

УДК 62.50: 681.5.01

СТЕПЕНЬ БЛИЗОСТИ ПРОСТОЙ И КРАТНОЙ СТРУКТУР СОБСТВЕННЫХ
ЧИСЕЛ: МИНИМИЗАЦИЯ ВЫБРОСА ТРАЕКТОРИЙ СВОБОДНОГО
ДВИЖЕНИЯ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ¹

Т.А. Акунов^а, Н.А. Дударенко^а, Н.А. Полинова^а, А.В. Ушаков^а

^а Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО), Санкт-Петербург, Россия, takunov@mail.ru

Рассматривается устойчивая апериодическая непрерывная система, матрица состояния которой обладает вещественным спектром собственных чисел, по модулю меньших единицы. Как показано в последних работах авторов, при таких значениях модуля и кратной структуре собственных чисел в траекториях свободного движения системы по норме вектора состояния обнаруживаются существенные выбросы, сменяющиеся монотонным движением к состоянию покоя. С целью минимизации величины выброса предлагается модифицировать структуру собственных чисел, преобразовав ее в простую. В результате модификации образуется следующая структура: исходное собственное число и сдвинутые по вещественной оси плоскости комплексных чисел влево на фиксированную величину относительно соседнего собственного числа, причем каждое из них имеет единичную кратность. Такая модификация позволяет сформировать оценку степени близости простой структуры собственных чисел к кратной. Более того, она может быть задана в относительной форме, при которой гарантируется снижение указанных выше выбросов траектории свободного движения. Положения статьи иллюстрируются результатами компьютерных экспериментов. Результаты компьютерного моделирования подтверждают справедливость основных положений статьи.

Ключевые слова: апериодическая система, степень близости собственных чисел к кратности, норма, траектория.

PROXIMITY DEGREE FOR SIMPLE AND MULTIPLE STRUCTURES
OF THE EIGENVALUES: OVERTHOOT MINIMIZATION FOR FREE MOTION
TRAJECTORIES OF APERIODIC SYSTEM¹

T.A. Akunov^a, N.A. Dudarenko^a, N.A. Polinova^a, A.V. Ushakov^a

^a Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics (ITMO University), Saint Petersburg, Russia, takunov@mail.ru

The paper deals with steady aperiodic continuous system, state matrix of which has a real spectrum of the eigenvalues which absolute value is less than unity. The latest authors' works show that for such absolute values and multiple structure of eigenvalues on the free motion trajectories of the system by norm of the state vector the significant overshoot is detected, alternated by monotonous motion toward a state of rest. In order to minimize the overshoot value, it is proposed to modify the structure of the eigenvalues, transforming it into a simple one. The result of structure modification is the following: initial eigenvalue and shifted along the real axis of the complex plane to the left by a fixed value relative to the adjacent eigenvalues; each of them has unit multiplicity. Such modification gives the possibility to form the estimation of the proximity degree of eigenvalues simple structure to the multiple one. Moreover, it can be defined in a relative form, which guarantees the reduction of the above overshoot for the free motion trajectory. Results of computer experiments illustrate the issues of the paper.

Keywords: aperiodic system, proximity degree of eigenvalues to multiplicity, norm, trajectory.

Введение. Постановка задачи

Ставится задача исследования свободного движения устойчивой линейной непрерывной многомерной динамической системы по норме вектора ее состояния с целью изучения влияния на это поведение близости структуры собственных чисел (СЧ) ее матрицы состояния к кратной. Поставленная задача решается для случая вещественных СЧ с учетом результатов, изложенных в [1, 2], которые состоят в том, что в апериодической системе (системе с вещественными СЧ) при кратности СЧ, большей единицы, и значениях модуля СЧ, меньших единицы, могут появиться заметные выбросы нормы вектора состояния в свободном движении. В [1, 2] показано, что величина выброса растет с уменьшением модуля СЧ и с увеличением их кратности столь стремительно, что это может потребовать особого внимания разработчика. С целью минимизации величины выброса предлагается модифицировать кратную структуру СЧ, преобразовав ее в простую. В результате образуется размещение СЧ, состоящее из исходного собственного

¹ Работа подготовлена при поддержке проектом №12347 «Развитие методов адаптивного управления сложными динамическими объектами с применением к мехатронным и робототехническим системам».

The work was made with the support of project № 12347 «Development of adaptive control for complex dynamic objects with application to robotics and mechatronic systems».

числа и чисел, сдвинутых по вещественной оси комплексной плоскости влево на фиксированную величину относительно соседнего, причем каждое из них имеет единичную кратность.

В общей системной постановке решаемая задача является частным случаем достижения в каком-то смысле наилучшего размещения СЧ. Эта задача разрабатывается специалистами по теории управления вот уже более тридцати лет и имеет достаточно обширную библиографию [3–10]. Отличительной особенностью решаемой авторами задачи является то, что предлагаемая ими модификация кратного размещения СЧ позволяет сформировать оценку степени близости простой структуры СЧ к кратной. Более того, она может быть задана в относительной форме, при которой гарантируется снижение указанных выше выбросов траектории свободного движения, а потому может рассматриваться как дополнительный функционал при синтезе аperiodических систем.

Задача решается в два этапа. На первом этапе используется представление матрицы состояния системы в «квазитордановой» форме, которая совпадает с жордановой по построению, но имеет на главной диагонали собственные числа, отстоящие друг от друга на фиксированную величину. Эта величина в относительном представлении используется авторами в качестве оценки степени близости простой структуры СЧ к кратной. На втором этапе исследования переносятся на систему с матрицей состояния произвольной формы в классе подобных «квазитордановой» представлений.

Алгоритмически задача модификации структуры СЧ с целью преобразования ее в простую может быть решена как задача синтеза модального управления [3, 11], базирующегося на матричном формализме уравнения Сильвестра.

Аналитическое исследование свободного движения непрерывной многомерной аperiodической системы с заданной оценкой степени близости простой структуры собственных чисел ее матрицы состояния к кратной

Рассматривается линейная гурвицева непрерывная многомерная динамическая система, задаваемая [11, 12] в векторно-матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t)$ – вектора соответственно начального и текущего состояний системы; \mathbf{F} – ее матрица состояния; $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t) \in R^n$; $\mathbf{F} \in R^{n \times n}$. Матрица системы \mathbf{F} , заданная в произвольном базисе, обладает $\sigma\{\mathbf{F}\}$ спектром собственных чисел $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, имеющим вид

$$\sigma\{\mathbf{F}\} = \{\lambda_i = \lambda + \Delta\lambda \cdot (i-1) = \lambda(1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n}; \delta = ?\}; \delta = \frac{|\Delta\lambda|}{|\lambda|}. \tag{2}$$

В представлении (2) фактически заложена содержательная часть постановки задачи, состоящей в оценке величины δ модификации кратной структуры СЧ в простую в соответствии с правилом

$$\{\lambda_i = \lambda(1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n}\}. \tag{3}$$

Реализуя заявленную во введении двухэтапную процедуру решения задачи, перейдем от системы (1) с матрицей состояния \mathbf{F} , заданной в произвольной форме, к системе с матрицей состояния, заданной в «квазитордановой» форме, которая с учетом (3) имеет вид

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{J}}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n}\}\tilde{\mathbf{x}}(t). \tag{4}$$

В (4) матрица состояния, построенная на спектре $\sigma\{\mathbf{F}\}$ (2) СЧ матрицы \mathbf{F} , будет представлять собой $(n \times n)$ – «квазиторданову» клетку $\tilde{\mathbf{J}}(\alpha)$, имеющую представление

$$\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n}\} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda \cdot (1 + \delta) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda(1 + \delta \cdot (n-1)) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Заметим, что векторные и матричные компоненты системы (1) и системы (4) связаны векторно-матричными соотношениями подобия в форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{S}\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n}\} = \mathbf{F}\mathbf{S}, \tag{6}$$

где \mathbf{S} – $(n \times n)$ -матрица неособого преобразования подобия [13].

Теперь поставим задачу исследования свободного движения системы (4) по вектору ее состояния в скаляризованной форме. Решение системы (4) $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(0))$ имеет [1, 11–14] вид

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(0)) = \exp\left\{\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n}\} t\right\} \tilde{\mathbf{x}}(0). \quad (7)$$

В силу структуры (5) матрицы $\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n}\}$ ее можно представить в форме

$$\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n}\} = \mathbf{\Lambda} + \tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1)\}; \mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i = \lambda; i = \overline{1, n}\}. \quad (8)$$

В силу (8) для матричной экспоненты в (7) становится справедливой [13, 14] запись

$$\exp(\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i-1))\}t) = \exp(\mathbf{\Lambda}t)\exp(\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1)\}t) = e^{\lambda t} \exp(\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1)\}t). \quad (9)$$

Скаляризацию векторного процесса (7) осуществим на основе использования согласованных [13] векторных и матричных норм с учетом представления (9), в результате чего получим цепочку соотношений:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \left\| \exp\left\{\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n}\}t\right\} \tilde{\mathbf{x}}(0)\right\| \leq e^{\lambda t} \left\| \exp\left\{\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, n}\}t\right\}\right\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|. \quad (10)$$

В (10) для получения аналитического представления компонента $\exp\left\{\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, n}\}t\right\}$ построим базу индукции для нарастающей размерности $n = \dim(\mathbf{x})$ вектора состояния системы (4) по схеме

$$\tilde{\mathbf{J}}(*, n) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{J}}(*, n)) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{J}}(*, n))^{-1} \Rightarrow \exp\{\tilde{\mathbf{J}}(*, n)t\} = L^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{J}}(*, n))^{-1}\right\}, \quad (11)$$

где s – переменная преобразования Лапласа; $\tilde{\mathbf{J}}(*, n) = \tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, n}\}$; $L^{-1}\{\circ(s)\}$ – обратное преобразование Лапласа от функции $\circ(s)$; \mathbf{I} – единичная матрица.

Следуя схеме (11), получим итоговые результаты как функции размерности n в следующем виде:

$$1. \text{ при } n = 2: \exp(\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, 2}\}t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{\lambda\delta t} - 1) \\ 0 & e^{\lambda\delta t} \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$2. \text{ при } n = 3: \exp(\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, 3}\}t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{\lambda\delta t} - 1) & \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\lambda\delta}(e^{\lambda\delta t} - 1)\right)^2 \\ 0 & e^{\lambda\delta t} & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{2\lambda\delta t} - e^{\lambda\delta t}) \\ 0 & 0 & e^{2\lambda\delta t} \end{bmatrix}; \quad (13)$$

3. при $n = 4$:

$$\exp(\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, 4}\}t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{\lambda\delta t} - 1) & \frac{1}{2!(\lambda\delta)^2}(e^{\lambda\delta t} - 1)^2 & \frac{1}{3!(\lambda\delta)^3}(e^{\lambda\delta t} - 1)^3 \\ 0 & e^{\lambda\delta t} & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{2\lambda\delta t} - e^{\lambda\delta t}) & \frac{1}{2\lambda\delta}(e^{3\lambda\delta t} - e^{\lambda\delta t}) \\ 0 & 0 & e^{2\lambda\delta t} & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{3\lambda\delta t} - e^{2\lambda\delta t}) \\ 0 & 0 & 0 & e^{3\lambda\delta t} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Выражения (12)–(14) образуют базу индукции, которая хорошо просматривается для строчной (бесконечной) нормы $\left\|\exp\left\{\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, n}\}t\right\}\right\|_{\infty}$, записываемой в форме суммы членов первой строки матричной экспоненты

$$\left\|\exp\left\{\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, n}\}t\right\}\right\|_{\infty} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{e^{\lambda\delta t} - 1}{\lambda\delta}\right)^i. \quad (15)$$

В связи с обнаруженным свойством (15) бесконечной нормы матричной экспоненты $\left\|\exp\left\{\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, n}\}t\right\}\right\|_{\infty}$, состоящим в компактном аналитическом ее представлении, все дальнейшие исследования поставленной задачи авторы строят на ее использовании, а потому нижний индекс « ∞ » в обозначении нормы опускается. Нетрудно видеть, что представление (15) удовлетворяет предельному переходу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\|\exp\left\{\tilde{\mathbf{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1, n}\}t\right\}\right\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{e^{\lambda\delta t} - 1}{\lambda\delta}\right)^i = \exp\left(\frac{e^{\lambda\delta t} - 1}{\lambda\delta}\right). \quad (16)$$

Заметим, что если в (16) осуществить предельный переход по δ в форме $\delta \rightarrow 0$, что соответствует конвергенции простой и кратной структур матриц состояния систем (1) и (4), то для строчной нормы матричной экспоненты получим

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \exp \left\{ \tilde{\mathbf{J}} \{ \lambda \delta \cdot (i-1); i = \overline{1, n} \} t \right\} \right\| \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i = e^t. \quad (17)$$

Соотношение (17) как множитель в структуре нормы матричной экспоненты для случая кратных вещественных СЧ $\lambda_i : \lambda_i < 0 \ \& \ \lambda_i = \lambda; i = \overline{1, n} < 1$ порождает выброс в свободном движении системы [1].

Нетрудно видеть, что в качестве критерия факта сохранения выброса в траекториях свободного движения системы по норме может быть принята величина $t_M \geq 0$, удовлетворяющая условию

$$t_M = \arg \left\{ \frac{d \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|}{dt} = 0 \right\}. \quad (18)$$

Если задача имеет экспресс-постановку, т.е. как фиксация факта сохранения выброса в траекториях свободного движения по норме в системе с простой структурой СЧ, характеризующейся назначенной величиной δ степени ее близости к кратной, то ее решение может быть построено на использовании мажорирующего покрытия [14] процессов (10), формируемого с учетом представления (16) при условии $\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| = 1$ в виде

$$\text{roof} \left\{ \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \right\} = \text{roof} \left\{ \left\| \exp \left\{ \tilde{\mathbf{J}} \left(\lambda \cdot (1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n} \right) \right\} \right\| \right\} = e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta t} - 1}{\lambda \delta} \right). \quad (19)$$

Задачу контроля выполнения условия (18) разобьем на две.

Первая задача имеет целью оценить условия, при которых в точке $t = 0$ скорость изменения покрытия оказывается нулевой, так что выполняется условие

$$\frac{d}{dt} \left\{ e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta t} - 1}{\lambda \delta} \right) \right\} \Big|_{t=0} = 0. \quad (20)$$

Выполнение операции дифференцирования в (20) по времени приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt} \left\{ e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta t} - 1}{\lambda \delta} \right) \right\} = e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta t} - 1}{\lambda \delta} \right) (\lambda + e^{\lambda \delta t}). \quad (21)$$

При $t = 0$ и с учетом условия (20) получаем цепочку соотношений

$$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1. \quad (22)$$

Соотношение (22) показывает, что независимо от величины δ оценки степени близости простой структуры СЧ к кратной, осуществляемой по схеме $\lambda_i = \lambda \cdot (1 + (i-1) \cdot \delta; i = \overline{1, n})$, нулевая скорость в точке $t = 0$ имеет место только при условии $\lambda = -1$. При $\lambda < 0 \ \& \ |\lambda| > 1$ эта скорость будет отрицательной, при $\lambda < 0 \ \& \ |\lambda| < 1$ – положительной, т.е. будет наблюдаться рост нормы вектора состояния системы с течением времени, сменяющийся со временем монотонным ее спаданием к нулю.

Вторая задача имеет целью вычисление момента $t_M > 0$, удовлетворяющего условию наличия экстремума в траектории по норме. Ее экспресс-оценку можно сформировать на основе покрытия процессов (19), что приводит к соотношению

$$t_M = \arg \left\{ \frac{d}{dt} \left\{ e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta t} - 1}{\lambda \delta} \right) \right\} = 0 \right\}. \quad (23)$$

Если в (23) учесть (21), то получим цепочку соотношений

$$t_M = \arg (\lambda + e^{\lambda \delta t} = 0) = \frac{1}{\lambda \delta} \ln (-\lambda). \quad (24)$$

Решение задачи точной фиксации момента $t_M > 0$, удовлетворяющего условию наличия экстремума по норме в траекториях свободного движения в системе с простой структурой СЧ, характеризующейся назначенной величиной δ степени ее близости к кратной, может быть построено на использовании точного представления процессов по норме $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$, формируемого с учетом представления (15) при условии $\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| = 1$ в виде

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{e^{\lambda \delta t} - 1}{\lambda \delta} \right)^i. \quad (25)$$

Вычисление по формуле			(25)		(24)	
n	δ	λ	-0,2	-0,02	-0,2	-0,02
2	10^{-6}	t_M	4	49	$8 \cdot 10^6$	$1956 \cdot 10^5$
	0,1		3,78	46,67	80,47	1956
	1		2,55	33,67	8,05	195,6
	10		0,65	11,08	0,8	19,56
	100		0,08	1,76	0,08	1,96
	1000		0,008	0,196	0,008	0,196
5	0		18,83	198,98	$8 \cdot 10^6$	$1956 \cdot 10^5$
	0,1		15,6	167,22	80,47	1956
	1		6,45	79,41	8,05	195,6
	10		0,8	17,13	0,8	19,56
	100		0,08	1,96	0,08	1,96
	1000		0,008	0,196	0,008	0,196
10	0		43,79	448,98	$8 \cdot 10^6$	$1956 \cdot 10^5$
	0,1		30,66	319,89	80,47	1956
	1		7,98	113,94	8,05	195,6
	10		0,8	19,39	0,8	19,56
	100		0,08	1,96	0,08	1,96
	1000		0,008	0,196	0,008	0,196

Таблица 1. Значения моментов выброса в кривой $\|\tilde{x}(t_M)\|$

по формуле		(25)				(19)			
λ		-0,2		-0,02		-0,2		-0,02	
n	δ	$\ \tilde{x}(t_M)\ $	Δ	$\ \tilde{x}(t_M)\ $	Δ	$\ \tilde{x}(t_M)\ $	Δ	$\ \tilde{x}(t_M)\ $	Δ
2	10^{-6}	2,25	1,25	18,77	17,77	$4,91 \cdot 10^{1733059}$		$4,5 \cdot 10^{21280419}$	
	0,1	2,18	1,18	17,91	16,91	$2,41 \cdot 10^{10}$		$6,5 \cdot 10^{195}$	
	1	1,8	0,8	13	12	10,92	9,92	$3,81 \cdot 10^{19}$	
	10	1,2	0,2	4,37	3,37	1,27	0,27	90,81	89,81
	100	1,02	0,02	1,43	0,43	1,02	0,02	1,57	0,57
	1000	1,002	0,002	1,05	0,05	1,002	0,002	1,05	0,05
5	10^{-6}	151,55	150,55	$1,25 \cdot 10^6$		$4,91 \cdot 10^{1733059}$		$4,5 \cdot 10^{21280419}$	
	0,1	81,65	80,65	$0,617 \cdot 10^6$		$2,41 \cdot 10^{10}$		$6,5 \cdot 10^{195}$	
	1	7,24	6,24	$2,36 \cdot 10^4$		10,92	9,92	$3,81 \cdot 10^{19}$	
	10	1,27	0,27	42,04	41,04	1,27	0,27	90,81	89,81
	100	1,02	0,02	1,57	0,57	1,02	0,02	1,57	0,57
	1000	1,002	0,002	1,05	0,05	1,002	0,002	1,05	0,05
10	10^{-6}	$3,21 \cdot 10^5$		$2,63 \cdot 10^{14}$		$4,91 \cdot 10^{1733059}$		$4,5 \cdot 10^{21280419}$	
	0,1	$1,66 \cdot 10^4$		$1,10 \cdot 10^{13}$		$2,41 \cdot 10^{10}$		$6,5 \cdot 10^{195}$	
	1	10,83	9,83	$2,59 \cdot 10^8$		10,92	9,92	$3,81 \cdot 10^{19}$	
	10	1,27	0,27	88,24	87,24	1,27	0,27	90,81	89,81
	100	1,02	0,02	1,57	0,57	1,02	0,02	1,57	0,57
	1000	1,002	0,002	1,05	0,05	1,002	0,002	1,05	0,05

Таблица 2. Значения выбросов $\max_t (\|\tilde{x}(t)\|) = \|\tilde{x}(t_M)\|$ кривой $\|\tilde{x}(t)\|$

Значения величин t_M для двух версий собственного числа λ и трех реализаций размерности n системы в функции от величины δ -оценки степени близости простой структуры СЧ к кратной, вычисленные с использованием представлений (24) и (25), сведены в табл. 1.

Соотношения (24) и (25) являются решением первого этапа поставленной задачи, в которой используется представление матрицы состояния системы в «квазитордановой» форме. Они позволяют разработчику путем назначения величины δ добиваться требуемого значения величины выброса, наблюдаемого в точке $t = t_M$, на уровне, удовлетворяющем неравенству $\|\tilde{x}(t_M)\| \leq (1 + \Delta)\|\tilde{x}(0)\|$, где величина Δ задается априори. Значения нормы $\|\tilde{x}(t_M)\| = (1 + \Delta)\|\tilde{x}(0)\|_{\|\tilde{x}(0)\|=1} = (1 + \Delta)$ для двух версий собственного числа λ и трех реализаций размерности n системы с оценкой Δ в функции от величины δ -оценки степени близости простой структуры СЧ к кратной, вычисленные с использованием представлений (19) и (25), сведены в табл. 2. Из приведенных таблиц видно, что в вычислениях по формулам (19) и (24) с использованием покрытия процессов по норме с уменьшением порядка n достаточность полученных оценок заметно увеличивается, а с увеличением значения δ -оценки степени близости простой структуры СЧ к кратной – уменьшается.

Решение задачи на втором этапе предпринятых исследований состоит в переносе полученных результатов на систему (1) с матрицей состояния системы F , заданной в произвольной форме в классе представлений, подобных «квазитордановой» (6). Как и в работе [1], следует ожидать, что значения $\|\tilde{x}(t)\|$ будут в $c\{S\}$ раз превышать значения $\|\tilde{x}(t)\| \forall t$, сохраняя ту же зависимость от величин λ , δ и порядка системы n , где $c\{S\} = \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$ – число обусловленности [15] матрицы S , удовлетворяющей (6).

Компьютерное исследование свободного движения непрерывной многомерной аperiodической системы с заданной оценкой степени близости простой структуры собственных чисел ее матрицы состояния к кратной

Компьютерное исследование процессов по норме $\|\tilde{x}(t)\|$ как функции собственного числа λ , размерности системы n и величины δ -оценки степени близости простой структуры СЧ к кратной проводилось в модельной среде пакета MATLAB.

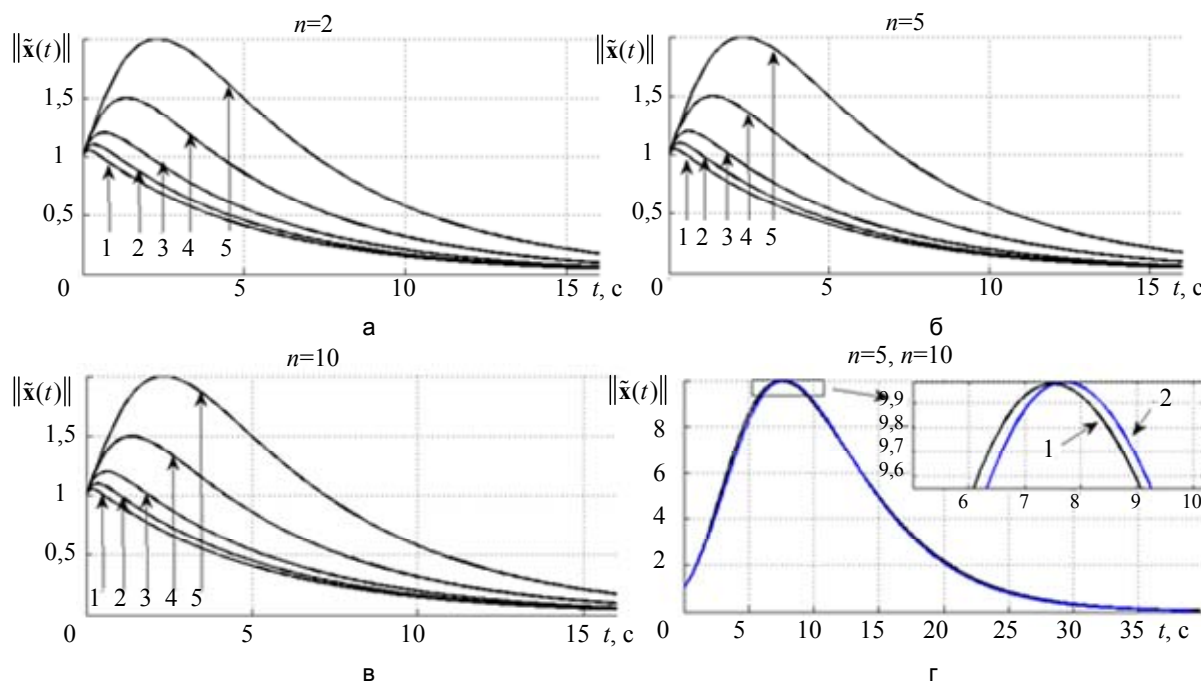


Рис. 1. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = -0,2$: а – $n = 2$, $\Delta = 1(5); 0,5(4); 0,2(3); 0,1(2); 0,05(1)$; б – $n = 5$, $\Delta = 1(5); 0,5(4); 0,2(3); 0,1(2); 0,05(1)$; в – $n = 10$, $\Delta = 1(5); 0,5(4); 0,2(3); 0,1(2); 0,05(1)$; г – $n = 5(1), n = 10(2)$, $\Delta = 9$

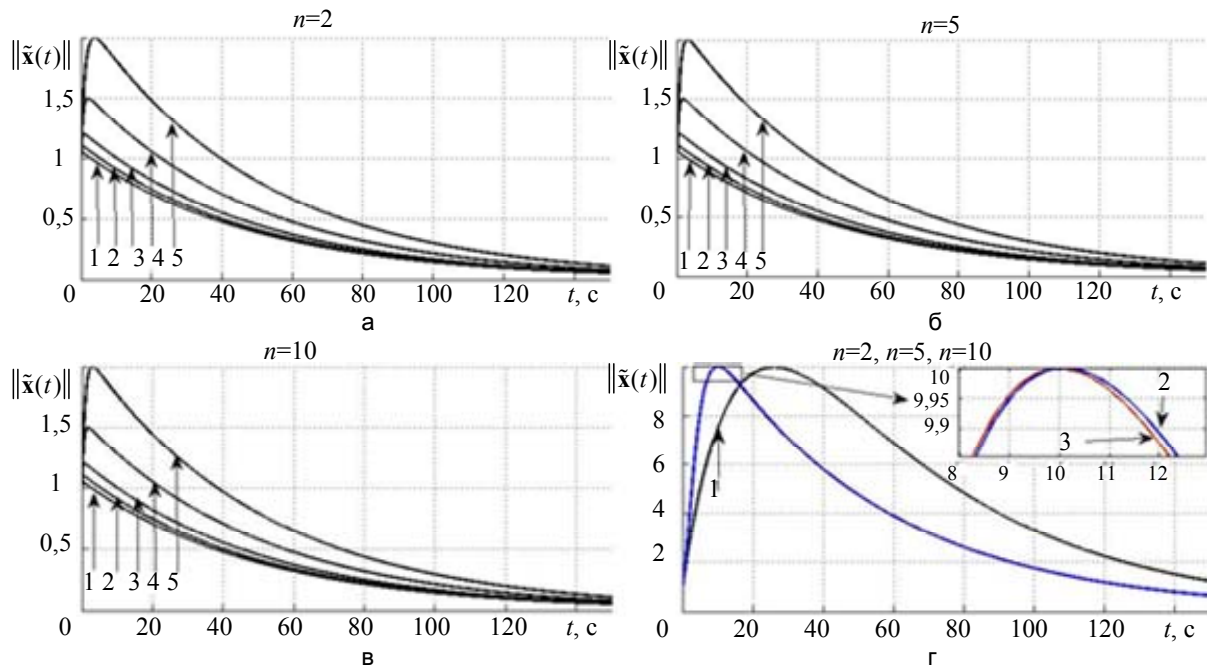


Рис. 2. Кривые процессов $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ при $\lambda = -0,02$: а – $n = 2$, $\Delta = 1(5); 0,5(4); 0,2(3); 0,1(2); 0,05(1)$;
 б – $n = 5$, $\Delta = 1(5); 0,5(4); 0,2(3); 0,1(2); 0,05(1)$;
 в – $n = 10$, $\Delta = 1(5); 0,5(4); 0,2(3); 0,1(2); 0,05(1)$; г – $n = 2(1)$, $n = 5(2)$, $n = 10(3)$, $\Delta = 9$

Основной целью компьютерного исследования была визуализация результатов, приведенных в табл. 1, 2. В связи с обнаруженной достаточностью оценок характеристик по норме свободного движения системы (4), полученных с помощью соотношений (19) и (24), визуализируются только результаты, полученные в соответствии с соотношением (25). Более того, на формируемых кривых процессов по норме фиксировалась величина $\Delta = \left\{ \|\tilde{\mathbf{x}}(t_M)\| - \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| \right\}_{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1}$.

Моделирование в среде пакета MATLAB процессов в форме $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ (25) проводилось для значений $\lambda = -0,2$ и $\lambda = -0,02$, $n = 2; 5$ и 10 и $\Delta = 9; 1; 0,5; 0,2; 0,1; 0,05$. Результаты представлены на рис. 1, 2. Выбор значений λ и n при моделировании в пакете MATLAB сделан так, чтобы сохранить сравнимость результатов, полученных в данной работе, с результатами авторов, приводимых в [1]. Следует заметить, что кривая процессов по норме для случая $\lambda = -0,2$, $n = 2$ и $\Delta = 9$ отсутствует, потому что он в линейном масштабе не заметен на фоне первых двух. Приведенные кривые обнаруживают, независимо от порядка системы при значениях Δ , приближающихся к нулю, доминирование первых двух собственных чисел матрицы (5) состояния системы (4), что оказывается справедливым и для системы (1) с точностью до мультипликативного члена $c\{\mathbf{S}\} = \|\mathbf{S}\| \cdot \|\mathbf{S}^{-1}\|$.

Заключение

С целью минимизации величины выброса [1] в процессах непрерывной системы по норме вектора состояния свободного движения предложена процедура модификации кратной структуры собственных чисел в простую. Введена оценка степени близости простой структуры собственных чисел к кратной, задаваемой в относительной форме, при которой гарантируется требуемое значение указанного выше выброса. Алгоритмически модификация кратной структуры собственных чисел в направлении приближения ее к простой может быть осуществлена методами модального управления [11].

References

1. Akunov T.A., Dudarenko N.A., Polinova N.A., Ushakov A.V. Issledovanie kolebatel'nosti protsessov v aperiodicheskikh nepreryvnykh sistemakh, porozhdaemoi faktorom kratnosti sobstvennykh chisel [Process oscillativity study in aperiodic continuous systems, generated by eigenvalues multiplication factor]. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2013, no. 3 (85), pp. 55–61.
2. Akunov T., Dudarenko N., Polinova N., Ushakov A. Factor multiplicity of the state matrix in the system dynamics. *Proceedings of the 18th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (AMATH'13)*. Budapest, Hungary, 2013, vol. 20, pp. 58–63.

3. Bhattacharyya S.P., deSouza E. Pole assignment via Sylvester's equation. *System and Control Letters*, 1982, vol. 1, no. 4, pp. 261–263.
4. Kautsky J., Nichols N.K., Chu E.K.-W. Robust pole assignment in singular control systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 1985, vol. 121, pp. 9–37.
5. Alexandridis A.T., Galanos G.D. Optimal pole placement for linear multi input controllable system. *IEEE transactions on Circuit and System*, 1987, vol. CAS-34, no. 12, pp. 1602–1604.
6. Valasek M., Olgac N. Efficient pole placement technique for linear time-variant SISO systems. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 1995, vol. 142, no. 5, pp. 451–458. doi: 10.1049/ip-cta:19951959
7. Chu E.K. Pole assignment for second-order systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2002, vol. 16, no. 1, pp. 39–59. doi: 10.1006/mssp.2001.1439
8. De La Sen M. ON pole placement controllers for linear time-delay systems with commensurate points delays. *Mathematical Problems in Engineering*, 2005, vol. 2005, no 1, pp. 123–140. doi: 10.1155/MPE.2005.123
9. Hasan N. Design and analysis of pole-placement controller for interconnected power systems. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, 2012, vol. 2, no. 8, pp. 212–217.
10. Zhang L., Wang X.T. Partial eigenvalue assignment for high order system by multi-input control. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, vol. 42, no. 1–2, pp. 129–136. doi: 10.1016/j.ymsp.2013.06.026
11. Dudarenko N.A., Slita O.V., Ushakov A.V. *Matematicheskie osnovy sovremennoi teorii upravleniya: apparat metoda prostranstva sostoyaniya* [Mathematical foundations of modern control theory: the apparatus of the state space method] Ed. A.V. Ushakov. St. Petersburg, SPbSU ITMO Publ., 2008, 323 p.
12. Andreev Yu.N. *Upravlenie konechnomernymi lineinymi ob'ektami* [Control of finite linear objects]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 424 p.
13. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 575 p.
14. Akunov T.A., Dudarenko N.A., Polinova N.A., Ushakov A.V. Issledovanie protsessov v nepreryvnykh sistemakh s kratnymi kompleksno-sopryazhennymi sobstvennymi chislami ikh matrits sostoyaniya [Research of processes in continuous systems with multiple complex conjugated eigenvalues of their state matrix]. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2013, no. 4 (86), pp. 25–33.
15. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix computations*. Baltimore, Johns Hopkins University Press, 1996. 728 p.

- | | |
|--|---|
| Акунов Таалайбек Абакирович | – кандидат технических наук, докторант, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО), Санкт-Петербург, Россия, takunov@mail.ru |
| Дударенко Наталия Александровна | – доцент, кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО), Санкт-Петербург, Россия, dudarenko@yandex.ru |
| Полинова Нина Александровна | – студент, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО), Санкт-Петербург, Россия, polinova_nina@mail.ru |
| Ушаков Анатолий Владимирович | – профессор, доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО), Санкт-Петербург, Россия, ushakov-AVG@yandex.ru |
| Taalaybek A. Akunov | – PhD, doctoral candidate, Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics (ITMO University), Saint Petersburg, Russia, takunov@mail.ru |
| Natalya A. Dudarenko | – Associate professor, PhD, Associate professor, Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics (ITMO University), Saint Petersburg, Russia, dudarenko@yandex.ru |
| Nina A. Polinova | – student, Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics (ITMO University), Saint Petersburg, Russia, polinova_nina@mail.ru |
| Anatoly V. Ushakov | – Professor, D.Sc., Professor, Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics (ITMO University), Saint Petersburg, Russia, ushakov-AVG@yandex.ru |

Принято к печати 25.11.13

Accepted 25.11.13