5 МЕХАНИКА И МЕХАТРОНИКА

УДК 531

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

С.Е. Иванов

Рассматривается математическая модель динамической системы с тремя степенями свободы, с нелинейными правыми частями в виде многочленов до четвертой степени от фазовых переменных с постоянными и периодическими параметрами. Методом многочленных преобразований уравнения движения системы приводятся к автономному виду. Определяются существенные константы, характеризующие переходные процессы и установившиеся режимы колебаний. Приводится алгоритм метода многочленных преобразований и алгоритмические формулы программной реализации метода.

Ключевые слова: нелинейная система с тремя степенями свободы, методы исследования нелинейных систем, установившийся режим колебаний.

Введение

Рассматриваются нелинейные колебательные динамические системы с периодическими коэффициентами [1, 2]. Динамические системы описываются системой дифференциальных уравнений шестого порядка с нелинейной частью в виде многочлена до четвертой степени относительно фазовых координат с постоянными и периодическими коэффициентами [3]. Метод многочленных преобразований, предложенный Г.И. Мельниковым, является общим методом исследования нелинейных систем с конечным числом степеней свободы [4]. В результате применения метода система преобразуется к автономному виду. Метод многочленных преобразований обеспечивает минимизацию количества параметров нелинейной динамической системы. Выделяются существенные константы, определяющие свойства динамической системы. Преобразованная система содержит на порядок меньше ненулевых коэффициентов, чем исходная. Сокращение количества ненулевых коэффициентов существенно упрощает исследование сложных нелинейных динамических систем, переходных и установившихся процессов исследуемых систем [5]. Для исследования установившихся и переходных режимов колебаний нелинейных динамических систем с тремя степенями свободы приведены алгоритмические формулы для программной реализации метода и составлен пакет программ.

Метод исследования динамической системы

Рассмотрим математическую модель нелинейной динамической системы с тремя степенями свободы, с правыми частями в виде многочленов до четвертой степени относительно фазовых переменных с постоянными и периодическими параметрами. Дифференциальные уравнения движения представлены в общем виде:

$$A\ddot{q}+B\dot{q}+Cq=\sum_{|\mu|=1}^{4} g_\mu \cos(\omega t)^{\mu_1}\sin(\omega t)^{\mu_2}+\sum_{|\nu|=1}^{4} h_\nu \cos(\omega t)^{\nu_1}\sin(\omega t)^{\nu_2}\, q_1^{\nu_3} q_2^{\nu_4} q_3^{\nu_5}\dot{q}_1^{\nu_6}\dot{q}_2^{\nu_7}\dot{q}_3^{\nu_8}\,, \qquad (1)$$

где $q=[q_1,q_2,q_3]^T$ – вектор обобщенных координат; A,B,C – матрицы третьего порядка; $\mu=(\mu_1\mu_2),\ \nu=(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5\nu_6\nu_7\nu_8)$ – векторные индексы, $|\mu|=\mu_1+\mu_2$, $|\nu|=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_8$.

Применяется предположение, что характеристическое уравнение $\det[A\lambda^2+B\lambda+C]=0$ имеет три пары комплексно-сопряженных корней $\lambda_s,\bar{\lambda}_s$ с малыми отрицательными вещественными частями и компонентами вектора нелинейных частей $|g_\mu^s|<\varepsilon, |h_\mu^s|<\varepsilon$.

Приведем алгоритмические формулы метода многочленных преобразований, применимые для программной реализации метода.

Вводятся комплексно-сопряженные переменные:

$$q_0=\exp(i\omega t),\ \bar{q}_0=\exp(-i\omega t), \lambda=i\omega. \qquad (2)$$

В новых переменных (2) запишем $\cos(\omega t)=\frac{1}{2}(q_0+\bar{q}_0), \sin(\omega t)=\frac{1}{2i}(q_0-\bar{q}_0)$.

Систему (1) можно переписать в виде системы восьми дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши с фазовым вектором $X=[q_0\bar{q}_0 q_1 q_2 q_3 \dot{q}_1\dot{q}_2\dot{q}_3]^T$

$$\dot{X}=PX+R, \qquad (3)$$

где постоянная квадратная блочная матрица восьмого порядка имеет вид

$$P \equiv \begin{bmatrix} W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ A^{-1}H & -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A^{-1}G \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix}.$$

Линейным преобразованием

$$Y = DX \tag{4}$$

линейная часть системы (3) приводится к диагональному виду:

$$\dot{Y} = \Lambda Y + R\Big|_{X \to D^{-1}Y},$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots \lambda_4, \bar{\lambda}_4]. \tag{5}$$

Выполняется преобразование, содержащее многочлены четвертой степени:

$$y_s = z_s + \sum_{|\nu|=2}^{4} a_\nu^s Z^\nu, (s = 3, \ldots 8), Z^\nu = z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_8^{\nu_8}, \tag{6}$$

где a_ν^s – неизвестные коэффициенты преобразования.

Введенные комплексно-сопряженные переменные не преобразовываются $y_s = z_s$ $(s = 1, 2)$.

Результатом многочленного преобразования является автономная система

$$\dot{z}_s = \lambda_s z_s + \sum_{|\nu|=2}^{4} q_\nu^s Z^\nu, (s = 3, \ldots 8), \tag{7}$$

где q_ν^s – искомые коэффициенты преобразованной системы.

Особые значения векторного индекса при фиксированном s, находятся как целочисленные неотрицательные решения двух уравнений [6]:

$$\sum_{k=1}^{8} \lambda_k \nu_k - \lambda_s \approx 0, \sum_{k=1}^{8} \nu_k = 2, 3, 4. \tag{8}$$

Постоянные q_ν^s приравниваем к нулю при неособых значениях индексов; при таких значениях вычисляют постоянные a_ν^s. И, наоборот, при особых значениях индексов полагают коэффициенты a_ν^s равными нулю и вычисляют q_ν^s.

В нерезонансном случае из уравнений (8) находим следующие особые индексы:

при q_ν^3 $\nu = (0,0,1,0,0,0,1,1), \nu = (0,0,1,0,1,1,0,0), \nu = (0,0,2,1,0,0,0,0), \nu = (1,1,1,0,0,0,0,0)$,

при q_ν^5 $\nu = (0,0,0,0,1,0,1,1), \nu = (0,0,0,0,2,1,0,0), \nu = (0,0,1,1,1,0,0,0), \nu = (1,1,0,0,1,0,0,0)$,

при q_ν^7 $\nu = (0,0,0,0,0,0,2,1), \nu = (0,0,0,0,1,1,1,0), \nu = (0,0,1,1,0,0,1,0), \nu = (1,1,0,0,0,0,1,0)$.

В преобразованной системе (7) сделаем замену переменных:

$$z_s = \rho_s \exp(i(t\,\mathrm{Im}\lambda_s + \theta_s)), \bar{z}_{s+1} = \rho_s \exp(i(t\,\mathrm{Im}\lambda_{s+1} - \theta_s)), s = 3,5,7; z_{1,2} \equiv \exp(\pm it\omega). \tag{9}$$

В результате получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\rho}_s = \mathrm{Re}(\lambda_s)\rho_s + \mathrm{Re}(\psi_s), \dot{\theta}_s = \rho_s^{-1}\,\mathrm{Im}(\psi_s), s = 3, 5, 7. \tag{10}$$

В нерезонансном случае [7] экспонента не входит в систему (10), так как ее степень равна нулю. Стационарные решения можно найти, приравнивая к нулю правые части системы (10).

Получив решение преобразованной системы и подставив его в формулы замены переменных (9), найдем вектор Z. Вектор Y (5) выражается через вектор Z по формулам многочленной замены (6). Решение системы (1), вектор X, выражается через вектор Y по формулам замены, обратной линейной (4): $X = D^{-1}Y$.

Получены алгоритмические формулы для расчета коэффициентов преобразования и преобразованной системы:

$$\sum_{|\nu|=2}^{4} q_\nu^s Z^\nu + \sum_{|\nu|=2}^{4} (a_\nu^s Z^\nu (\sum_{k=1}^{8} \lambda_k \nu_k - \lambda_s)) + \sum_{|\nu|=2}^{4} (a_\nu^s Z^\nu \sum_{k=3}^{8} \nu_k z_k^{-1} \sum_{|\mu|=2}^{4} q_\mu^k Z^\mu) = R(Z), (s = 3, \ldots 8). \tag{11}$$

Приравнивая в (11) коэффициенты при одинаковых степенях Z, получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов преобразования и преобразованной системы.

В форме символьных преобразований многочленов разработана программа для исследования методом многочленных преобразований нелинейных систем с тремя степенями свободы.

Заключение

Приводится схема метода многочленных преобразований для исследования нелинейных динамических систем с тремя степенями свободы. Получены алгоритмические формулы метода, удобные для составления программ с использованием символьных вычислений. Разработан пакет программ для исследования методом нелинейных задач. Методом многочленных преобразований нелинейная периодическая система приводится к автономному виду. Метод позволяет получить качественные и количественные характеристики динамических систем, исследовать установившиеся и переходные режимы динамических систем, находящихся в условиях периодического внешнего воздействия. Определены существенные динамические константы динамической системы, характеризующие переходные процессы и установившиеся режимы движения системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 10-08-01046-а.

Литература

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
2. Зиновьев Н.М., Мяснянкин Ю.М. Введение в теорию колебаний конструкций: Учебное пособие. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2005. – 35 с.
3. Иванов С.Е. Определение установившихся режимов работы виброзащитной системы с двумя степенями свободы // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 4(68). – С. 44–46.
4. Иванов С.Е. О реализации численно-аналитического метода многочленных преобразований на компьютере // Современные технологии: Труды молодых ученых ИТМО. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2001. – С. 138–141.
5. Кузнецов А.П. Нелинейные колебания: Учебное пособие. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2002. – 292 с.
6. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. – Л: Машиностроение, 1975. – 198 с.
7. Мельников В.Г., Мельников Г.И., Иванов С.Е. Компьютерные технологии в механике приборных систем: Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – 127 с.

Иванов Сергей Евгеньевич – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат физ.-мат. наук, доцент, SIvanov@mail.ifmo.ru