

УДК 681.5:621.865.8+519.71

СИСТЕМА И АЛГОРИТМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ БОЛБОТА

А.С. Боргуль, В.С. Громов, К.А. Зименко, С.Ю. Маклашевич

Решена задача стабилизации неустойчивой конструкции с шаром в основании и двух присоединенных к нему приводов. Синтезированы регуляторы на основе метода оптимизации линейно-квадратичного функционала и метода обеспечения качественной экспоненциальной устойчивости. Проведены экспериментальные исследования системы управления на макете, собранном на базе робототехнического комплекса LegoNXT.

Ключевые слова: болбот, перевернутый математический маятник, линейно-квадратичный регулятор, качественно-экспоненциальная устойчивость.

Введение

Болбот (Ballbot) – это мобильный робот, основной задачей которого является удержание собственной конструкции в положении равновесия на сферическом катке (шаре). Динамическая устойчивость болбота в сочетании с шаром вместо колес приводит к ряду уникальных свойств в области наземного транспорта: болбот является всенаправленным, т.е. может перемещаться в любом направлении и в любой момент времени, ограничиваясь лишь собственной динамикой, но не механическими связями, как у других конструкций. Таким образом, он не должен отклоняться от курса для того, чтобы изменить направление. Все это делает его более маневренным по сравнению с другим наземным транспортом.

Обладая уникальными характеристиками, такая система может найти ряд практических применений в условиях ограниченного пространства и требований к высокой маневренности, например, в условиях библиотеки или склада. Свойство динамической устойчивости позволяет использовать робота в динамических средах с возмущениями, таких как корабли, поезда [1]. Всенаправленность движения делает болбота пригодным для быстрой навигации в системах с нанесенной координатной сеткой. Также в условиях роста игровой индустрии и повышающегося интереса к созданию роботов, использующихся в сфере обслуживания, болбот обладает большими перспективами к дальнейшему развитию. Однако до сих пор болбот остается объектом научных исследований и служит узко определенным целям.

Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации болбота, представляющего собой робототехнический комплекс на подвижном основании (шаре), которое образует систему независимых перевернутых маятников. Задача решается при дополнительных условиях – неучтенной динамике и внешних возмущениях. Требуется выявить оптимальный метод стабилизации болбота с заданными показателями качества как при позиционировании на месте, так и при траекторном управлении, а также при наличии дополнительных управляющих воздействий.

Устройство робота

Основными элементами конструкции являются: шар, контроллер, два гироскопа, два двигателя постоянного тока со встроенными редукторами и энкодерами. Добавлен ультразвуковой датчик расстояния для контроля препятствий при перемещении и взаимодействия с объектами. Пластиковый шар в основании закреплен с трех сторон – одним свободно вращающимся колесом и двумя присоединенными к двигателям, с помощью которых осуществляется управление конструкцией.

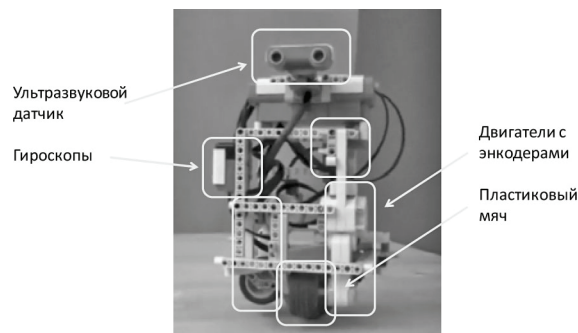


Рис. 1. Основные элементы конструкции

Математическая модель

Рассматривается модель, в которой движения в продольном и поперечном направлениях не связаны, и уравнения движения в этих двух плоскостях одинаковы. Тогда болбот можно рассматривать как две модели отдельных одинаковых перевернутых маятников на сферическом катке [2]. На рис. 2 показана система координат перевернутого маятника на сферическом катке, где ψ – угол отклонения конструкции; θ – угол поворота катка; θ_s – угол поворота катка, задаваемый двигателем. Двигатель вращает сферический каток через колесо с резиновой покрышкой. Допускается, что между ними нет скольжения. θ_m – угол поворота двигателя. $R_w \theta_m = R_s \theta_s$.

Опишем уравнение движения перевернутого маятника на сферическом катке методом Лагранжа, основываясь на системе координат, указанной ранее. Если $\theta = 0$ при $t=0$, тогда каждая координата задается следующим образом:

$$(x_s, z_s) = (R_s \theta, z_b), \quad (\dot{x}_s, \dot{z}_s) = (R_s \dot{\theta}, 0),$$

$$(x_b, z_b) = (x + L \sin \psi, z + L \cos \psi), \quad (\dot{x}_b, \dot{z}_b) = (R_s \dot{\theta} + L \dot{\psi} \cos \psi, -L \dot{\psi} \sin \psi).$$

Кинетическая энергия поступательного движения T_1 , вращательного движения T_2 , потенциальная энергия U записываются следующим образом:

$$T_1 = \frac{1}{2} M_s (\dot{x}_s^2 + \dot{z}_s^2) + \frac{1}{2} M_b (\dot{x}_b^2 + \dot{z}_b^2),$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_s \dot{\theta}_s^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_w \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_m^2 = \frac{1}{2} J_s \dot{\theta}_s^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} (J_m + J_w) \frac{R_s^2}{R_w^2} (\dot{\theta} - \dot{\psi}),$$

$$U = M_s g z_s + M_b g z_b.$$

Лагранжиан L имеет вид

$$L = T_1 + T_2 - U.$$

Используем θ и ψ как обобщенные координаты. Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_\theta, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = F_\psi.$$

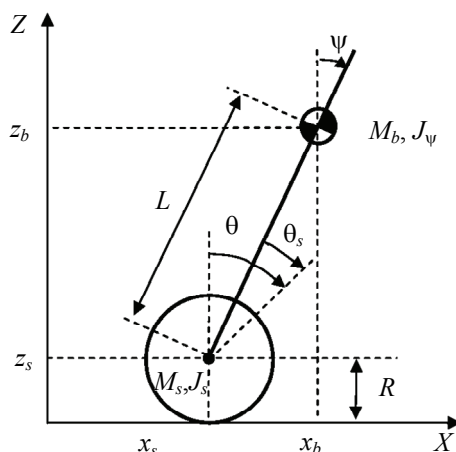


Рис. 2. Система координат перевернутого маятника

С учетом постоянного крутящего момента двигателя и вязкого трения обобщенные силы равны $F_\theta = K_t i - f_m \dot{\theta}_m - f_s \dot{\theta}$, $F_\psi = -K_t i - f_m \dot{\theta}_m$,

где i – ток двигателя; $\dot{\theta}_m = k(\dot{\theta} - \dot{\psi})$ – угловая скорость двигателя. Без учета трения внутри двигателя и индуктивности обобщенные силы выражаются [3] следующим образом:

$$F_\theta = \alpha \nu - (\beta + f_s) \dot{\theta} + \beta \dot{\psi}, F_\psi = -\alpha \nu + \beta \dot{\theta} - \beta \dot{\psi}, \alpha = \frac{K_t}{R_m}, \beta = k \left(\frac{K_t K_b}{R_m} + f_m \right).$$

Линеаризуем уравнения состояния, рассматривая предел $\psi \rightarrow 0$ ($\sin \psi \rightarrow \psi$, $\cos \psi \rightarrow 1$) и пренебрегая слагаемым второго порядка $\dot{\psi}^2$, в векторно-матричной форме имеем:

$$E \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix} = H \nu, E = \begin{bmatrix} (M_b + M_s) R_s^2 + J_s + J_m & M_b L R_s - k^2 J_m \\ M_b L R_s - k^2 J_m & M_b L^2 + J_\psi + k^2 J_m \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \beta + f_s & -\beta \\ -\beta & \beta \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M_b g L \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

Обозначим x – вектор состояния; u – вход.

$$x = \begin{bmatrix} \theta & \psi & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T; u = \nu;$$

Таким образом, представим уравнения состояния в форме Коши:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A(3,2) & A(3,3) & A(3,4) \\ 0 & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B(3) \\ B(4) \end{bmatrix};$$

$$A(3,2) = M_b g L E(1,2) / \det(E);$$

$$A(4,2) = -M_b g L E(1,1) / \det(E);$$

$$A(3,3) = -[(\beta + f_s) E(2,2) + \beta E(1,2)] / \det(E);$$

$$A(4,3) = [(\beta + f_s) E(1,2) + \beta E(1,1)] / \det(E);$$

$$A(3,4) = -\beta [E(2,2) + E(1,2)] / \det(E) \quad A(4,4) = -\beta [E(1,1) + E(1,2)] / \det(E);$$

$$B(3) = -\alpha [E(2,2) + E(1,2)] / \det(E);$$

$$B(4) = -\alpha [E(1,1) + E(1,2)] / \det(E) \quad \det(E) = E(1,1)E(2,2) - E(1,2)^2.$$

Расчет регуляторов

На вход системы управления подается напряжение управления двигателями. Выходом системы являются значения с энкодеров угла поворота двигателя θ_m и угловая скорость отклонения конструкции от вертикали $\dot{\psi}$. Численное значение угла отклонения ψ получается путем интегрирования угловой скорости $\dot{\psi}$. Начальные условия при интегрировании определяются из условия вертикального запуска,

выбранного положения объекта. Положение равновесия является неустойчивым. При минимальном отклонении необходимо двигать болбот в направлении угла наклона конструкции, чтобы удержать баланс.

Линейно-квадратичный регулятор. Для решения задачи удержания перевернутого маятника в положении неустойчивого равновесия синтезируется пропорционально-интегральный регулятор (рис. 3). C_θ – матрица выхода для получения θ из x .

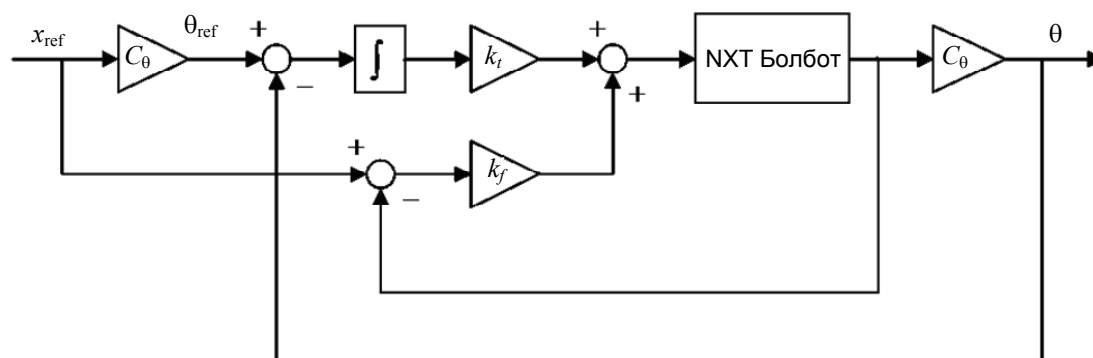


Рис. 3. Схема пропорционально-интегрального регулятора

Рассчитаем коэффициенты пропорциональной и интегральной составляющих на основе метода линейно-квадратичного регулятора. Линейно-квадратичный регулятор – в теории управления один из видов оптимальных регуляторов, использующий квадратичный функционал качества [4]. Выберем весовые матрицы Q и R [5]:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix}, \quad R = 6 \times 10^3 \times \left(\frac{180}{\pi} \right)^2,$$

где $Q(2,2)$ – элемент весовой матрицы состояния, характеризующий вес значения угла отклонения конструкции, $Q(5,5)$ – элемент весовой матрицы состояния, характеризующий вес по времени интегрирования разницы между ранее измеренным и полученным углами.

Используя полученные ранее математическую модель робота и весовую матрицу, рассчитаем в среде Matlab численные значения коэффициентов для пропорциональной и интегральной составляющих. Функция *lqr* вычисляет матрицу коэффициентов регулирования со среднеквадратичным функционалом качества [6]. В результате вычислений получается набор коэффициентов:

$$k_f = [-0,015 \ -1,5698 \ -0,027 \ -0,2325], \quad k_i = -0,0071.$$

Качественная экспоненциальная устойчивость. Построим регулятор, обеспечивающий экспоненциальную сходимость со следующими показателями качества: $t_n = 0,36$ с; $\delta_n = 0$.

В линейных системах подлежит минимизации квадратичный критерий качества

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt.$$

Непрерывная система экспоненциально устойчива в точке $x = 0$, если существуют такая квадратичная функция Ляпунова

$$V(x(t)) = x^T(t)P(t)x(t),$$

где $P = P^T$ – положительно определенная $n \times n$ матрица, и такой параметр $\lambda : \lambda < 0$, при которых на всех траекториях движения системы в любой момент времени $t \geq 0$ выполняется условие

$$\dot{V}(x(t)) \leq 2\lambda V(x(t)).$$

Данное условие имеет место, если справедливо уравнение

$$\dot{V}(x(t)) - 2\lambda V(x(t)) = -x^T(t)Q(t)x(t) - u^T(t)R(t)u(t).$$

Подставив квадратичную функцию Ляпунова и ее производную, получим:

$$[A(t)x(t) + B(t)u(t) - \lambda x(t)]^T P(t)x(t) + x^T(t)P(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t) - \lambda x(t)] + x^T(t)\dot{P}(t)x(t) + u^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) = 0,$$

на основе которого, воспользовавшись методом локальной оптимизации [7], находим оптимальное управление:

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t).$$

Получим систему матричных уравнений типа Риккати [7]:

$$\dot{P}(t) + [A(t) - B(t)K(t) - \lambda I]^T P(t) + P(t)[A(t) - B(t)K(t) - \lambda I] + K^T(t)R(t)K(t) + Q(t) = 0,$$

$$K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t).$$

Так как матрицы A, B, Q, R постоянны, то процесс достигает установившегося состояния в том смысле, что становится постоянной матрица P ($\dot{P} = 0$):

$$[A - BK - \lambda I]^T P + P[A - BK - \lambda I] + K^T R K + Q = 0, \quad K = R^{-1} B^T P.$$

Из матричных алгебраических уравнений получается следующая матрица обратных связей K регулятора: $K_f = [-0,0117 \quad -1,4993 \quad -0,0284 \quad -0,2432]$.

Сравнительный анализ полученных регуляторов (линейно-квадратичного регулятора на рис. 4 и регулятора на основе метода качественной экспоненциальной устойчивости на рис. 5) проведен на основе экспериментальных данных.

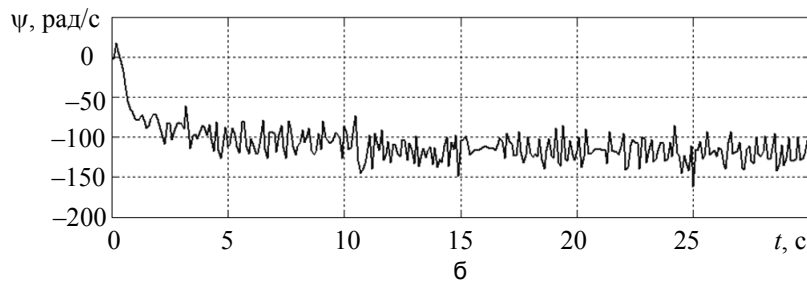
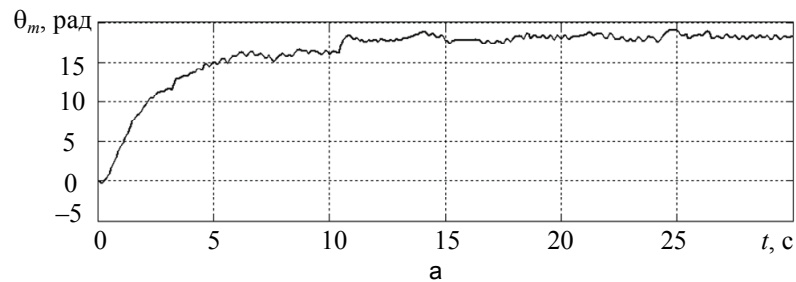


Рис. 4. Показания при использовании линейно-квадратичного регулятора: угол поворота двигателя (а); скорость изменения угла крена (б)

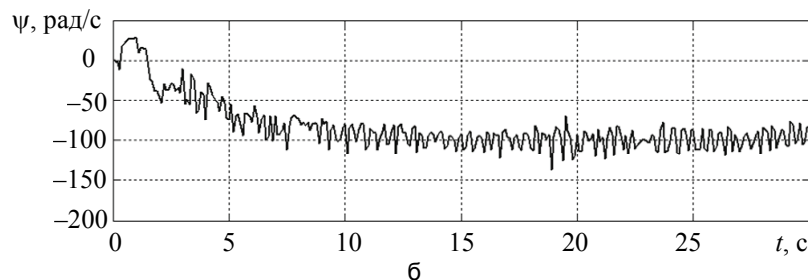
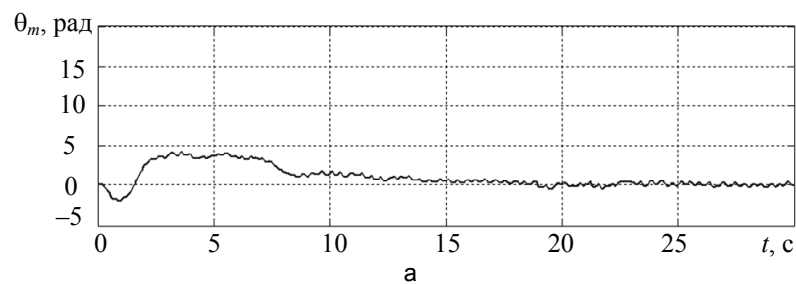


Рис. 5. Показания при использовании регулятора на основе метода качественной экспоненциальной устойчивости: угол поворота двигателя (а); скорость изменения угла крена (б)

Из полученных графиков видно, что использование качественно-экспоненциального регулятора приводит к уменьшению колебательности процесса стабилизации болота и более точному позиционированию конструкции.

Заключение

В результате проделанной работы был получен опытный образец и синтезирован алгоритм, позволяющий стабилизировать в вертикальном положении объект на сферическом катке, обладающий достаточным запасом качества для отработки дополнительных управляющих воздействий. Был произведен синтез линейно-квадратичного регулятора и регулятора на основе качественной экспоненциальной устойчивости. Анализ полученных данных показал, что регулятор на основе качественной экспоненциальной устойчивости обеспечивает лучшие точностные и качественные показатели, а, следовательно, является более предпочтительным в условиях поставленной задачи.

Литература

1. Lauwers T.B., Kantor G.A., Hollis R.L. A dynamically stable single-wheeled mobile robot with inverse mouse-ball drive // IEEE International Conference on Robotics and Automation. – 2006. – 2884 p.
2. Nagarajan U., Mampetta A., Kantor G., Hollis R. State transition, balancing, station keeping, and yaw control for a dynamically stable spherical wheel mobile robot // IEEE International Conference on Robotics and Automation. – 2009. – P. 3161–3166.
3. Колюбин С.А., Пыркин А.А. Управление нетривиальными маятниковыми системами в условиях параметрической и функциональной неопределенностей // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 69. – С. 34–39.
4. Anderson B.D.O., Moore J.B. Optimal control: linear quadratic methods. – Prentice-Hall, 1989. – 394 p.
5. На Y.-S., Yuta S. Trajectory tracking control for navigation of self-contained mobile inverse pendulum // Proc. IEEE/RSJ Int'l. Conf. on Intelligent Robots and Systems. – 1994. – P. 1875–1882.
6. Linear-Quadratic-Regulator (LQR) design – MATLAB [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mathworks.com/help/toolbox/control/ref/lqr.html>, св. Яз. англ. (дата обращения 18.03.2011).
7. Быстров С.В., Григорьев В.В., Рабыш Е.Ю., Черевко Н.А. Экспоненциальная устойчивость непрерывных динамических систем // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2011. – № 73. – С. 44–47.

<i>Боргуль Александр Сергеевич</i>	– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, borgulalexandr@gmail.com
<i>Громов Владислав Сергеевич</i>	– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, object253@yandex.ru
<i>Зименко Константин Александрович</i>	– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, kostyazimenko@gmail.com
<i>Маклашев Сергей Юрьевич</i>	– Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студент, s.maklashevich@gmail.com