

УДК 535.421, 517.982.43, 515.127

**РАСЧЕТ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ФРАКТАЛОВ ПО КАРТИНЕ ДИФРАКЦИИ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ**

А.А. Зинчик, Я.Б. Музыченко, А.В. Смирнов, С.К. Стафеев

Проведено численное моделирование дифракции Фраунгофера от геометрических фракталов. Предложен оригинальный алгоритм расчета фрактальной размерности регулярного фрактала по дифракционной картине. В качестве примеров рассмотрены дифракционные картины от следующих геометрических фракталов: ковер Серпинского, фрактал Вишека, снежинка Коха. Проведено сравнение значений фрактальной размерности, полученных на основе численного эксперимента, с теоретическими значениями. Для фракталов с порядком итерации  $m=6$  расхождение между указанными значениями не превышает 1,5%.

**Ключевые слова:** фрактал, дифракция Фраунгофера, Фурье-преобразование, фрактальная размерность, самоподобие, степенной закон.

**Введение**

Модельная задача дифракции на плоских амплитудных фрактальных структурах актуальна для исследований многих видов объектов, характеризующихся фрактальными свойствами. Как известно из Фурье-оптики, в силу линейности Фурье-преобразования интеграл от фрактальной функции зрачка является, в свою очередь, фракталом дополнительной размерности. Это означает, что в области дифракции Фраунгофера (например, в задней фокальной плоскости идеальной оптической системы), пространственный спектр фрактальной маски также обладает свойствами самоподобия. При этом интенсивность на высоких пространственных частотах, соответствующих деталям исследуемой структуры, вносит существенный вклад в суммарную интенсивность. Использование фрактальных масок вместо традиционных пространственных фильтров позволяет повысить чувствительность оптического тракта к амплитудным и (или) фазовым искажениям, вносимым исследуемым объектом [1].

Фрактальная структура образуется путем бесконечного повторения (итерации) исходной формы во все уменьшающемся (или увеличивающемся) масштабе по определенному алгоритму, т.е. воспроизведением самоподобия в соответствии с определенной математической процедурой. Одной из важнейших характеристик фракталов является фрактальная размерность, математическое определение которой было дано Хаусдорфом [2]. Пусть имеется некоторое множество  $S$  в  $n$ -мерном пространстве. Будем покрывать это множество  $p$ -мерными шарами диаметром  $\varepsilon$ . Минимальное количество шаров, необходимых для полного покрытия, обозначим  $N(\varepsilon)$ . Величина

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (1)$$

называется фрактальной размерностью или емкостью множества  $S$ . Для простых геометрических объектов величина  $D$  совпадает с их топологической размерностью  $D_t$ . В общем случае для топологической и фрактальной размерностей справедливо следующее соотношение:  $D_t \neq D$ .

Проведенные ранее исследования [3, 5–7] показали, что дифракционная картина в области дифракции Фраунгофера от фрактальной структуры также является фрактальной, и была найдена связь между их фрактальными размерностями. Особый интерес представляет использование дифракционной картины для определения фрактальной размерности самого фрактала. В работе [8] указывается, что точность определения фрактальной размерности по дифракционной картине для фрактала Вишека не превышает 10 % при 5–6 порядках итерации (порядком итерации будем называть количество итераций при формировании данного фрактала).

Настоящая работа посвящена разработке алгоритма, позволяющего с повышенной точностью рассчитать фрактальную размерность плоского регулярного фрактала по его дифракционной картине.

### Теоретическая часть

С целью исследования предлагаемой методики было проведено численное моделирование дифракции Фраунгофера от наиболее известных геометрических фракталов, таких как ковер и треугольник Серпинского, снежинка Коха, фрактал Вишека.

В случае ковра Серпинского (рис. 1, а) площадь квадрата делится на девять частей, из которых только одна центральная остается прозрачной. Таким образом, масштабирующий множитель (кратность деления по каждой координате) равен трем, а число самоподобных элементов на каждой итерации равно восьми. Соответственно фрактальная размерность такого объекта равна  $D = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1,893$ . Одна из разновидностей

ковра Серпинского, фрактал Вишека, генерируется заменой одного квадрата на пять с масштабирующим множителем, равным трем, фрактальная размерность равна  $D = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1,465$ . Построение такого фрактала представлено на рис. 1, б. В случае снежинки Коха (рис. 1, в) фрактальная структура ближе к линейной, чем к поверхностной, и  $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,262$  соответственно.

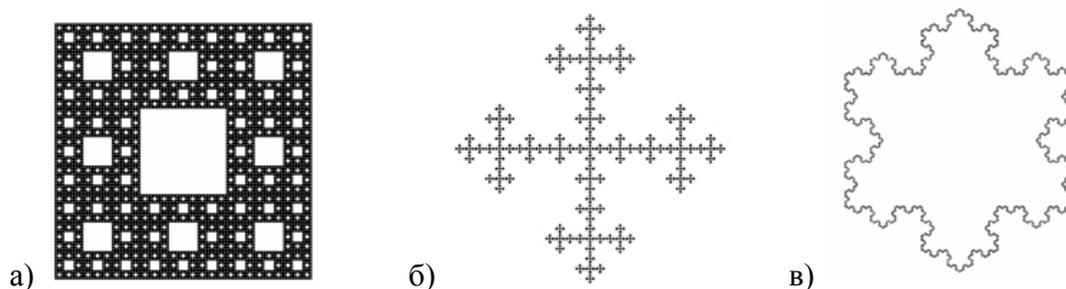


Рис.1. Примеры геометрических фракталов: а) ковер Серпинского ( $D=1,893$ ); б) фрактал Вишека ( $D=1,465$ ); в) снежинка Коха ( $D=1,262$ )

Выбранные примеры фрактальных объектов характеризуются существенно различными размерностями в диапазоне от почти двумерного до почти одномерного. Для более точного и информативного определения свойств дифракционной картины использовались различные уровни построения фракталов, различные углы поворота и масштабирующие множители.

Большинство работ по исследованию дифракции на фракталах посвящено дифракции Фраунгофера, т.е. случаю, когда распределение интенсивности за объектом представляет собой оптическое преобразование Фурье, достаточно просто реализуемое с помощью вычислительного алгоритма.

Дифракционный интеграл Фраунгофера для случая плоского объекта имеет вид [4]

$$\Phi(x, y) = \iint \Psi(x', y') \exp\left[-\frac{ik(xx' + yy')}{l}\right] dx' dy', \quad (2)$$

где  $x, y, x', y'$  – координаты в плоскости наблюдения и на объекте,  $l$  – расстояние до экрана,  $k$  – модуль волнового вектора или волновое число ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  – длина волны),  $\Psi(x, y)$  – функция пропускания объекта. Учитывая, что в качестве приемника излучения чаще всего используется ПЗС-камера, чувствительная площадка которой имеет дискретную регулярную структуру, получаем следующее уравнение:

$$\Phi(mx_0, ny_0) = \sum_{p=1}^{p=N} \sum_{q=1}^{q=M} \Psi(x_q', y_p') \exp \left[ -\frac{ik(mx_0 x_q' + ny_0 y_p')}{l} \right], \quad (3)$$

где  $M$  и  $N$  – количество элементов дискретизации в плоскости исследуемого объекта по вертикали и горизонтали,  $x_0'$  и  $y_0'$  – размеры элемента дискретизации,  $x_0$  и  $y_0$  – размеры светочувствительной ячейки регистрирующего устройства,  $m$  и  $n$  – вертикальные и горизонтальные координаты этих элементов соответственно. Заметим, что выражение (3) соответствует формуле двумерного дискретного преобразованием Фурье.

Ранее было показано [4], что пространственное распределение интенсивности в дифракционной картине подчиняется степенному закону,

$$\langle I(r) \rangle \sim r^{-D} \quad (4)$$

где  $I$  – интенсивность,  $r$  – радиальная координата, угловые скобки обозначают усреднение по угловой координате. Из (4) следует, что фрактальная размерность объекта может быть рассчитана по следующей формуле:

$$D = \frac{\ln \langle I(r) \rangle}{\ln(r)}. \quad (5)$$

### Результаты моделирования

Предлагаемая методика оценки фрактальной размерности объекта по картине дифракции включает несколько этапов. На первом этапе над входным изображением фрактала, представляемым в виде матрицы значений, выполнялось комплексное Фурье-преобразование. На рис. 2, а–в, представлены изображения фрактала (слева) и его Фурье-образа в инвертированных полутонах (справа). Исходные фракталы представляют собой изображения размером  $729 \times 729$  отсчетов, что позволяет задать порядок итерации фрактала равным шести, поскольку на каждой итерации линейный размер фрактала возрастает в 3 раза.

На втором этапе для определения фрактальной размерности был реализован следующий алгоритм. Для рассчитанных дифракционных картин определялась зависимость интенсивности от расстояния до центра картины. Средняя интенсивность для каждого радиуса вычислялась как сумма интенсивности в точках, расположенных в пределах некоторого кольца, и нормировалась на площадь кольца. При этом толщина кольца в пределе минимизировалась, что позволяло получать одномерные функции  $I(r)$ . Далее строились графики зависимостей усредненной интенсивности от координаты в двойном логарифмическом масштабе. Тангенс угла наклона аппроксимированного графика  $I(r)$ , согласно (5), характеризует фрактальную размерность исходной структуры.

На рис. 3 показана зависимость усредненной интенсивности от радиуса в двойном логарифмическом масштабе для фрактала «ковёр Серпинского» с известной размерностью. Сильно осциллирующая кривая на этом рисунке, являющаяся результатом численного моделирования, отчетливо демонстрирует повторяющуюся структуру, форма которой становится все более детальной по мере удаления от центра дифракционной

картины, причем количество повторений данной структуры определяется порядком итерации фрактала.

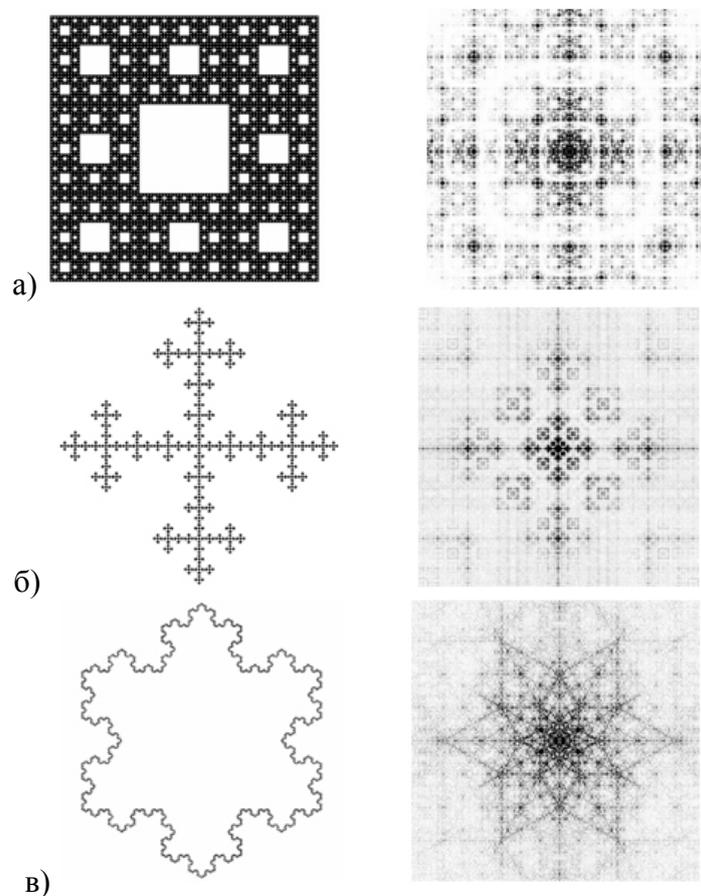


Рис. 2. Исходные фрактальные объекты и расчетные картины дифракции на них: а) ковер Серпинского; б) фрактал Вишека; в) снежинка Коха. Порядок итерации  $m = 6$

Кроме результатов вычислительного эксперимента, на рисунке проведена сплошная линия, тангенс угла наклона которой точно равен фрактальной размерности тестового фрактала. Заметим, что эта прямая может быть аппроксимирующей, так как она проходит через точки, соответствующие средней интенсивности каждого из повторяющихся фрагментов исследуемой кривой. Расчет наклона аппроксимирующей прямой по методу наименьших квадратов не дает ожидаемых результатов, поскольку разброс точек графика не подчиняется нормальному статистическому закону. Несоответствие наклона аппроксимирующей прямой (обозначенной на рисунке пунктиром) теоретическому значению объясняется следующими причинами: во-первых, на расчет наклона аппроксимирующей прямой существенно влияет область графика, соответствующая нулевому (самому грубому) порядку итерации фрактала; во-вторых, резко неравномерное распределение плотности точек по логарифмической шкале увеличивает относительный вклад точек с максимальными интервалами. Вследствие неравномерного распределения точек алгоритмы сглаживания и фильтрации зашумленного сигнала не дают желаемого результата.

Для решения этой проблемы была осуществлена следующая процедура. Усредненная дифракционная картина была разделена на кольцевые области, ширина которых, взятая в логарифмическом масштабе, одинакова. Количество кольцевых областей может быть произвольным. В этом случае становится возможным получить практиче-

ски равную плотность точек, попадающих в каждый интервал. Наибольшее соответствие между теоретическим значением фрактальной размерности и наклоном усредненной экспериментальной кривой получается при выборе числа областей, которое на единицу меньше, чем порядок итерации фрактала  $m$ . Первый порядок исключается, поскольку не содержит существенной информации.

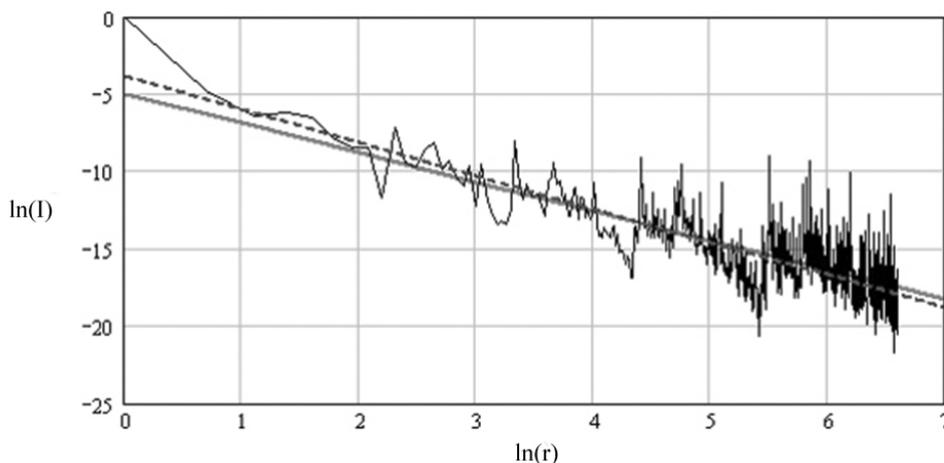


Рис. 3. График зависимости усредненной интенсивности от радиуса для фрактала с  $D = \log 8 / \log 3$  (ковер Серпинского)

В каждом из интервалов была рассчитана средняя интенсивность. Результаты представлены на рис. 4–6 для всех трех примеров геометрических фракталов. По найденным значениям средней интенсивности проведена аппроксимирующая прямая (обозначена на рисунках пунктиром). Для большей наглядности исходный массив значений интенсивности на рисунках сдвинут вниз. Значения рассчитанной фрактальной размерности приведены в правом верхнем углу каждого рисунка.

| Тип фрактала            | Теоретическая фрактальная размерность | Фрактальная размерность, полученная экспериментально | Относительная погрешность |
|-------------------------|---------------------------------------|--|---------------------------|
| Снежинка Коха           | 1,262                                 | 1,258  | 0,3%                      |
| Ковер Серпинского*      | 1,262                                 | 1,270  | 0,6%                      |
| Фрактал Вишека          | 1,465                                 | 1,472  | 0,4%                      |
| Фрактал Вишека **       | 1,465                                 | 1,451  | 0,9%                      |
| Фрактал Вишека ***      | 1,465                                 | 1,477  | 0,8%                      |
| Треугольник Серпинского | 1,585                                 | 1,601  | 1%                        |
| Ковер Серпинского       | 1,893                                 | 1,872  | 1,1%                      |

Таблица 1. Сравнение расчетных и теоретических фрактальных размерностей геометрических фракталов: \* – фрактал получается заменой одного непрозрачного квадрата на четыре таких же, расположенных по углам исходного, масштабирующий множитель равен 3; \*\* – исследуемый фрактал Вишека, повернутый на  $45^\circ$ ; \*\*\* — фрактал, генерируемый при помощи замены одного квадрата, образуемого двумя диагональными линиями, на пять (заменой двух взаимноперпендикулярных линий на 10 таких же), масштабирующий множитель равен 3

Количественные результаты расчета фрактальной размерности от известных геометрических фракталов на основе анализа их дифракционных распределений приведены в табл. 1. Различные значения для разновидностей фрактала Вишека, имеющих одинаковую теоретическую размерность, обусловлены конечными размерами минимальных элементов фрактала и несколько различным расположением этих элементов на

плоскости. Увеличение порядка итерации фрактала уменьшает различие между размерностями разновидностей фрактала Вишека. Следует отметить, что для всех трех фракталов погрешность определения их размерности не превышает 1%.

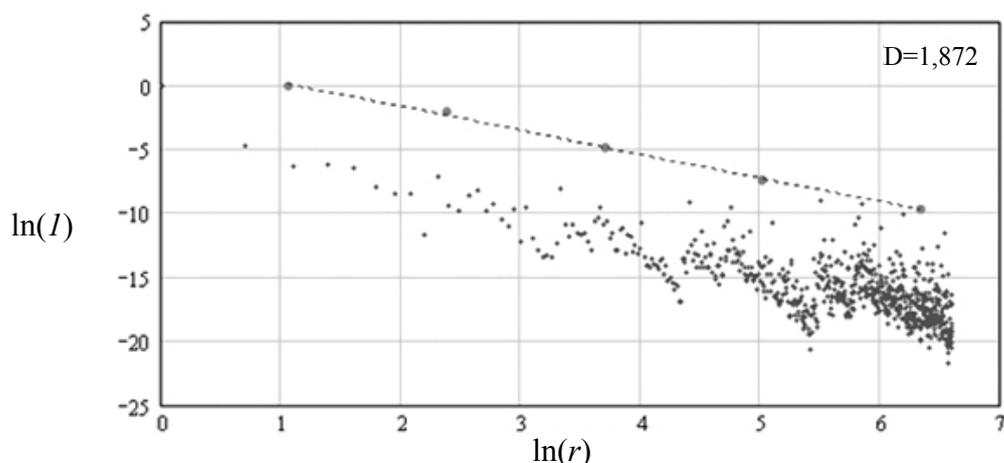


Рис. 4. График зависимости усредненной интенсивности от радиуса для фрактала с  $D = \ln 8 / \ln 3$  (ковер Серпинского)

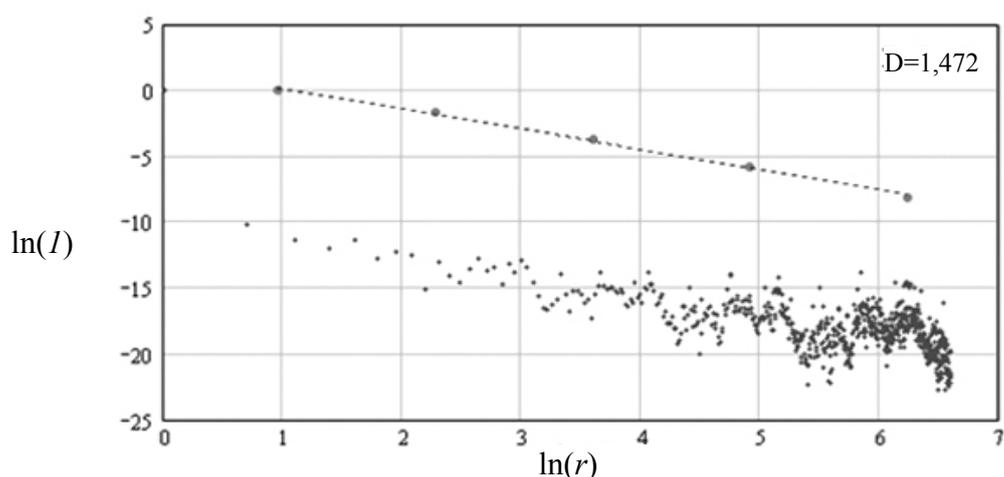


Рис. 5. График зависимости усредненной интенсивности от радиуса для фрактала с  $D = \ln 5 / \ln 3$  (фрактал Вишека)

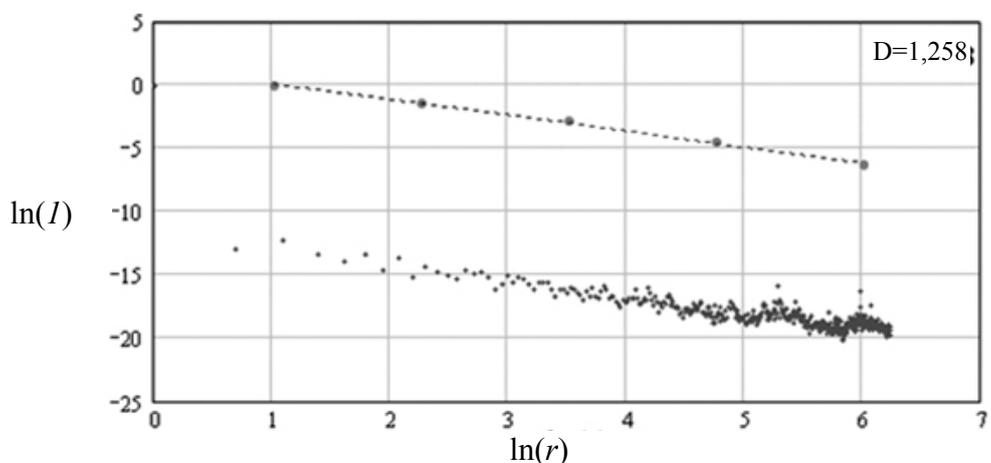


Рис. 6. График зависимости усредненной интенсивности от радиуса для фрактала с  $D = \ln 4 / \ln 3$  (снежинка Коха)

Представленные в таблице данные показывают, что разработанный метод позволяет определить фрактальную размерность с относительной погрешностью 1,5%. Расчет коэффициента корреляции между теоретическими и экспериментальными значениями дает величину  $K=0,998$ . Относительная погрешность возрастает с ростом фрактальной размерности, поскольку объекты с большей размерностью дают больший разброс значений интенсивности на периферии дифракционной картины.

### Заключение

Предложенный метод расчета фрактальной размерности по дифракционной картине эффективен для плоских регулярных фракталов различных типов. На практике далеко не все фракталы являются регулярными. Физические объекты зачастую обладают лишь приближенным или статистическим самоподобием. Такие объекты иногда называют физическими фракталами. Физические фракталы также характеризуются некоторым значением фрактальной размерности, для определения которой может использоваться рассмотренный в работе метод. Это позволит оценить фрактальные свойства широкого круга природных и синтетических материалов, коллоидных и пористых структур, что может способствовать уточненному объяснению их физических свойств.

### Литература

1. Зинчик А.А., Стафеев С.К. Использование фрактальных масок для визуализации оптических неоднородностей при оптической обработке искаженного изображения // Оптический журнал. – 2003. – Т 70. – № 11. – С. 49–52.
2. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
3. Uozumi J., Kumura H., Asakura T. Fraunhofer diffraction by Koch fractals // Journal of Modern Optics. – 1990. – Vol. 37. – № 6. – P. 1011–1031.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
5. Uno K., Uozumi J., Asakura T. Stastical propereties of the Fraunhofer diffraction field produced by random fractals // Applied Optics. – 1993. – Vol. 32. – № 15. – P. 2722–2729.
6. Hou B., Xu G., Wen W., Wong G. Diffraction by an optical fractal grating // Appl. Phys. Letters. – 2004. – Vol. 85. – № 25. – P. 6125–6127.
7. Rodrigo J., Alieva T., Calvo M. Diffraction by Cantor fractal zone plates // Journal of Modern Optics. – 2005. – Vol. 52. – № 18. – P. 2771–2783.
8. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е. Оптическая дифракция на фрактальных решетках // Вестник МГУ. – Серия 3. Физика. – 2008. – № 2. – С. 7–10.

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| <i>Зинчик Александр Адольфович</i>   | – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, zinchik@phd.ifmo.ru  |
| <i>Музыченко Яна Борисовна</i>       | – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, ассистент, myb@rambler.ru                               |
| <i>Смирнов Александр Витальевич</i>  | – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат физ.-мат. наук, доцент, smirnav@phd.ifmo.ru    |
| <i>Стафеев Сергей Константинович</i> | – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, stafeev@phd.ifmo.ru |