int_{x}^{x+\Delta} w_y(\xi)\, d\xi = g_y(x) + \delta g\,, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi) w_y(\xi) d\xi = g_y(x) + \delta g \tag{2}$$

или двумерным ИУ Фредгольма I рода типа свертки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi, y-\eta) w(\xi,\eta) d\xi d\eta = g(x,y) + \delta g\,. \tag{3}$$

Здесь Δ – величина смаза, h – функция рассеяния точки (ФРТ, PSF), обычно пространственно-инвариантная, w и g – распределение интенсивности по неискаженному и искаженному изображениям соответственно, δg – помеха. В (1), (2) ось x направлена вдоль смаза, а y играет роль параметра. Интегральные уравнения (1) и (2) обычно используются в задаче смазывания, а (3) – в задаче дефокусирования, но часто ([3] и др.) уравнение (3) используется для решения обеих задач.

Цель данной работы – восстановление (реконструкция) смазанных под углом и зашумленных изображений без использования так называемых «граничных условий», но с введением приемов усечения, размытия краев и поворота изображения в рамках системы программирования MatLab7. При этом предлагается использовать методы преобразования Фурье (ПФ) и квадратур с регуляризацией Тихонова как в прямой (моделировании смаза), так и в обратной задаче (реконструкции).

Данная работа является продолжением работ [2, 9, 10, 13].

Граничные условия

Во многих зарубежных работах ([3, 5–8, 11] и др.) при решении прямой задачи смазывания изображения используются для учета интенсивностей вне границ изображения так называемые «граничные условия» (boundary conditions, BCs). Например, в m-функции `imfilter` системы MatLab7 при формировании смазанного или размытого изображения в качестве параметра можно задавать различные «граничные условия»: zero, circular, symmetric и др.

В дискретном виде задачу формирования смазанных или размытых изображений можно представить выражением

$$g = Aw + \delta g\,, \tag{4}$$

где g – матрица смазанного изображения, A – матрица, связанная с ФРТ и «граничными условиями», w – матрица неискаженного изображения размера $m \times n$, δg – помеха.

Однако введение «граничных условий», когда функция w не является финитной, приводит к усложнению матрицы A [6]. Например, при использовании нулевых граничных условий матрица A представляет собой блок теплицевых матриц, а при рефлективных (symmetric) – сумму блоков теплицевых и ганкелевых матриц [6]. Правильнее было бы говорить не о «граничных условиях», а о внеграничных условиях, точнее, об экстраполяции значений интенсивности w за границы изображения. Для решения модельной задачи – формирования смазанного изображения – был предложен [10] прием усечения и размы-

тия краев изображения для случая горизонтального смазывания. В данной работе этот прием распространяется на случай смазывания изображения под произвольным углом.

Смазывание изображения под углом

Моделирование смазанного под углом изображения уже реализовано в рамках системы программирования MatLab7 при помощи *m*-функций `fspecial` и `imfilter`. Функция `fspecial` задает разностную функцию рассеяния точки (ФРТ) $h(x, y)$. Однако алгоритм, используемый в функции `fspecial.m` для решения прямой задачи, реализован достаточно сложным образом – путем отбора ближайших пикселей, расположенных вдоль наклонной под некоторым углом θ прямой линии на расстоянии не более 1 пикселя. При этом используется билинейная интерполяция. Кроме того, получение смазанного изображения $g(x, y)$ в функции `imfilter.m` реализовано с использованием «граничных условий», а также путем свертки истинного изображения $w(x, y)$ с заданной в виде матрицы ФРТ $h(x, y)$:

$$g(x, y) = \iint_D h(x-\xi, y-\eta) w(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \quad x, y \in D, \tag{5}$$

где D – видимая область изображения.

В данной работе предлагается использовать другой подход – прием поворота изображения, который реализован при помощи m-функции `imrotate.m` [11]. На рис. 1 приведена схема смазывания изображения под произвольным углом с размытием краев изображения и с использованием его поворота.

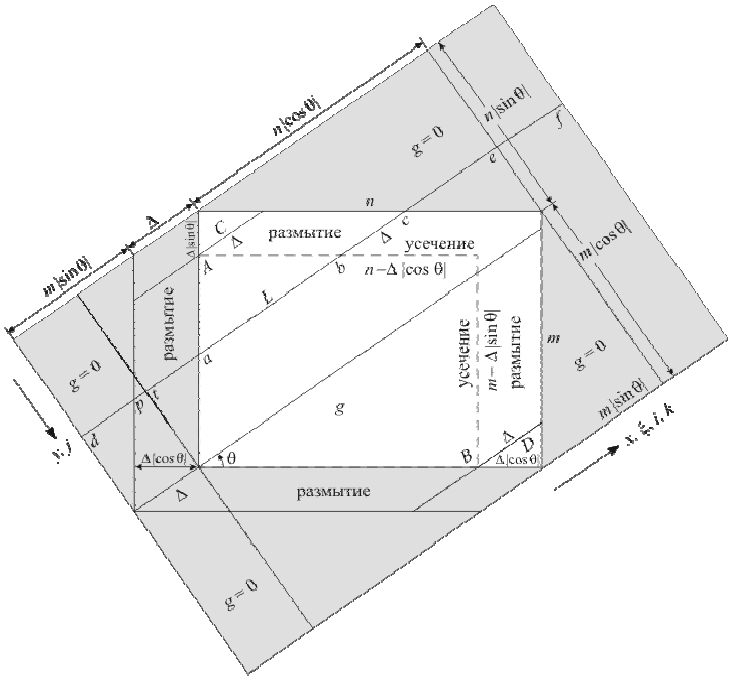


Рис. 1. Моделирование смазывания изображения под углом по схеме с размытыми краями

Заметим, что в случае использования функций MatLab'а `fspecial.m` и `imfilter.m` задача смазывания изображения рассматривается как двумерная (см. выражение (3)). В данной работе прямая задача сводится к решению набора одномерных уравнений (выражения (1), (2)).

На рис. 2 представлены два варианта смазанного под углом $\theta = 35^\circ$ текстового изображения размером 618×690 пикселей, величина смаза $\Delta = 20$ пикселей; на рис. 2, а – изображение, смазанное при помощи функций `fspecial` и `imfilter` («граничное условие» circular); на рис. 2, б – изображение, смазанное при использовании приема размытия краев и приема поворота изображения.

При решении обратной задачи (реконструкция смазанных под углом и зашумленных изображений) для решения набора одномерных ИУ (2) был применен метод квадратур с регуляризацией Тихонова. Кроме того, после реконструкции был выполнен обратный поворот и полученное изображение приводилось к фактическому размеру.

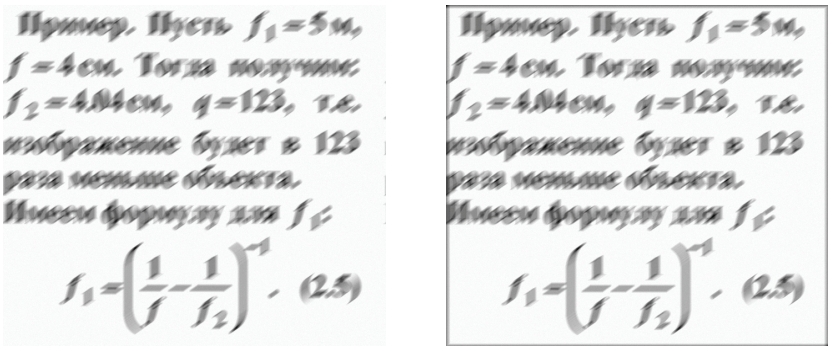
Уравнение (2) в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно представить в виде

$$A w = g, \tag{6}$$

где A – матрица СЛАУ. Ввиду использования приема размытия краев при решении прямой задачи выражение (6) является переопределенной СЛАУ [10]. Решение СЛАУ (6) методом квадратур с регуляризацией Тихонова имеет вид [5, 7, 10, 13]

$$w_\alpha = (\alpha I + A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}} g\,, \tag{7}$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, I – единичная матрица, A^{T} – транспонированная матрица.

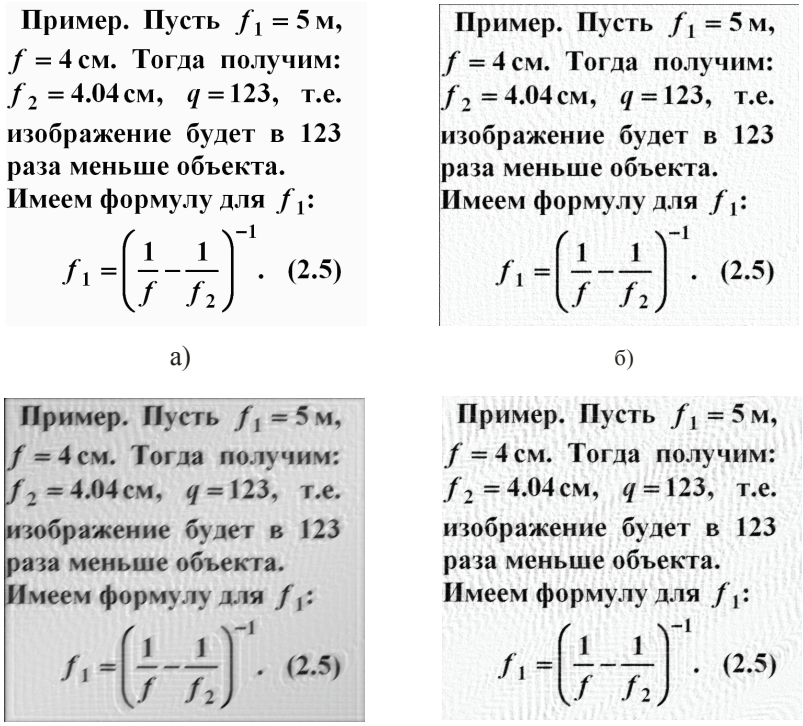


а) б)

Рис. 2. Реконструкция смазанных и зашумленных изображений

В данной работе, применительно к обратной задаче, было произведено сравнение метода квадратур (и регуляризации Тихонова) с методом преобразования Фурье (ПФ) (и регуляризации Тихонова) [9, 10, 13, 15], а также с методом параметрической фильтрации Винера. Метод параметрической фильтрации Винера реализован в MatLab7 при помощи m-функции `deconvwnr` [11, с. 184] и дополнен использованием «граничных условий».

На рис. 3 представлен результат реконструкции смазанного под углом $\theta = 35^\circ$ и зашумленного 1%-ным гауссовым шумом ($\|\delta g\| / \|g\| = 0{,}01 = 1\%$) изображения методом квадратур и регуляризации Тихонова (рис. 3, б), методом ПФ и регуляризации Тихонова (рис. 3, в) и методом параметрической фильтрации Винера (рис. 3, г). Величина смаза Δ во всех случаях составляла 20 пикселей. Исходное изображение размером 618×690 пикселей приведено на рис. 3, а.



а) б)

в) г)

Рис. 3. Реконструированные изображения с последующей фильтрацией
(θ=35°, $\Delta = 20$, уровень шума 1 %)

При решении обратной задачи выбор параметра регуляризации α определялся путем визуальной оценки полученных результатов и путем минимизации относительного среднеквадратического отклонения (СКО) восстановленного изображения от исходного [14]:

$$\sigma_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[(w_\alpha)_{ji} - \overline{w}_{ji}\right]^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_{ji}^2}} \tag{10}$$

(величину σ_{rel} можно вычислить лишь в модельной задаче, когда $\overline{w}$ известно). На основании экспериментальных данных реконструкции были построены кривые зависимости величины СКО σ_{rel} от параметра регуляризации α, а также зависимость СКО от константы (параметра) K, определяющей соотношение шум/сигнал по мощности в методе параметрической фильтрации Винера [3, с. 392; 11]. На рис. 4 показаны данные зависимости: кривая 1 – в случае использования метода ПФ и регуляризации Тихонова; кривая 2 – при методе квадратур и регуляризации Тихонова; кривая 3 – при обращении к методу параметрической фильтрации Винера. Отметим, что оптимальное значение параметра регуляризации α_{opt} и параметра K_{opt} в случае решения модельных задач соответствует минимуму значения СКО $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)$ и $\sigma_{\text{rel}}(K)$.

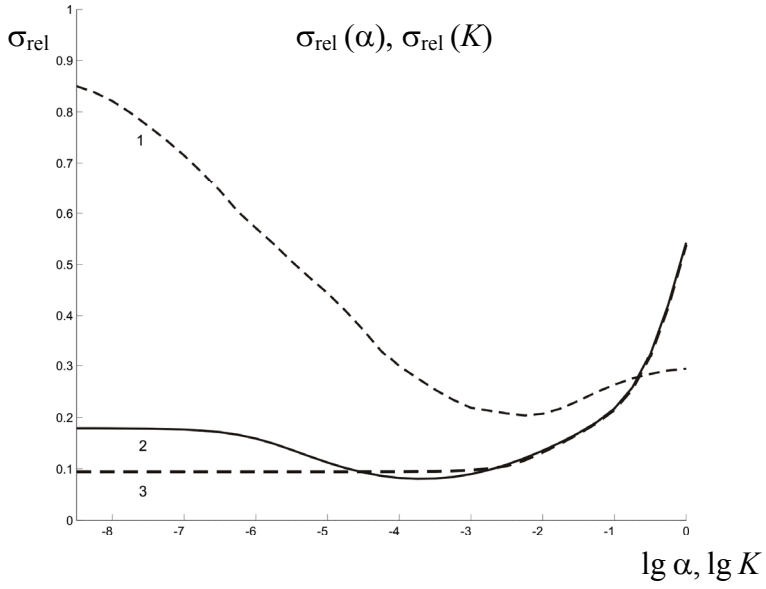


Рис. 4. Зависимость СКО от параметра регуляризации α при фильтрации шума после реконструкции

В рамках системы программирования MatLab7 при решении прямой и обратной задач были разработаны собственные m-функции: `smearing.m` – прямая задача моделирования смазывания изображения (в том числе для цветных изображений); `normnoise.m` – добавление нормального (гауссова) шума; `rmsd.m` – оценка относительного среднеквадратического отклонения (relative mean square deviation); `desmearingf.m` – обратная задача реконструкции смазанного изображения методом ПФ и регуляризации Тихонова; `desmearingq.m` – обратная задача реконструкции методом квадратур и регуляризации Тихонова.

Устранение зашумленности изображений

При решении задачи устранения шума также использовались методы параметрической фильтрации Винера, метод квадратур и ПФ с регуляризацией Тихонова. Для решения обратной задачи и сравнения вышеуказанных методов было предложено три способа восстановления: без фильтрации шума, с предварительной фильтрацией и с фильтрацией после реконструкции. Для подавления аддитивного гауссова 1%-го шума, как показали эксперименты, лучше всего использовать метод адаптивной винеровской фильтрации (реализация в MatLab7 при помощи *m*-функции `wiener2`). Численная оценка полученных результатов реконструкции при различных вышеуказанных способах представлена в таблице.

Вид реконструкции	Метод ПФ с регуляризацией Тихонова		Метод квадратур с регуляризацией Тихонова		Метод параметрической фильтрации Винера	
	α_{opt}	$\sigma_{rel}(\alpha_{opt})$	α_{opt}	$\sigma_{rel}(\alpha_{opt})$	K_{opt}	$\sigma_{rel}(K_{opt})$
без фильтрации шума	$10^{-2,25}$	0,2006	$10^{-2,85}$	0,1051	10^{-5}	0,0999
с предварительной фильтрацией	$10^{-2,45}$	0,1991	$10^{-3,5}$	0,0980	10^{-5}	0,1110
с последующей фильтрацией	$10^{-2,25}$	0,2086	$10^{-3,6}$	0,0806	10^{-5}	0,0945

Таблица. Относительная погрешность восстановления смазанных и зашумленных изображений

Заключение

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что метод квадратур с регуляризацией Тихонова позволяет наиболее точно и качественно восстанавливать искаженные изображения (смазанные под углом и зашумленные). Метод параметрической фильтрации Винера и метод ПФ с регуляризацией Тихонова уступают методу квадратур с регуляризацией Тихонова. Кроме того, в работе предложен новый способ моделирования смазанных под углом изображений без использования «граничных условий».

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-08-00034).

Литература

1. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи обработки фотоизображений // Некорректные задачи естествознания / Под ред. А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – С. 185–195.
2. Сизиков В.С., Белов И.А. Реконструкция смазанных и дефокусированных изображений методом регуляризации // Оптический журнал. – 2000. – Т. 67. – № 4. – С. 60–63.
3. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2006. – 1072 с.
4. Воскобойников Ю.Е., Литасов В.А. Устойчивый алгоритм восстановления изображения при неточно заданной аппаратной функции // Автометрия. – 2006. – Т. 42. – № 6. – С. 3–15.
5. Christiansen M., Hanke M. Deblurring methods using antireflective boundary conditions. – 2006 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://citeseerx.ist.psu.edu, свободный.
6. Palmer K., Nagy J., Perrone L. Iterative methods for image restoration: Matlab object oriented approach. – 2002 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://citeseer.ist.psu.edu, свободный.
7. Donatelli M., Estatico C., Martinelli A., Serra-Capizzano S. Improved image deblurring with anti-reflective boundary conditions and re-blurring // Inverse problems. – 2006. – V. 22. – P. 2035–2053.
8. Arico A., Donatelli M., Nagy J., Serra-Capizzano S. The anti-reflective transform and regularization by filtering. – 2007 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: ftp://ftp.mathcs.emory.edu, свободный.
9. Римских М.В., Евсеев В.О., Сизиков В.С. Реконструкция смазанных изображений различными методами // Оптический журнал. – 2007. – Т. 74. – № 11. – С. 53–57.
10. Сизиков В.С., Римских М.В., Мирджамолов Р.К. Реконструкция смазанных и зашумленных изображений без использования граничных условий // Оптический журнал. – 2009. – Т. 76. – № 5. – С. 38–46.
11. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
12. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 199 с.
13. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. – СПб.: Политехника, 2001. – 240 с.
14. Пикалов В.В., Непомнящий А.В. Итерационный алгоритм с вейвлет-фильтрацией в задаче двумерной томографии // Вычислит. методы и программирование. – 2003. – Т. 4. – С. 244–253.
15. Ягола А.Г., Кошев Н.А. Восстановление смазанных и дефокусированных цветных изображений // Вычислительные методы и программирование. – 2008. – Т. 9. – С. 207–212.

Дайнеко Мария Владимировна – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, daynekom@gmail.com

Сизиков Валерий Сергеевич – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, sizikov2000@mail.ru