

УДК 112:22.10:241.1

ФОРМИРОВАНИЕ СПЕКТРА СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Т.А. Акунов, Д.С. Бирюков, Н.А. Дударенко, М.В. Полякова, А.В. Ушаков

Исследуется возможность формирования спектра сингулярных чисел квадратной матрицы простой структуры, для чего используется связь этого спектра со спектром ее собственных значений, которая определяется числом обусловленности модальной матрицы. Задача решается с использованием алгоритмических возможностей обобщенного модального управления. Приводится пример.

Ключевые слова: модальное разложение, сингулярное разложение, сингулярные числа, собственные значения, собственные вектора, число обусловленности, обобщенное модальное управление.

Введение. Постановка задачи

Сингулярное разложение, SVD (singular value decomposition) [1–4] матриц прочно вошло в практику специалистов по системному SVD-анализу динамических процессов. Круг задач, решаемых с помощью сингулярного разложения [5] матриц, достаточно широк. Это задачи оценивания параметров, скаляризации векторных процессов в многомерных системах управления путем введения эллипсоидных оценок [6], приближения методом наименьших квадратов. Сингулярное разложение позволяет контролировать плавное изменение ранга матрицы с помощью ее числа обусловленности или функционалов вырождения [7, 8], оно стало конструктивным инструментом при решении задач регрессионного анализа [9], а также задач, основанных на грамианном подходе [10], и задач, связанных с контролем вырождения динамических систем типа многомерный вход – многомерный выход [7]. В теории оптических приборов SVD-анализ матрицы преобразования лучевого вектора [11] позволяет выделять факторы, вариация которых приводит к максимальной разъюстировке оптических систем. Тем не менее, задача формирования матриц с заданным спектром сингулярных чисел пока не решена, в то время как задача формирования матриц с заданным спектром собственных значений, получившая в современной теории динамических систем название «модальное управление», имеет хорошее алгоритмическое обеспечение и достаточно обширную библиографическую поддержку [6, 12, 13]. Решение задачи, поставленной заголовком настоящей работы, опирается на возможности инструментария обобщенного модального управления (ОМУ) [13] как расширенной версии модального управления.

Модальное разложение квадратной матрицы простой структуры

Рассмотрим матрицу \mathbf{N} размерности $\dim(\mathbf{N}) = (n \times n)$, которая характеризуется алгебраическим спектром $\sigma(\mathbf{N})$ собственных значений $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, вычисляемых в силу соотношения $\sigma(\mathbf{N}) = \{\lambda_i : (\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{N}) = 0); i = \overline{1, n}\}$, и геометрическим спектром собственных векторов $\{\xi_i; i = \overline{1, n}\}$, удовлетворяющих условию $\xi_i = \arg \{\mathbf{N}\xi_i = \lambda_i \xi_i\}; i = \overline{1, n}$.

Если матрица \mathbf{N} является матрицей простой структуры, то для элементов алгебраического спектра этой матрицы выполняется соотношение

$$\lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j; i, j = \overline{1, n}.$$

Построим на элементах $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ алгебраического спектра матрицы \mathbf{N} диагональную матрицу $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$. Нетрудно видеть, что в силу критериев подобия матриц [14] матрицы \mathbf{N} и $\mathbf{\Lambda}$ являются подобными, так что существует неособая $(n \times n)$ матрица \mathbf{M} , позволяющая записать матричное соотношение

$$\mathbf{M}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{N}\mathbf{M}. \quad (1)$$

Следует заметить, что столбцы $\mathbf{M}_i; i = \overline{1, n}$ матрицы

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_i, \dots, \mathbf{M}_n] \quad (2)$$

являются собственными векторами матрицы \mathbf{N} , так что выполняются равенства

$$\mathbf{N}\mathbf{M}_i = \lambda_i \mathbf{M}_i; i = \overline{1, n}; \quad \mathbf{M}_i = \xi_i. \quad (3)$$

Это легко доказывается выделением в левой и правой частях (1) i -ых столбцов $\mathbf{\Lambda}_i$ и \mathbf{M}_i , для которых получим

$$\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{N}\mathbf{M}_i; i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Таким образом, решение матричного уравнения (1) сведено к решению n матрично-векторных уравнений (4). Для решения этого уравнения относительно столбца \mathbf{M}_i воспользуемся тем, что $\mathbf{\Lambda}_i$ есть i -ый столбец диагональной матрицы $\mathbf{\Lambda}$, т.е.

$$\Lambda_i = [0_{1 \times (i-1)}, \lambda_i, 0_{1 \times (n-i)}]^T. \quad (5)$$

Столбец Λ_i вида (5) с учетом представления матрицы \mathbf{M} в форме (2) приводит уравнение (4) к виду (3).

Определение 1. Матрица \mathbf{M} приведения подобия в форме (1), составленная из собственных векторов $\mathbf{M}_i = \xi_i$ матрицы \mathbf{N} , называется модальной матрицей (матрицы \mathbf{N}). \square

Определение 2. Модальным разложением матрицы \mathbf{N} простой структуры называется представление ее в виде

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}. \quad \square \quad (6)$$

Сингулярное разложение квадратной матрицы простой структуры

Определение 3. Сингулярным разложением [5] ($n \times n$) квадратной матрицы \mathbf{N} , называется представление ее в форме

$$\mathbf{N} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T, \quad (7)$$

где \mathbf{U} – ортогональная $n \times n$ матрица, столбцы \mathbf{U}_i ($i = \overline{1, n}$) которой образуют левый сингулярный базис, так что выполняются соотношения

$$\mathbf{U}_i^T \times \mathbf{U}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \Rightarrow \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I} \Rightarrow \|\mathbf{U}\| = 1; \quad (8)$$

\mathbf{V} – ортогональная $n \times n$ матрица, столбцы \mathbf{V}_i ($i = \overline{1, n}$) которой образуют правый сингулярный базис, так что выполняются соотношения вида (8)

$$\mathbf{V}_i^T \times \mathbf{V}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \Rightarrow \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I} \Rightarrow \|\mathbf{V}\| = 1; \quad (9)$$

$\mathbf{\Sigma}$ – диагональная матрица размерности $n \times n$ с сингулярными числами $\alpha_i \geq 0$ на главной диагонали, которая принимает вид

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\alpha_i : i = \overline{1, n}\}.$$

Оказываются справедливыми следующие положения.

1. Столбцы \mathbf{U}_i матрицы \mathbf{U} являются собственными векторами матрицы $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$, так что выполняется векторно-матричное соотношение

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^T\mathbf{U}_i = \mu_i \mathbf{U}_i; i = \overline{1, n};$$

где μ_i – собственное значение матрицы $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$, вычисляемое в силу решения характеристического уравнения

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{N}\mathbf{N}^T) = 0;$$

2. Столбцы \mathbf{V}_j матрицы \mathbf{V} являются собственными векторами матрицы $\mathbf{N}^T\mathbf{N}$ так, что выполняется векторно-матричное соотношение

$$\mathbf{N}^T\mathbf{N}\mathbf{V}_j = \mu_j \mathbf{V}_j; j = \overline{1, n};$$

где μ_j – собственное значение матрицы $\mathbf{N}^T\mathbf{N}$, вычисляемое в силу решения характеристического уравнения

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{N}^T\mathbf{N}) = 0;$$

3. Сингулярные числа α_i матрицы \mathbf{N} вычисляются в силу соотношения

$$\alpha = |\mu_i^{1/2}|, i = \overline{1, n}.$$

Остановимся на свойствах сингулярных чисел матрицы \mathbf{N} .

Свойство 1. Сингулярные числа α_i матрицы \mathbf{N} неотрицательны, $\alpha_i \geq 0 \quad i = \overline{1, n}$. При этом спектр $\sigma_\alpha(\mathbf{N}) = \{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$ сингулярных чисел формируется так, что $\alpha_1 = \max_i \{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$, $\alpha_n = \min_i \{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$.

Свойство 2. Характеристические полиномы матриц $\mathbf{N}^T\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ в случае квадратной матрицы \mathbf{N} совпадают, так что выполняются равенства

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{N}\mathbf{N}^T) = \det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{N}^T \mathbf{N}).$$

Свойство 3. Матрицы $\tilde{\mathbf{N}}$ и $\tilde{\tilde{\mathbf{N}}}$, полученные умножением \mathbf{N} на ортогональную матрицу \mathbf{R} справа или ортогональную матрицу \mathbf{Q} слева, обладают тем же спектром сингулярных чисел, что и матрица \mathbf{N} , так что выполняются условия

$$\sigma_\alpha \{\tilde{\mathbf{N}}\} = \sigma_\alpha \{\mathbf{N}\mathbf{R}\} = \sigma_\alpha \{\mathbf{N}\}; \quad \sigma_\alpha \{\tilde{\tilde{\mathbf{N}}}\} = \sigma_\alpha \{\mathbf{Q}\mathbf{N}\} = \sigma_\alpha \{\mathbf{N}\}.$$

Свойство 4. Если матрица \mathbf{N} – диагональная, $\mathbf{N} = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, то $\alpha_i = |\lambda_i|$, следовательно $\Sigma = \text{diag}\{\alpha_i = |\lambda_i|\}$.

Свойство 5. Если матрица \mathbf{N} – симметричная, $\mathbf{N} = \mathbf{N}^T$, и характеризуется спектром собственных значений $\sigma\{\mathbf{N}\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, то сингулярные числа α_i этой матрицы удовлетворяют условию $\alpha_i = |\lambda_i|$, а, следовательно, $\Sigma = \text{diag}\{\alpha_i = |\lambda_i|\}$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию сингулярного разложения. Матрица \mathbf{N} действует на элемент \mathbf{V}_j ($j = \overline{1, n}$) правого сингулярного базиса так, что он отображается в линейную оболочку, натянутую на элемент \mathbf{U}_j ($j = \overline{1, n}$) левого сингулярного базиса матрицы \mathbf{N} , при этом выполняется векторно-матричное равенство

$$\mathbf{N}\mathbf{V}_j = \alpha_j \mathbf{U}_j; \quad (j = \overline{1, n}). \tag{10}$$

Линейное отображение

$$y = \mathbf{N}x \tag{11}$$

отображает единичную сферу $\|x\| = 1$ в эллипсоид, максимальная полуось которого, совпадает с вектором $y = \alpha_1 \mathbf{U}_1$, а минимальная – с вектором $y = \alpha_n \mathbf{U}_n$. Действительно, разложим вектор x по элементам правого сингулярного базиса, записав его в форме

$$x = \sum_{j=1}^n \gamma_j \mathbf{V}_j; \quad \gamma_j = \arg \left\{ \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 = 1 \right\}. \tag{12}$$

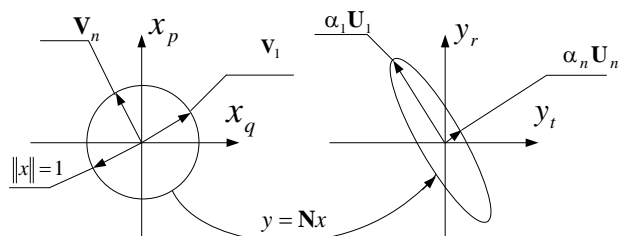


Рисунок. Геометрическая интерпретация линейного отображения $y = \mathbf{N}x$ сферы $\|x\| = 1$

Тогда подстановка (12) в (11) с учетом (10) приводит к результату

$$y = \mathbf{N}x = \sum_{j=1}^n \gamma_j \mathbf{N}\mathbf{V}_j = \sum_{j=1}^n \gamma_j \alpha_j \mathbf{U}_j \Rightarrow \begin{cases} y = \alpha_1 \mathbf{U}_1 \text{ при } x = \mathbf{V}_1; \\ y = \alpha_n \mathbf{U}_n \text{ при } x = \mathbf{V}_n. \end{cases} \tag{13}$$

Соотношения (13) хорошо иллюстрируются рисунком.

Связь спектров сингулярных чисел и собственных значений

Покажем, что степень близости спектра сингулярных чисел матрицы \mathbf{N} к спектру модулей ее собственных значений в смысле свойств 4 и 1 (при этом носителем первого является диагональная матрица $\Sigma = \text{diag}\{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$, а второго – диагональная матрица $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$) определяется числом обусловленности $C\{\mathbf{M}\}$ модальной матрицы \mathbf{M} в силу неравенства

$$\|\Sigma\| \leq C\{\mathbf{M}\} \|\Lambda\|, \tag{14}$$

Действительно на основании (6) и (7) становится справедливым матричное соотношение $\Sigma = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V}$, переход в котором к нормам с учетом свойств (8) и (9) приводит к (14).

Неравенство (14) положим в основу построения алгоритма конструирования матриц простой структуры с желаемым спектром сингулярных чисел путем формирования матрицы \mathbf{N} с желаемым спектром собственных значений и спектром собственных векторов, доставляющих модальной матрице \mathbf{M} значение числа обусловленности $C\{\mathbf{M}\}$, близкое к единице. Конструирование такой матрицы осуществляется с использованием возможностей метода обобщенного модального управления [13].

Основной результат. Алгоритм формирования квадратных матриц простой структуры с желаемым спектром сингулярных чисел

К настоящему моменту сформировалась процедура синтеза ОМУ [7, 12], с помощью которой матрице состояния проектируемой системы доставляется желаемая структура как собственных значений, так и собственных векторов.

Суть этой процедуры состоит в следующем. Если записать соотношение подобия (1) в виде однородного матричного уравнения $\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{N}\mathbf{M} = 0$, то его с помощью аддитивно-мультипликативной декомпозиции матрицы \mathbf{N} в форме $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$, где $\mathbf{K} = \mathbf{H}\mathbf{M}^{-1}$, можно свести к неоднородному матричному уравнению $\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{M} = -\mathbf{B}\mathbf{H}$, именуемому матричным уравнением Сильвестра (УС). Решение УС относительно модальной матрицы \mathbf{M} с желаемым числом обусловленности определяется выбором матрицы \mathbf{H} . Таким образом, на основе решения УС и использования соотношения (21) можно предложить следующий алгоритм синтеза матрицы простой структуры с заданным спектром сингулярных чисел.

Шаг 1. Задать желаемый спектр $\sigma_\alpha\{\mathbf{N}\} = \{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$ сингулярных чисел матрицы \mathbf{N} , сформировать матрицу $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$;

Шаг 2. Построить на спектре $\sigma_\alpha\{\mathbf{N}\}$ сингулярных чисел диагональную матрицу $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i; |\lambda_i| = \alpha_i; i = \overline{1, n}\}$;

Шаг 3. Построить матрицу $\mathbf{M} = \arg\{C\{\mathbf{M}\} = 1\}$, для чего взять произвольную $(n \times n)$ матрицу \mathbf{P} , сформировать ее SVD-разложение $\mathbf{P} = \mathbf{U}_p \mathbf{\Sigma}_p \mathbf{V}_p^T$ и положить $\mathbf{M} = \mathbf{U}_p$ или $\mathbf{M} = \mathbf{V}_p$, что обеспечит матрице \mathbf{M} ортонормированность столбцов, гарантирующую выполнения условия $\mathbf{M} = \arg\{C\{\mathbf{M}\} = 1\}$;

Шаг 4. Сформировать произвольную $(n \times n)$ матрицу \mathbf{A} такую, чтобы алгебраические спектры $\sigma\{\mathbf{A}\}$ и $\sigma\{\mathbf{\Lambda}\}$ собственных значений матриц \mathbf{A} и $\mathbf{\Lambda}$ не пересекались: $\sigma\{\mathbf{A}\} \cap \sigma\{\mathbf{\Lambda}\} = \emptyset$;

Шаг 5. Сформировать произвольную $(n \times r)$ матрицу \mathbf{B} такую, чтобы она с матрицей \mathbf{A} образовывала управляемую пару $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$; при этом, если $\text{rang}(\mathbf{B}) = r < n$, то перейти к шагу 6 алгоритма, если $\text{rang}(\mathbf{B}) = r = n$, то перейти к шагу 8;

Шаг 6. Оценить принадлежность матрицы $(\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{\Lambda})$ образу матрицы \mathbf{B} : $(\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}) \in \text{Im}(\mathbf{B})$, если включение выполняется, то перейти к шагу 7, иначе – к шагу 5;

Шаг 7. Решить матричное уравнение Сильвестра $\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{M} = -\mathbf{B}\mathbf{H}$ относительно матрицы \mathbf{H} в форме $\mathbf{H} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{\Lambda})$ и перейти к шагу 8;

Шаг 8. Для случая $\text{rang}(\mathbf{B}) = n$ решить матричное уравнение Сильвестра $\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{M} = -\mathbf{B}\mathbf{H}$ относительно матрицы \mathbf{H} в форме $\mathbf{H} = \arg\{\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{M} = -\mathbf{B}\mathbf{H}\} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{\Lambda})$;

Шаг 9. Сформировать матрицу \mathbf{N} в форме $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$, где $\mathbf{K} = \mathbf{H}\mathbf{M}^{-1}$;

Шаг 10. Осуществить сингулярное разложение матрицы \mathbf{N} в форме (7) и проверить выполнение условия

$$\mathbf{\Sigma} = |\mathbf{\Lambda}| = \text{diag}\{|\lambda_i| = \alpha_i; i = \overline{1, n}\}. \quad \blacksquare$$

Пример

Постановка задачи. Сконструировать (2×2) матрицу \mathbf{N} со спектром сингулярных чисел $\sigma_\alpha(\mathbf{N}) = \{\alpha_1 = 7; \alpha_2 = 1\}$.

Решение. Следуем алгоритму.

1. Формируем матрицу $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\alpha_1 = 7; \alpha_2 = 1\} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

2. Формируем диагональную матрицу $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1 = -7; \lambda_2 = -1\}$;

3. Формируем произвольную невырожденную (2×2) – матрицу $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, строим ее сингулярное разложение $\mathbf{P} = \mathbf{U}_p \mathbf{\Sigma}_p \mathbf{V}_p^T = \begin{bmatrix} -0,4045 & -0,9145 \\ -0,9145 & 0,4045 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5,465 & 0 \\ 0 & 0,366 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,576 & 0,8174 \\ -0,8174 & -0,576 \end{bmatrix}$, формируем модальную матрицу $\mathbf{M} = \mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} 0,4045 & -0,9145 \\ 0,9145 & 0,4045 \end{bmatrix}$;
4. Формируем (2×2) матрицу $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$: $\sigma\{\mathbf{A}\} \cap \sigma\{\mathbf{\Lambda}\} = \emptyset$;
5. Формируем произвольную (2×2) матрицу $\mathbf{B} = \arg\{rang(\mathbf{B}) = n = 2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;
6. Выполняем Шаг 7. Решаем матричное уравнение Сильвестра относительно матрицы $\mathbf{H} = \arg\{\mathbf{M}\mathbf{\Lambda} - \mathbf{A}\mathbf{M} = -\mathbf{B}\mathbf{H}\} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}) = \begin{bmatrix} 5,874 & -2,849 \\ 2,55 & 2,638 \end{bmatrix}$;
7. Формируем матрицу \mathbf{N} в форме $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{H}\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -1,982 & -2,22 \\ -2,22 & -6,02 \end{bmatrix}$;
8. С помощью сингулярного разложения матрицы \mathbf{N} строим ее спектр сингулярных чисел $\sigma_\alpha(\mathbf{N}) = \{\alpha_1 = 7; \alpha_2 = 1\}$.

Заключение

На основе контроля числа обусловленности модальной матрицы с помощью алгоритмических возможностей обобщенного модального управления решена задача формирования матрицы с желаемым спектром сингулярных чисел. Задача решена для матриц простой структуры.

Литература

1. Замарашкин Н.Л., Тыртышников Е.Е. Распределение собственных и сингулярных чисел теплицевых матриц при ослабленных требованиях к производящей функции // Мат. сборник. – 1997. – Т. 188. – С. 83–92.
2. Wall M.E., Rechtsteiner A., Rocha L.M. Singular value decomposition and principal component analysis // A Practical Approach to Microarray Data Analysis. – Kluwer. – 2003. – P. 91–109.
3. Yeung M.K., Tegner J., Collins J.J. Reverse engineering gene networks using singular value decomposition and robust regression // Proc Natl Acad Sci USA. – 2002. – V. 55. – № 9. – P. 6163–6168.
4. Romo T.D., Clarage J.B., Sorensen D.C., Phillips G.N. Jr. Automatic identification of discrete substates in proteins: singular value decomposition analysis of time-averaged crystallographic refinements // Proteins. – 1995. – V. 22. – P. 311–321.
5. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
6. Акунов Т.А., Ушаков А.В. Анализ чувствительности эллипсоидных оценок многомерных процессов управления // Изв. вузов. Приборостроение. – 1991. – Т. 34. – № 8. – С. 21–27.
7. Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В. Вычислительные проблемы формирования функционалов вырождения сложных технических систем с интервальными матричными компонентами // Проблемы управления. – 2011. – № 2. – С. 31–36.
8. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2005. – 324 с.
9. Jessup E.R., Sorensen D.C. A parallel algorithm for computing the singular-value decomposition of a matrix // Siam Journal on Matrix Analysis and Applications. – 1994. – V. 15. – № 2. – P. 530–548.
10. Бирюков Д.С., Ушаков А.В. Контроль затрат на управление при воспроизведении гармонических экзогенных воздействий: грамианный подход // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2011. – № 2. – С. 117–122.
11. Джерард А., Берч Дж. Введение в матричную оптику. – М.: Мир, 1978. – 341 с.
12. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983. – 357 с.
13. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление // Изв. вузов. Приборостроение. – 2000. – Т. 43. – № 3. – С. 8–15.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

- Акунов Таалайбек Абакирович* – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, докторант, takunov@mail.ru
- Бирюков Дмитрий Сергеевич* – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, quaint03@mail.ru
- Дударенко Наталия Александровна* – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, dudarenko@yandex.ru
- Полякова Майя Вячеславовна* – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, 12noch@mail.ru
- Ушаков Анатолий Владимирович* – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, ushakov-AVG@yandex.ru